Def.: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A) \cap \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che

$l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite

di f per x che tende a x_0

da destra e si scrive

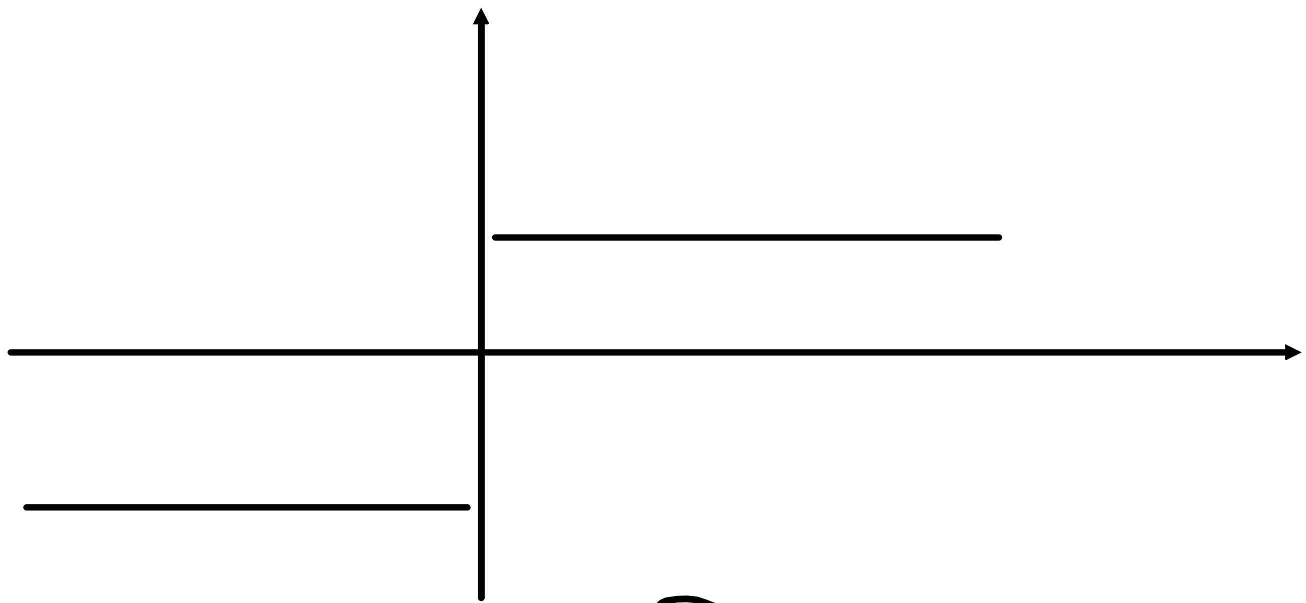
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

se $\forall V \in \mathcal{I}(\ell)\ \exists$

U intorno destro di x_0

t.c.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V.$



$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 .$$

Teorema: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se e solo se

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ e

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ , \quad l \in \mathbb{R}$$

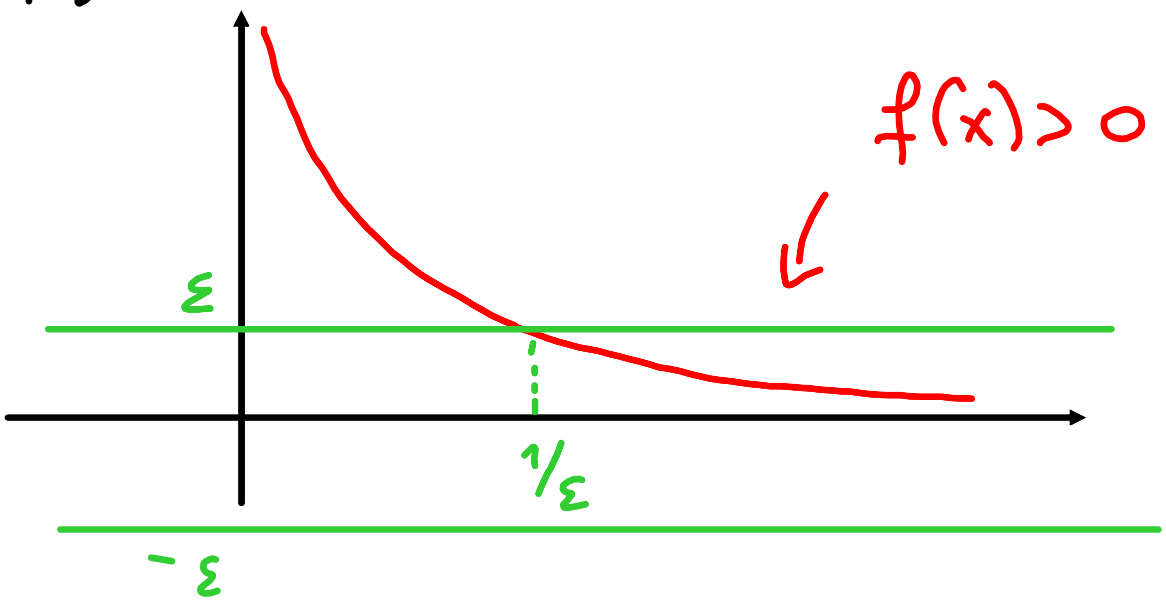
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e

$\exists \; V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$\forall x \in A \cap V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l$.

