$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = ? \qquad \alpha > 0$$

sostituisco $y = x^\alpha$

$\iff x = y^{1/\alpha}$

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} y \log\left(y^{1/\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to 0^+} y \log y = 0$$

Es: $\lim_{x \to 0^+} x^x =$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\log(x^x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x \to 0^-} = e^0 = 1$$

Prop: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

è debolmente crescente

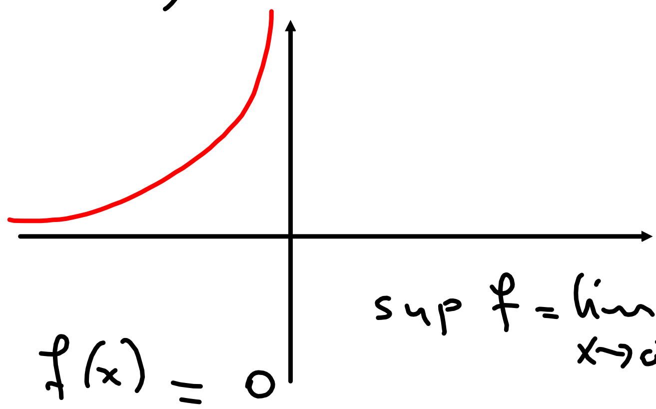
allora

$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

Es: $f(x) = -\frac{1}{x}$

$f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$



$\sup f = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\inf_{(-\infty,0)} f = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Es: Sia

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} > e^{2x^2+x+1} \right\}$$

dire se A è inferiormente o superiormente limitato.

$$\frac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} = e^{3x^3+3-2x}$$

$$e^{3x^3-2x+3} > e^{2x^2+x+1}$$

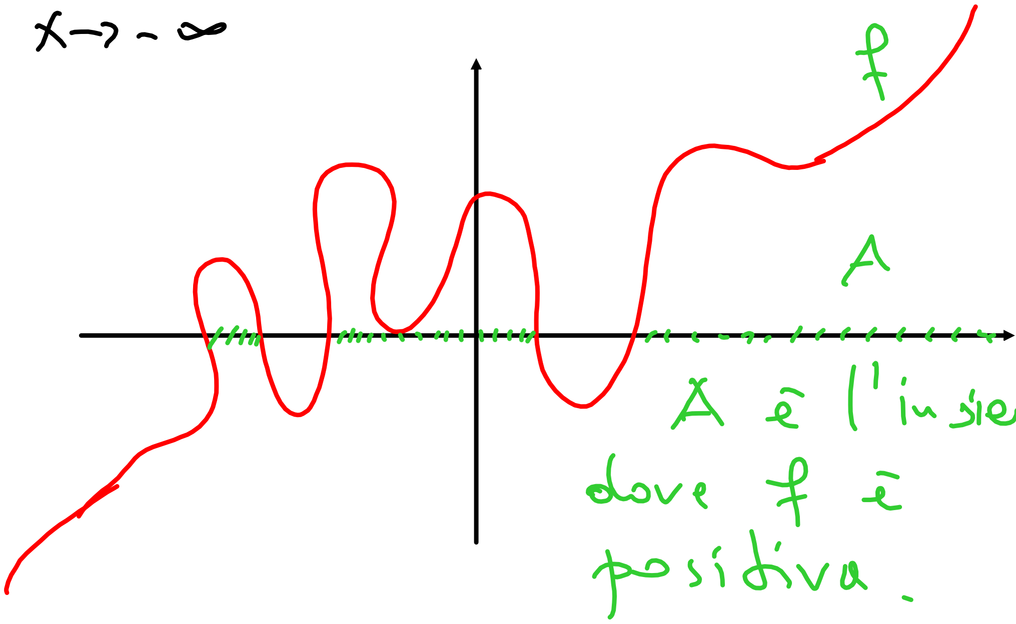
l'esponenziale è crescente

$$\Rightarrow 3x^3-2x+3 > 2x^2+x+1$$

$$3x^3-2x^2-3x+2>0 \quad (*)$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3-2x^2-3x+2 = +\infty$$

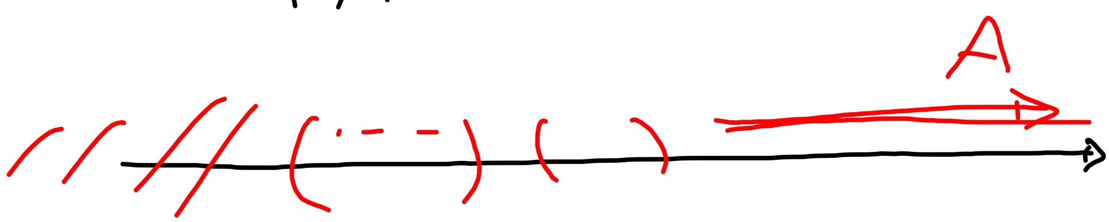
$$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - 7x^2 - 3x + 2 = -\infty$$



A è l'insieme dove f è positiva.

