Es: funzione senza derivata in un punto.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

f è continua in $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \overbrace{\sin \frac{1}{x}}^{\text{limitata}} = 0 = f(0)$$

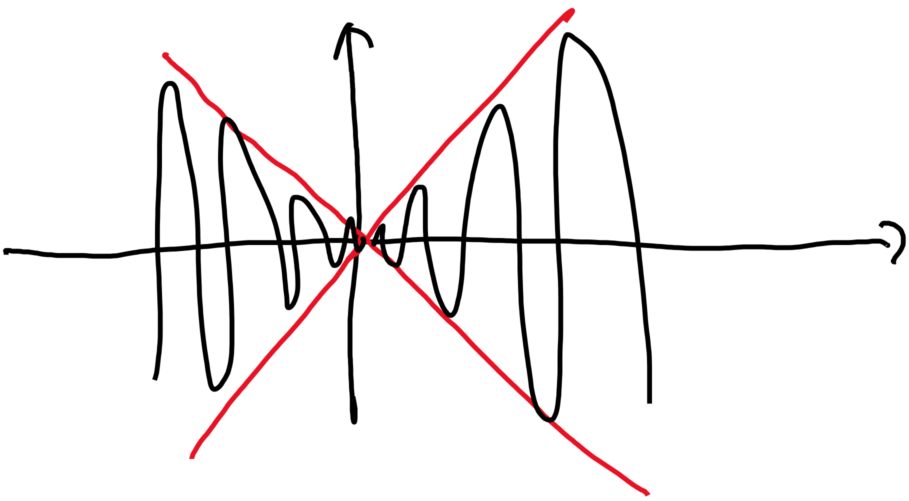
$\Rightarrow$ f è continua.

Derivabilità

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} \sin \frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{non esiste.}$$

La funzione non ha derivata in $x=0$.



Es: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}, \; x > -1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + o(x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)} \quad \text{per } x \to 0$$

Es: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x). \qquad \alpha = \frac{1}{3}$$

Es: $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2} \right) x^{1/3}$

$$\left[(x^2+8x)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= \left[\left(x^2 \left(1 + \frac{8}{x} \right) \right)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= \left[x^{2/3} \left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= x^{2/3} \left[\left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - 1 \right] x^{1/3} = x \left[\left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - 1 \right] = (*)$$

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t) \qquad t \to 0 \qquad \alpha = \frac{1}{3} \quad t = \frac{8}{x}$$

Se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$$\circledast = x\left(\cancel{1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{x} + o\left(\frac{8}{x}\right) - \cancel{1}\right) = \frac{8}{3} + o(1) \to \frac{8}{3} + 0$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$x\, o\left(\frac{8}{x}\right) = o(8) = o(1)$$

cosa vuol dire $o(1)$?

$$f(x) = o(1) \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Rightarrow f(x) \to 0.$$

Es: $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + o(x-0)$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = 0 + 1\cdot x + o(x) = x + o(x)} \quad x \to 0$$

Prop: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.
Se f è debolmente decrescente $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

dim: $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

una funzione debolmente crescente

mantiene l'ordinamento.

$\Rightarrow$ numeratore e denominatore sono concordi in segno

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow f'(x_0) \geq 0.$$

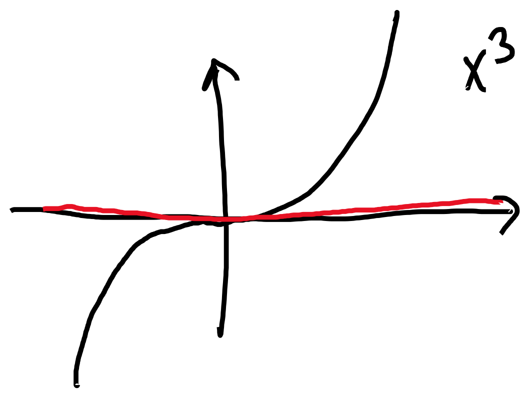
Il contrario se f è deb. decrescente.

Oss: Se f è strettamente crescente posso solo dedurre che $f'(x_0) \geq 0$ e non che $f'(x_0) > 0$.

Es: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente

però $f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(0) = 0$.

$\Rightarrow$ è falso che $f'(x) > 0$. è solo $f'(x) \geq 0$.

