Def: $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A, $L, \alpha \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = L(x-x_0)^\alpha + o((x-x_0)^\alpha) \quad \text{per } x \to x_0$$

si dice che $L(x-x_0)^\alpha$ è la parte principale di f per x che tende a x_0.

Se $x_0 = +\infty$ e

$$f = L x^\alpha + o(x^\alpha) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

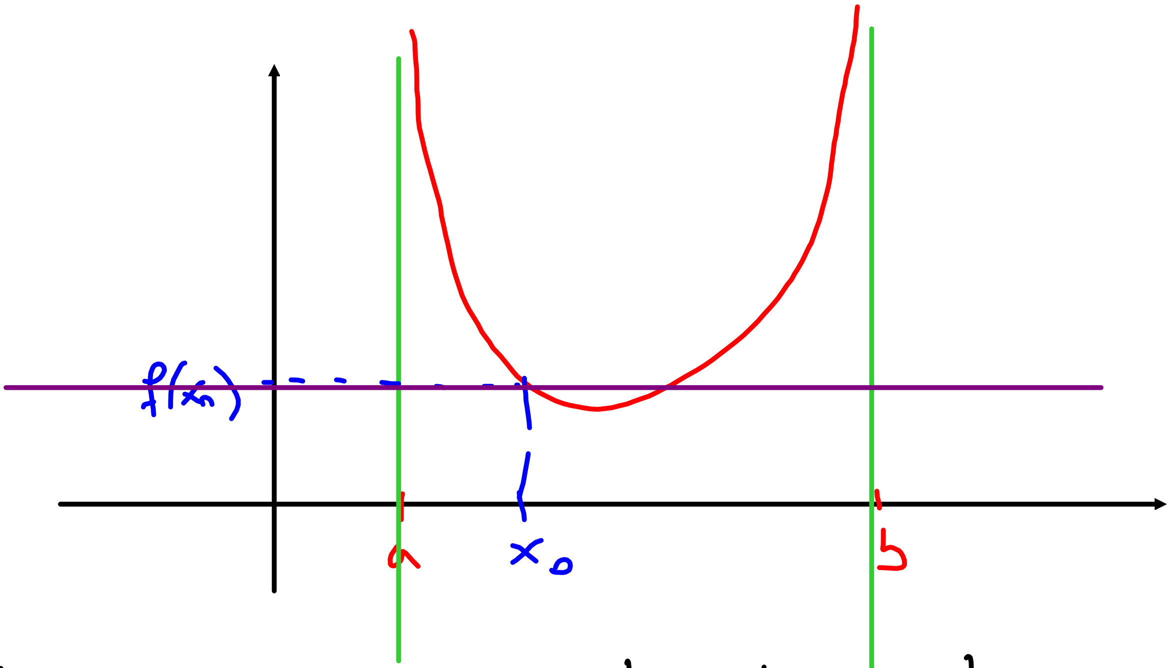
si dice che Lx^α è la parte principale di f per x che tende a $+\infty$.

Stessa definizione per $x \to -\infty$.

Prop: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua.

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

allora f ha minimo.



butto via un piccolo intervallo aperto a destra di a e uno a sinistra di b.

Ovviamente se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$ ha massimo.