Se x è abbastanza grande $f(x) > 0$ e x è abbastanza piccolo $f(x) < 0$ (permanenza del segno).

quindi se x è abbastanza grande $\circledast$ vale $\Rightarrow x \in A$ se x è abbastanza piccolo $\Rightarrow$ $\circledast$ non vale e $x \notin A$.



quindi A è inferiormente limitato ma non superiorm. limitato.

Infinitesimi.

$f, g : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$

Def: Si dice che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e si scrive $f(x) = o(g(x))$

Es: $f(x) = x^3$

$g(x) = x^2$ $\quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = o(x^2)$$

Se non è specificato diversamente si intende $x \to 0$.

Def: Si dice che f è infinitesima di ordine superiore ad $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

se $f = o(x^\alpha)$

per $x \to 0$.

cioè $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$

$f(x) = o(x)$ perché?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\text{limitato}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x} \text{ è limitata vicino a } 0.$$

Attenzione.

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= o(x) \\ x^4 &= o(x) \end{aligned}\right\} \not\Rightarrow x^3 = x^4$$

Proprietà degli o-piccoli

1) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\Rightarrow k\,o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

2) $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

3) Se $\beta > 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} = o(x^\alpha)$

4) $a(x^{\alpha}) + a(x^{\alpha+\beta}) = a(x^{\alpha})$

5) $a(a(x^{\alpha})) = a(x^{\alpha})$

6) $a(x^{\alpha} + a(x^{\alpha})) = a(x^{\alpha})$

7) $a(x^{\alpha} + x^{\alpha+\beta}) = a(x^{\alpha})$

8) $x^{\alpha} \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

9) $o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

10) $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^{\beta}} = o(x^{\alpha})$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta > 0.$

Oss: $o(x^\alpha) - o(x^\alpha)$

$= o(x^\alpha)$.

Es: $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$

$x^2 - x^3 \neq 0$.

$x^2 - x^3 = o(x)$.

sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - x = o(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = x + o(x) \,.$$

per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

fate i conti come prima

$$\Rightarrow \quad tg\,x = x + \alpha(x).$$

sempre dai limiti notevoli ricaviamo

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

Es: $(\operatorname{tg} x)^2 = ?$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = (x + o(x))^2 =$$

$$= x^2 + 2x\,o(x) + (o(x))^2 =$$

$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

Es:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4}$$

$$\cos(\sin^2 x) - 1 =$$

$(\sin x = x + o(x))$

$$= \cos\left[(x + o(x))^2\right] - 1 =$$

$$= \cos\left(x^2 + o(x^2)\right) - 1 = (*)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

se $t \to 0$

la applico con $t = x^2 + o(x^2)$

lo posso fare?

Sì perché se $x \to 0$

$$\Rightarrow x^2 + o(x^2) \to 0$$

$$\circledast = \cancel{1} - \frac{\left(\overset{t}{x^2 + o(x^2)}\right)^2}{2} + o\left(\left(\underbrace{x^2 + o(x^2)}_{t}\right)^2\right) - \cancel{1}$$

$$= -\frac{x^4 + 2x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2}{2} + o(\dots)$$

$$= -\frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2} + o(\dots)$$

$$= -\frac{x^4 + o(x^4)}{2} + o\left(\left(x^4 + o(x^4)\right)\right)$$

$$= -\frac{x^4}{2} - \frac{o(x^4)}{2} + o(x^4) =$$

è $o(x^4)$

$$= -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \overbrace{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Def: Si dice che f è O-grande di g per x che tende a x_0 se

$\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata in un intorno di x_0

e si scrive $f = O(g)$.

Vuol dire che $\exists\, M > 0$ e un intorno U di x_0 t.c. se $x \in U \setminus \{x_0\}$ allora

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M.$$

Es: $f(x) = x \sin x \qquad g(x) = x$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{x \sin x}{x} \right| = |\sin x| \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad f = O(g)$$

in questo caso è vero $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.