Teorema: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim: $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$ perchè $f'(x_0)$ è finito.

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow f$ è continua in x_0.

Def: Se esiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

questo si dice derivata destra di f in x_0.

e si indica con $f'_+(x_0)$.

La derivata sinistra si indica

con $f'_-(x_0)$.

Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite.

Es: $f(x) = |x|$

Nel punto $x_0 = 0$ calcoliamo derivate destra e sinistra.

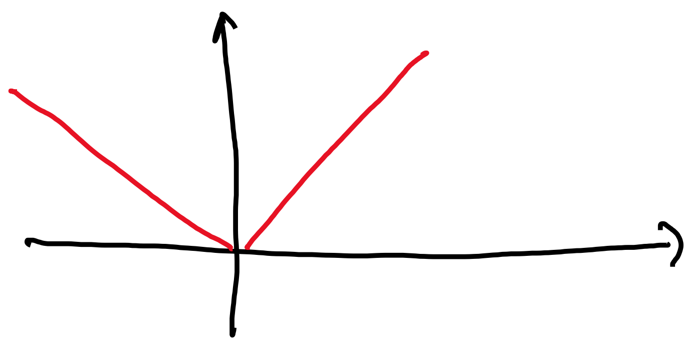
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

$\Rightarrow$ $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ e f non è derivabile.

Ma f è continua.

$\Rightarrow$ in generale continua $\not\Rightarrow$ derivabile.



Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{allora}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0).$$

Def: Se f è derivabile in x_0 allora la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{si dice}$$

retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente.

$f : A \to \mathbb{R}$

supponiamo che f sia derivabile in ogni punto x di A. Allora posso costruire una nuova funzione

$$f' : A \to \mathbb{R}$$

t.c. in ogni punto $x \in A$ $f'(x)$ è la derivata di f calcolata in $x_0 = x$.

Derivate successive

Se la funzione f' è ancora una funzione derivabile posso calcolare

$$D(f') = (f')'$$

si chiama derivata seconda di f e si indica con f''.

Se si può andare avanti otteniamo le derivate terze, quarte ....

$$f''' \quad f^{(4)} \quad f^{(5)} \quad \dots$$

in generale $f^{(k)}$ $k \in \mathbb{N}$ indica la derivata fatta k-volte.

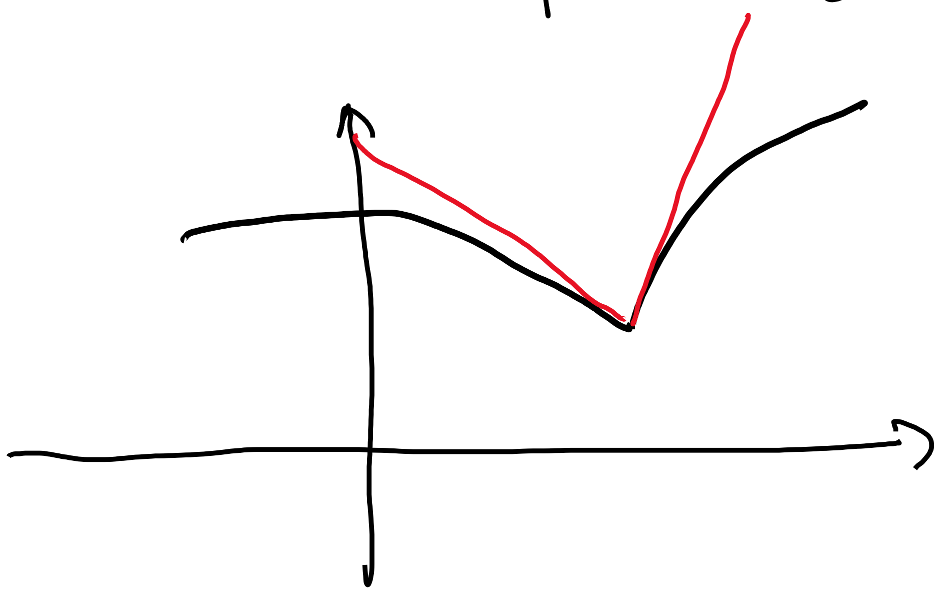
Per convenzione

$$f^{(0)} = f.$$

Def: Se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, sono entrambe finite ma

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

allora x_0 si dice punto angoloso.