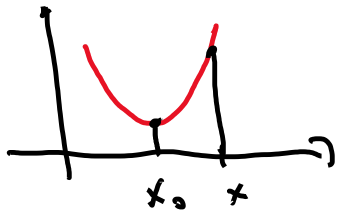


Teorema di Fermat.

$f: A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ (interno ad A) e x_0 è punto di massimo o di minimo locale e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

dim: f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



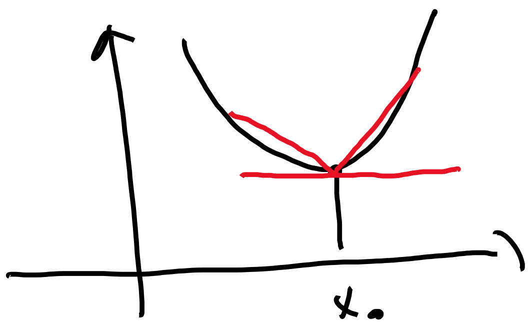
Considériamo il caso in cui x_0 è di minimo locale. $\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ in un intorno di x_0. $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ perché $x \to x_0^+$

$\Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0$.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\to \leq 0}} \leq 0.$$

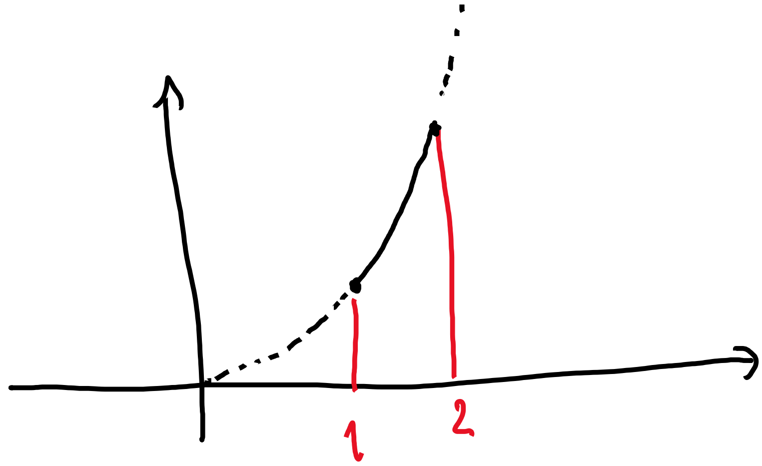
ma $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$.



Oss: se il punto non è interno il teorema non è sempre valido.

Es: $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

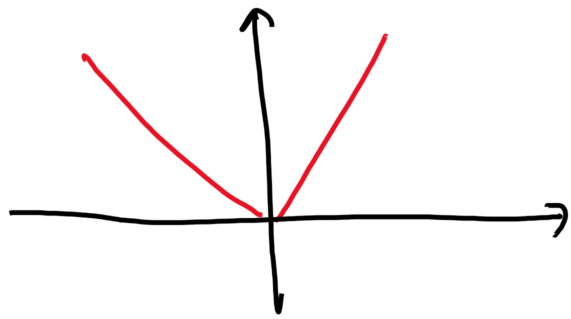


$\min(f) = f(1) = 1$, $\max(f) = f(2) = 4$

$f'(x) = 2x$ $\qquad f'(1) = 2 \neq 0$, $f'(2) = 4 \neq 0$

se i punti di max e di min locali non sono interni (sono negli estremi) non è detto che $f'(x) = 0$.

Es: $f(x) = |x|$

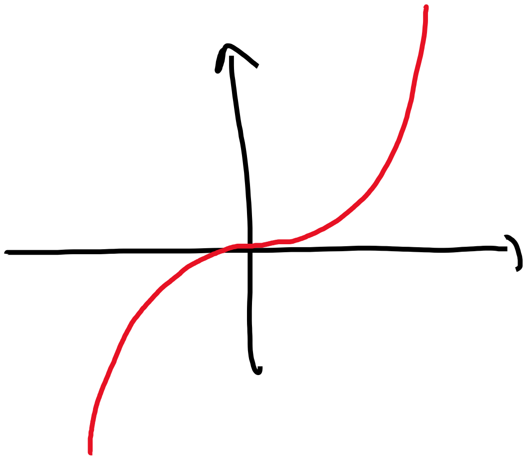


$\min(f) = f(0) = 0$

ma f non è derivabile in $x = 0$.