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$



Teorema: Se il limite esiste è unico.

Teorema sulla permanenza del segno.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$.

Se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

e $l \neq 0$ allora $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$

t.c. $x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di l.

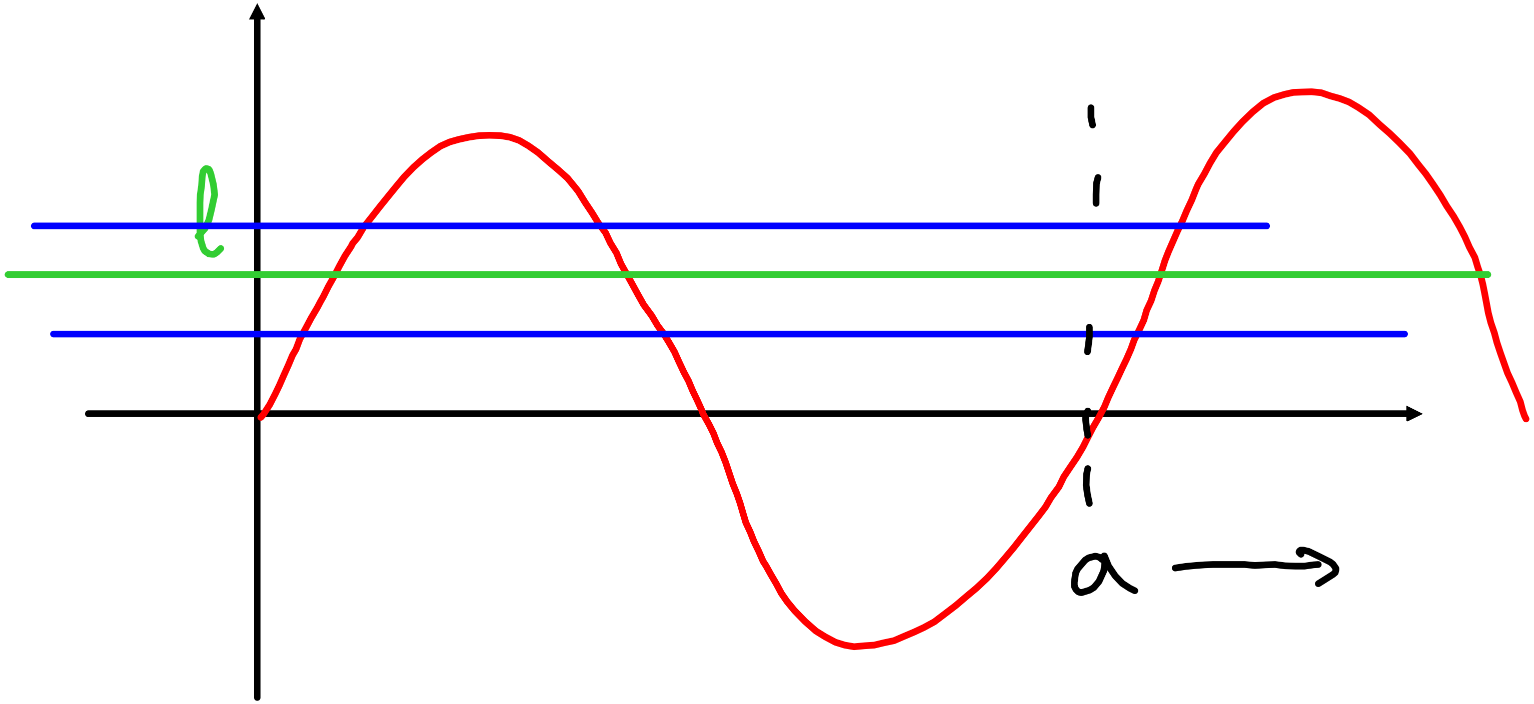
Es: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty > 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ in un intorno destro di 0.