Es: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

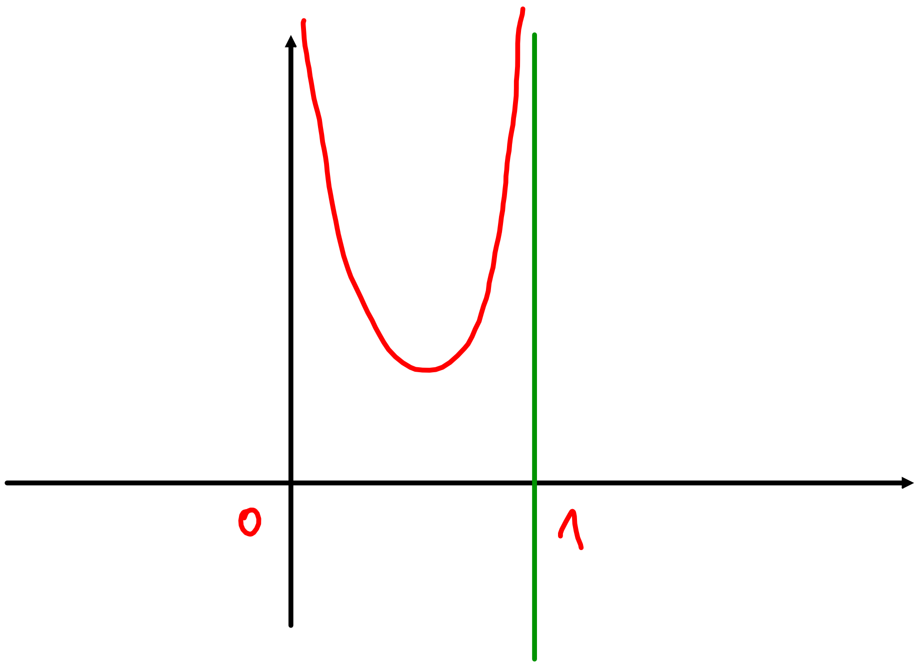
$$f(x) = \frac{1}{x - x^2}$$

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{0^+ \cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{1(1-1^-)} = \frac{1}{1 \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



f ha minimo.

Teorema (Weierstrass generalizzato)

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

con f continua t.c. esistono

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_1 \quad , \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = l_2$$

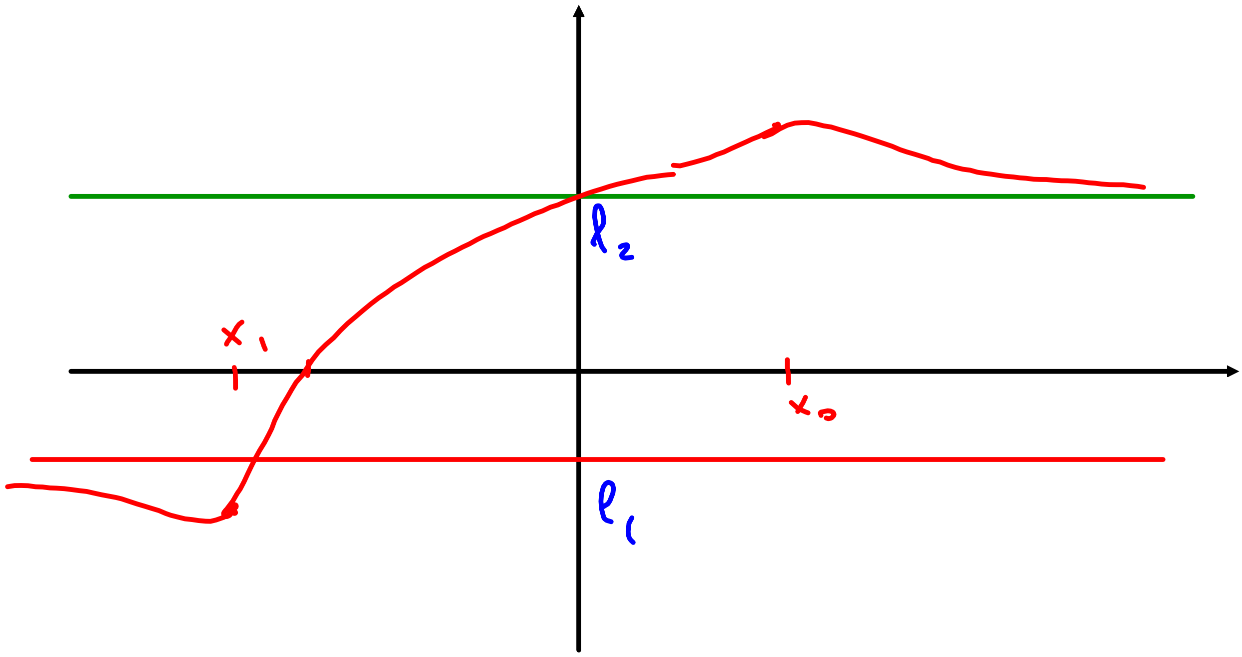
con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Se $\exists \; x_0$ t.c. $f(x_0) \geq \max\{l_1, l_2\}$

allora f ha massimo

2) Se $\exists \; x_1$ t.c. $f(x_1) \leq \min\{l_1, l_2\}$

allora f ha minimo.