Anche in questo caso il punto non si trova cercando dove $f'(x) = 0$.

Oss: Il teorema di Fermat è solo una condizione necessaria per cui punto di max o di min locale. Non è in generale suff.



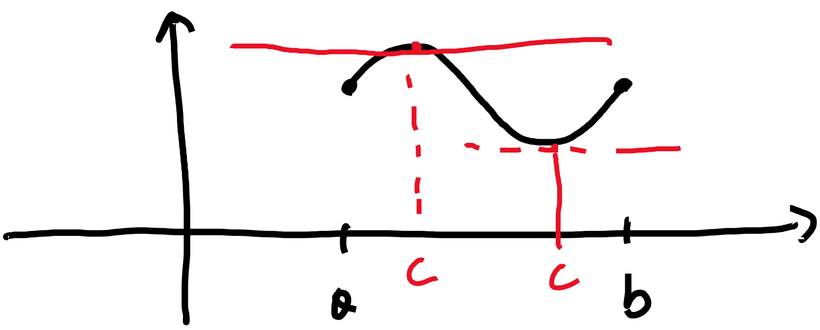
Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

ma $x=0$ non è né punto di max né di min. locale.

Teorema di Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



dim: per il th. di Weierstrass f ha max e min. Siano x_1 e x_2 punti t.c.

$$f(x_1) = \min(f), \quad f(x_2) = \max(f).$$

1) x_1 e x_2 sono entrambi negli estremi

di $[a,b]$ cioè $x_1 = a$, $x_2 = b$ o viceversa.

ma $f(a) = f(b) \Rightarrow \max(f) = \min(f)$

$\Rightarrow f$ è costante in $[a,b]$.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

2) almeno uno dei punti x_1 o x_2 è interno ad (a,b) $\Rightarrow f'(x_1)$ o $f'(x_2)$ è 0.

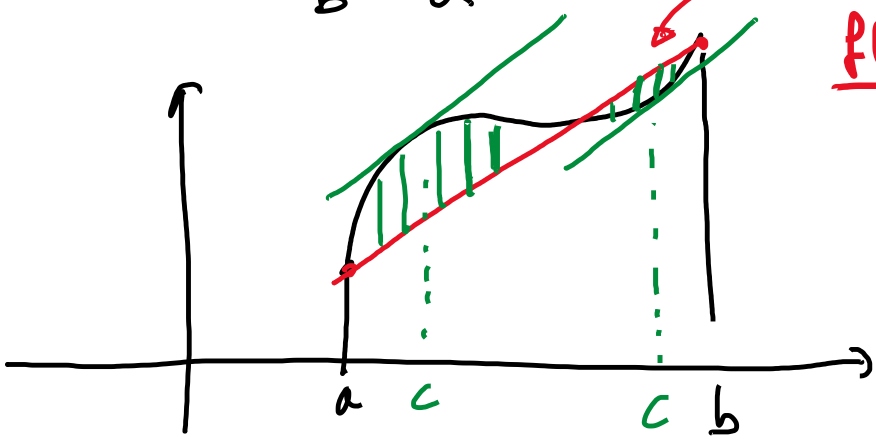
$\Rightarrow c = x_1$ o $c = x_2$.

Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

coeff. angolare $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



dim: Definiamo

$r'(x)$

$$r(x) = f(a) + \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}(x-a)$$

è una retta $r(a) = f(a)$ $r(b) = f(b)$.

e congiunge gli estremi del grafico.

Definisco

$$g(x) = f(x) - r(x)$$

è la distanza (col segno) tra il grafico di f e la retta r.

g è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). $g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$

$\Rightarrow$ $g(a) = g(b)$ $\Rightarrow$ posso applicare il teorema di Rolle a g.

$\Rightarrow$ $\exists$ $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$

ma $g'(c) = f'(c) - r'(c)$

$\Rightarrow$ $f'(c) = r'(c)$

ma $r'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ $\forall x$

$\Rightarrow$ $r'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $\mathrm{int}(I)$.

1) Se $f'(x)=0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è costante in I

2) Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è deb. crescente in I

3) Se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è deb. decresente in I

4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ strett. cresente in I

5) Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è strett. decresente in I.

dim: 4) Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Devo per vedere che $f(x_1) < f(x_2)$.