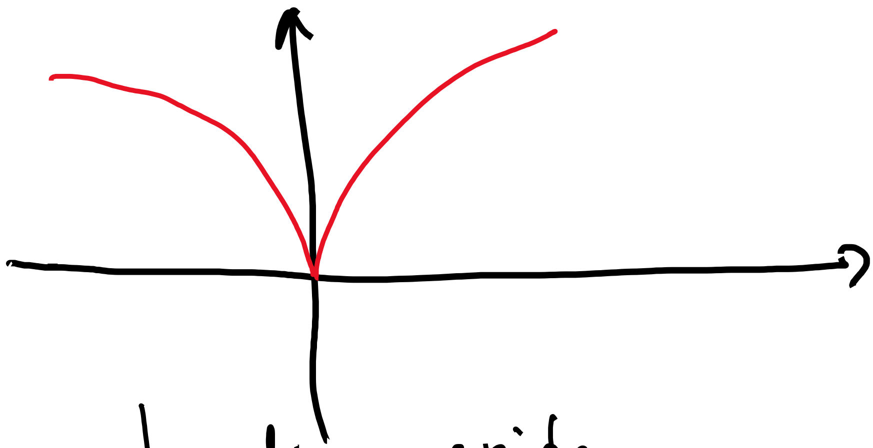


Def: Se f è continua in x_0 e

$f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$

o viceversa allora x_0 si dice punto di cuspide.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$



$x_0 = 0$ è punto di cuspide.

$f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$

Teorema: Se f e g sono derivabili in x_0 allora

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) fg è derivabile in x_0 e
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3) Se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0

e
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Oss: Dalla 2) e 3) si ottiene che se f e g sono derivabili e $g(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

infatti $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

Calcoliamo $D(e^x)$.

fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right)}{x - x_0}$$

$$= e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

$t = x - x_0$

se $x \to x_0 \Rightarrow t \to 0$

$$= e^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

$$\Rightarrow \quad D(e^x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$D(\sin x) = \cos x$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

Oss: Se f è costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x$.

Oss: Se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow D(kf) = k\,D(f)$

Es: $D(3\sin x) = 3\cos x$

Es: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = D(\cos x) = -\sin x$

$f'''(x) = D(-\sin x) = -D(\sin x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = D(-\cos x) = -D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$

$f^{(5)} = f'$ è ciclica di ordine 4

Lo stesso vale per $\cos x$.

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{D(\sin x)\cdot\cos x - \sin x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{1 + tg^2 x}$$

Derivata della funzione inversa

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e strettamente monotòna (quindi invertibile). Allora f^{-1} è derivabile e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{con} \quad y = f(x)$$

cioè
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Es: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

poniamo $y = e^x \Rightarrow x = \log y$

$$f^{-1}(y) = \log y$$

$$D(\log y) = D(f^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}}$$

$\boxed{\text{perché } f'(x) = e^x \Rightarrow f'(f^{-1}(y)) = e^{f^{-1}(y)}}$

$$= \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

$$D(\log y) = \frac{1}{y} \qquad \forall\, y > 0.$$

$$D(\log x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x > 0$$

Derivata della funzione composta.

Prop: Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Es: $f(x) = \sin x \qquad g(y) = e^y$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = e^{\sin x}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad g'(y) = e^y$$

$$(g \circ f)' = g'(f(x))\, f'(x) = g'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$= e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow D\left(e^{\sin x}\right) = e^{\sin x} \cdot \cos x \,.$$

Es: $D(x) = 1$

$$D(x^2) = D(x \cdot x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$D(x^3) = D(x^2 \cdot x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$D(x^n) = n\, x^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

$D(x^\alpha) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad x > 0$

composizione

$$D(x^\alpha) = D\left(e^{\alpha \log x}\right) = \underbrace{e^{\alpha \log x}} \cdot D(\alpha \log x)$$

$$= \underbrace{x^\alpha}\, \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

Es: $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Es: $D(a^x)$ con $a>0$

$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x\log a}$$

$$\Rightarrow D(a^x) = D(e^{x\log a}) = e^{x\log a} \cdot D(x\log a) =$$

$$= a^x \cdot \log a \cdot 1 = a^x \cdot \log a.$$

$D(\operatorname{arctg} y)$

$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$$\Rightarrow (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{1+[\operatorname{tg}(f^{-1}(y))]^2} =$$

$$= \frac{1}{1+[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)]^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$D(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+y^2}$$