ℓ_2
x_1
x_0
ℓ_1

Es: $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x|x| + x}{1+x^2} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

vediamo se esiste x_0 t.c. $f(x_0) \geq 2$.

Cerchiamo $x_0 \geq 0$ quindi risolviamo

$$\frac{2x^2 + x}{1+x^2} \geq 2 \iff 2x^2 + x \geq 2 + 2x^2 \iff x \geq 2$$

quindi f ha massimo.

Vediamo se $\exists$ x_1 t.c. $f(x_1) \leq 0$. In questo caso lo cerchiamo < 0. Quindi

$$\frac{x}{1+x^2} < 0 \iff x < 0 .$$

Allora f ha anche minimo.

Def: $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$

Se esiste

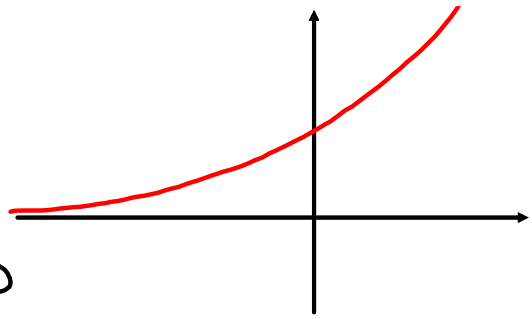
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R} \text{ (finito)}$$

allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=l$.

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = e^x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$\Rightarrow$ f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (per $x \to -\infty$).

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

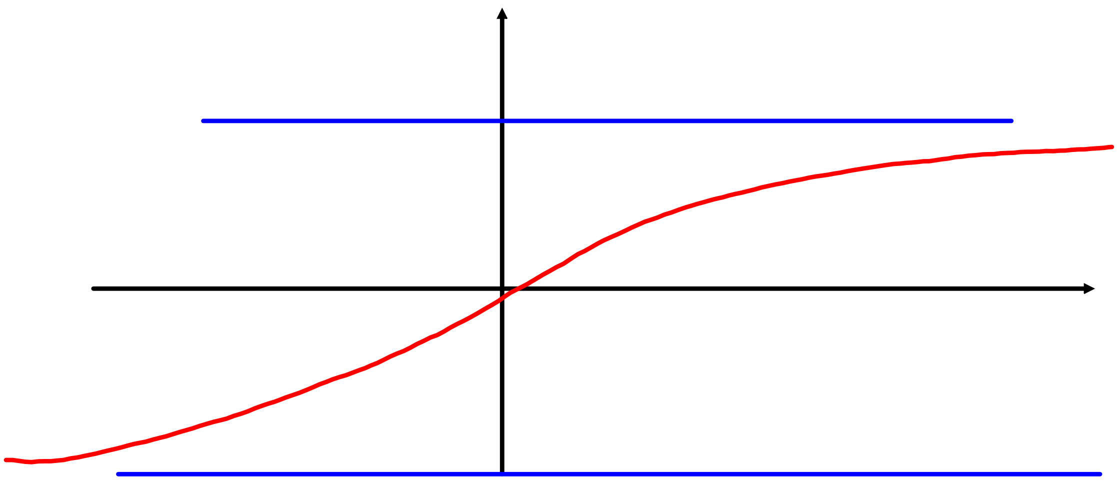
$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$