Ma $(x_1, x_2) \subset \mathrm{Int}(I)$. Allora applico il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$.

$$\Rightarrow \exists\ c \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ma $f'(c) > 0$ perché $f'(x) > 0 \ \forall\ x \in \mathrm{Int}(I)$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Oss: f deve essere definita su un intervallo.

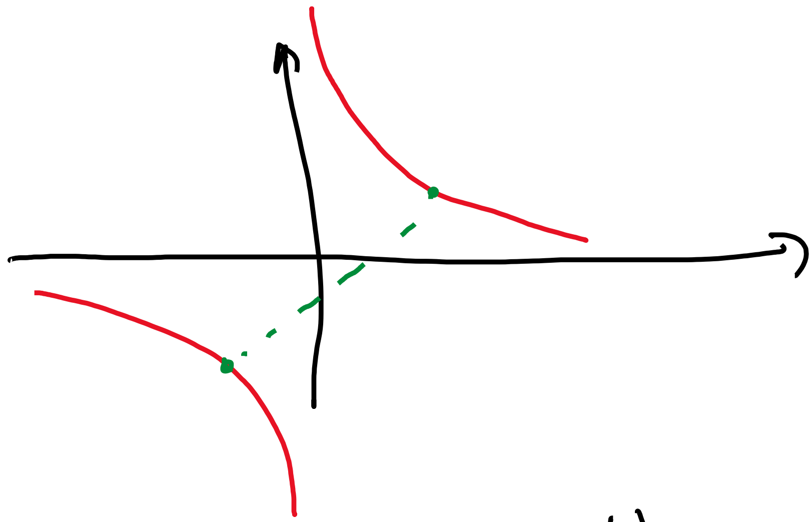
Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

non è un intervallo.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f(x) = x^{-1} \Rightarrow f' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ma f non è strett. decrescente nel suo dominio



ma è decrescente (strettamente) in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\qquad$ derivata di $\frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow f$ è costante in $(0, +\infty)$.

quanto vale la costante?

La calcolo per $x=1$

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

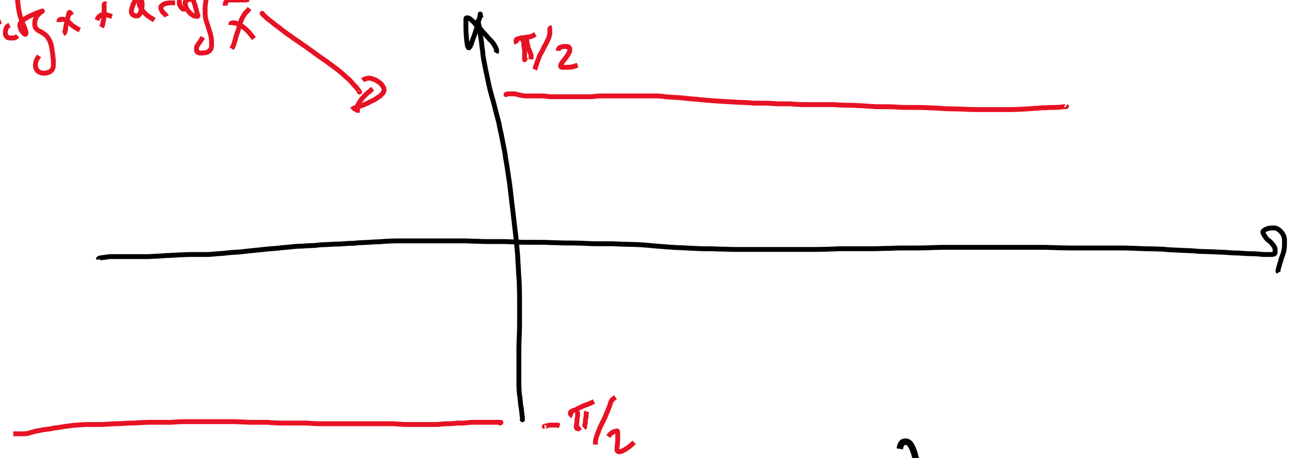
$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \text{se } x > 0$$

Se invece $x<0 \Rightarrow f$ è costante anche su $(-\infty, 0)$ ma la costante è diversa.

$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\pi/2$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \boxed{\text{se } x<0}$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$



$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
ma f non è costante in tutto il suo dominio.