f è dispari

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

asintoto orizzont. $y = -\pi/2$

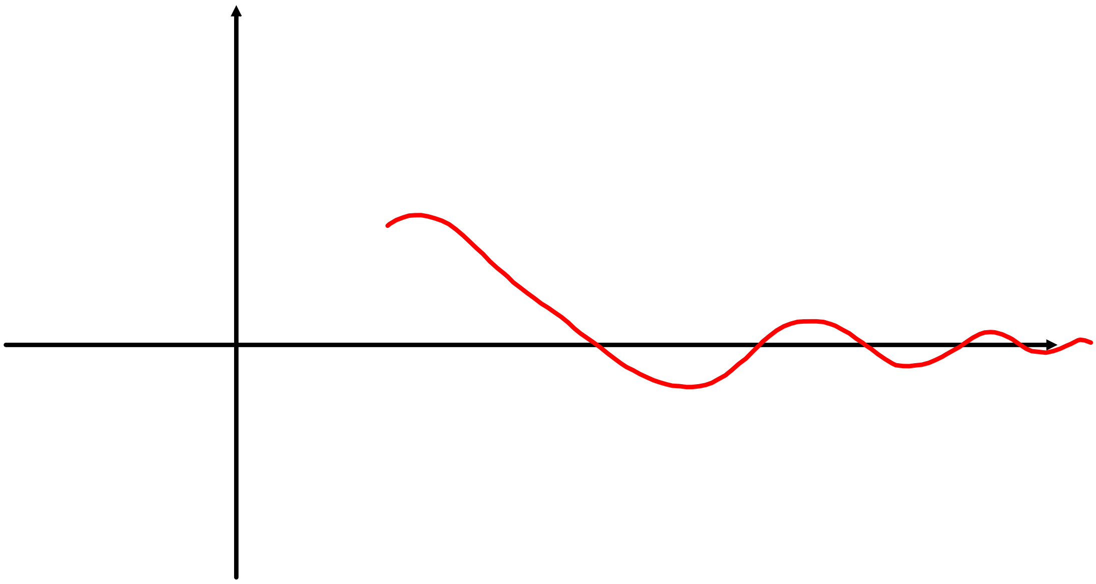


Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale.



Def: $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

si dice che f ha un asintoto verticale di equazione

$$x = x_0.$$

Lo stesso per $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

<u>Es</u>: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = 0$ è asintoto verticale per f perché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

Oss: una funzione ha al massimo 2 asintoti orizzontali ma può avere anche ∞ asintoti verticali.

Es: $f(x) = tg\, x$

Def: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$$

e $m \neq 0$ e se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$$

allora si dice che f

ha un asintoto obliquo
di equazione

$$y = mx + q \,.$$

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x-5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x}$$

$$= 2 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

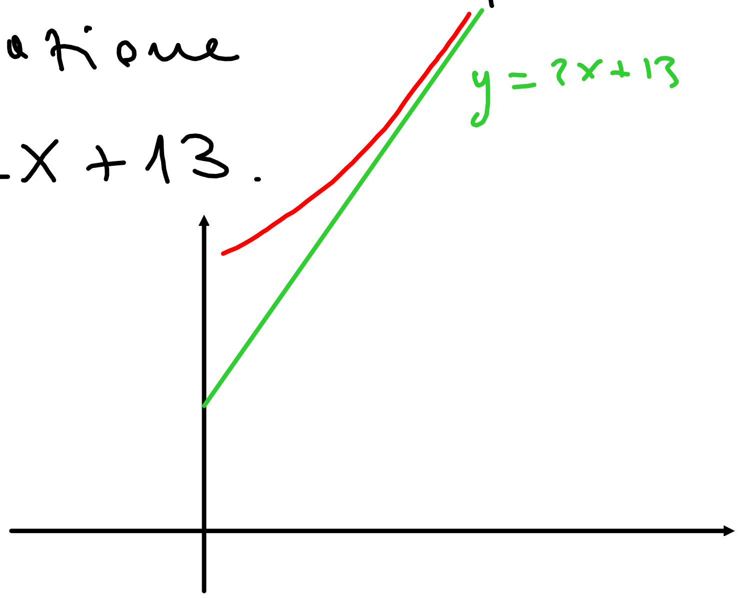
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x+2-\cancel{2x^2}+10x}{x-5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13 = 9$$

f ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = 2x + 13.$$



Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$).
Se f ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ allora non ha un asintoto obliquo a $+\infty$. Lo stesso a $-\infty$.

Oss: Se f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ allora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

se $m>0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f = +\infty$

se $m<0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f = -\infty$.

Es: $f(x) = 3x + 5\log x$

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-\infty)$$

$$= -\infty.$$

asintoto verticale

$x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} 3x + 5\log x =$$

$$= 3(\infty) + 5\log(\infty) =$$

$$= \infty + 5 \cdot \infty = \infty$$

non c'è asintoto orizzontale

forse c'è quello obliquo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5\log x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(3+5\,\frac{\log x}{x}\right) =$$

$$= 3+5\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 3+5\cdot 0 = 3$$

$m=3$

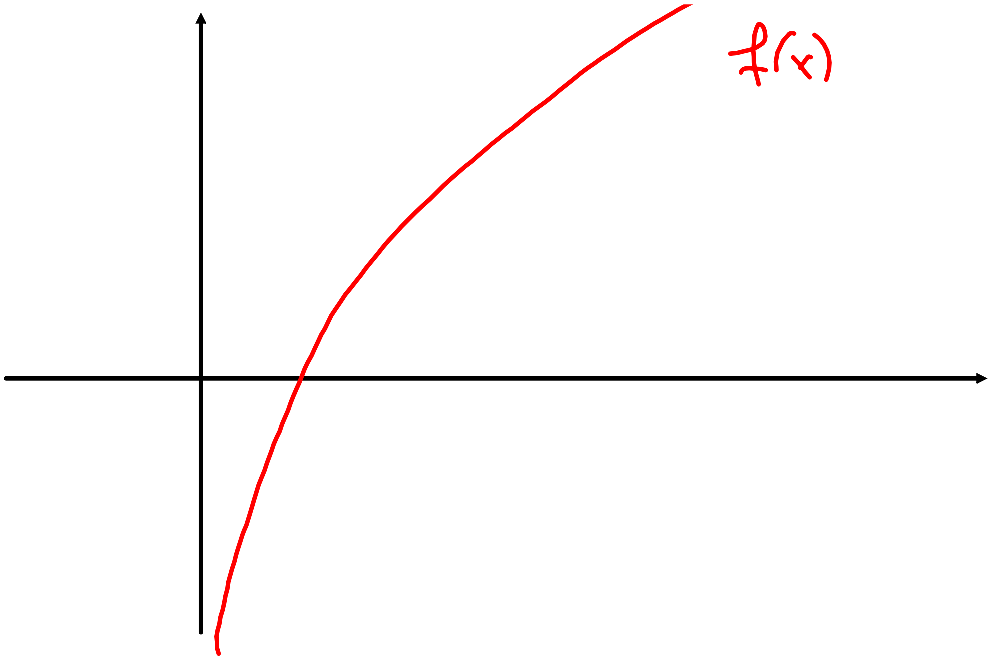
cerco di trovare q.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cancel{3x} + 5\log x - \cancel{3x} = \infty$$

$$\Rightarrow \nexists\, q \in \mathbb{R}.$$

non c'è l'asintoto obliquo.


f(x)

Derivazione.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Se esiste il limite $x_0 \in A$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

allora l si dice derivata

di f in x_0. Se $l \in \mathbb{R}$ (quindi è finito) si dice che f è derivabile in x_0.
La derivata si indica con

$$f'(x_0)\ ,\ Df(x_0)\ ,\ \frac{df}{dx}(x_0)$$

Oss: esistenza della derivata e derivabilità sono due cose diverse.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

provo a calcolare la derivata in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$x_0 = 0$
$f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

($x \geq 0$ perché $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$)

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$

La funzione ha derivata in $x_0 = 0$ che vale $+\infty$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$.

Oss: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.