Es: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$



Scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Se esistesse

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = \ell$$ allora dovrebbe

esistere $a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x > a \implies \ell - \frac{1}{2} < \sin x < \ell + \frac{1}{2}$$

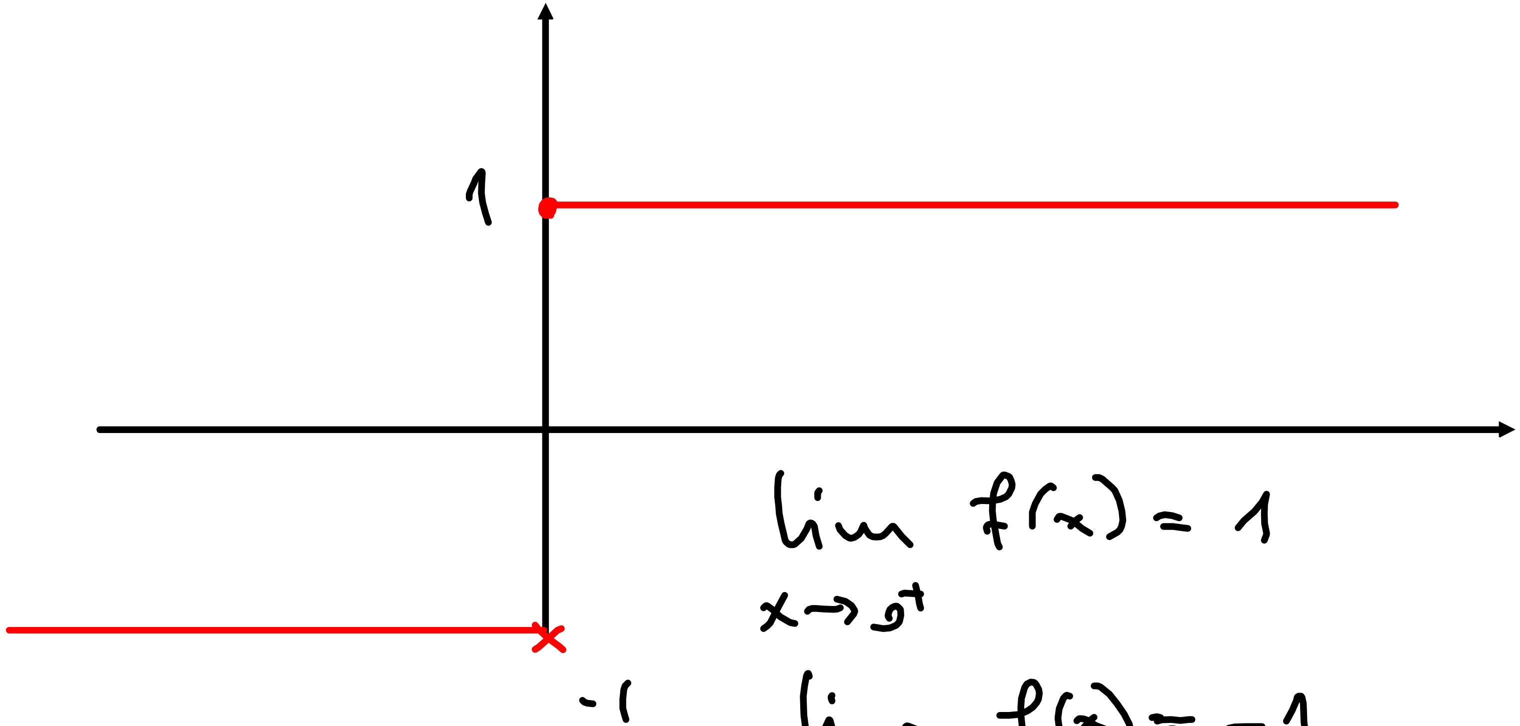
ma questo non è possibile

perché $\sin x$ assume ∞ volte

i valori 1 e -1

Es:

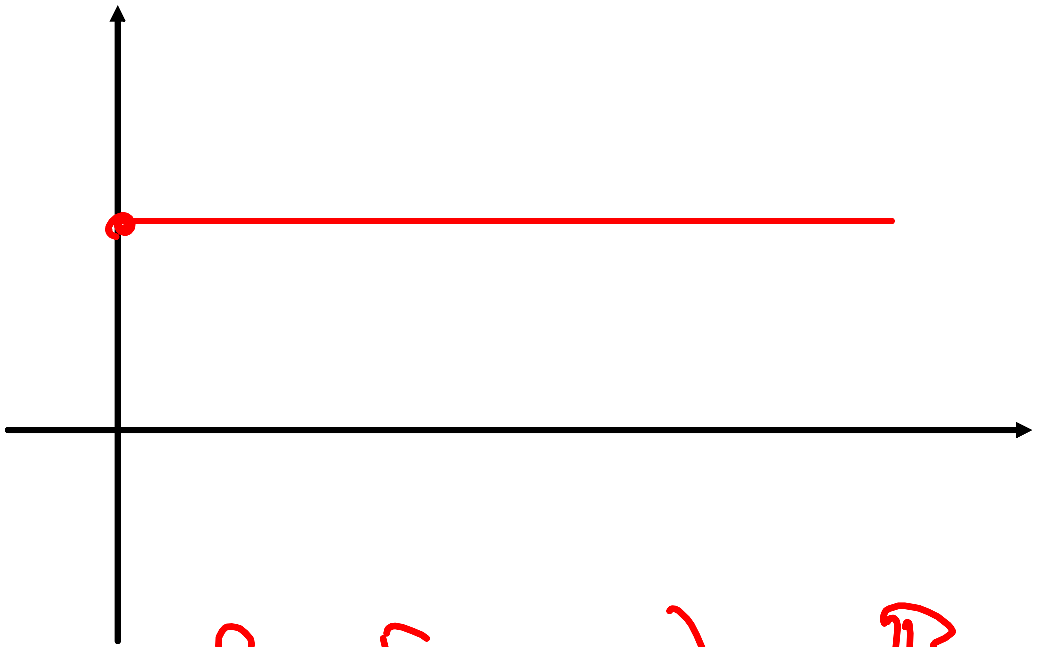
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

quindi $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

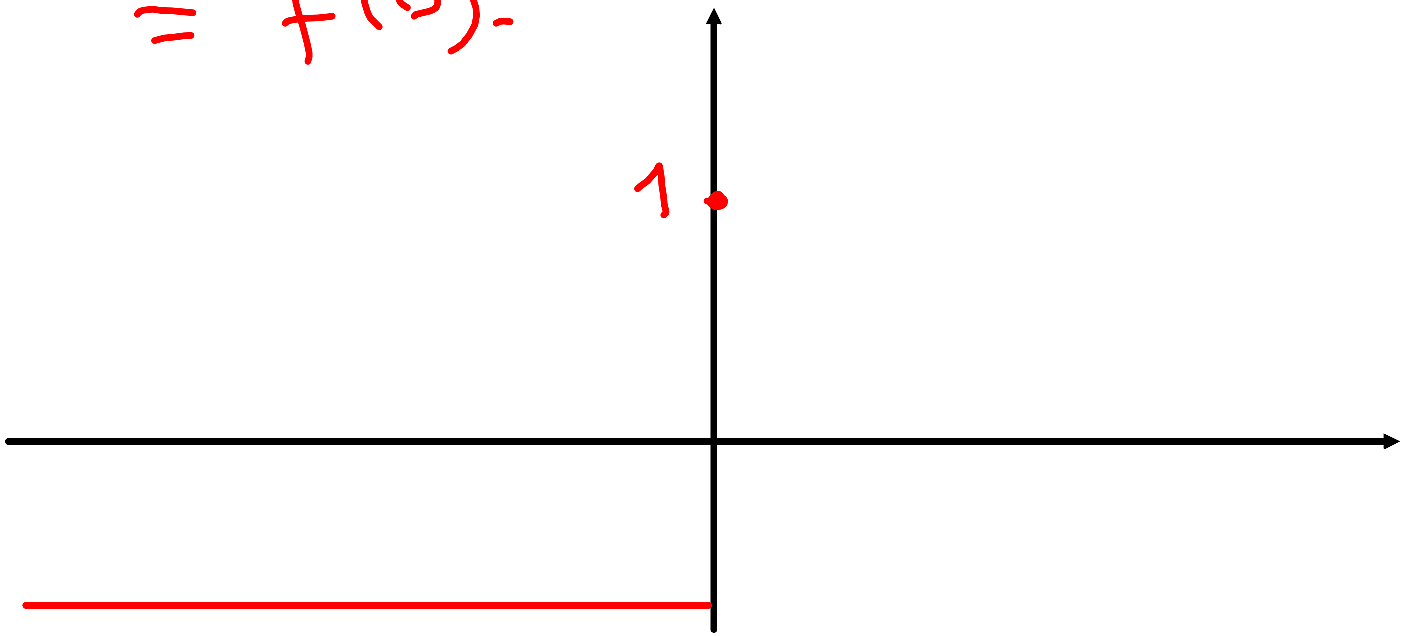


considero $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

f è continua in 0.

perché $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$= f(0)$.



Considero ora $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$

f non è continua in 0 perché

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq$$

$$\neq f(0) = 1.$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

si dice che f è continua a destra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

è continua a sinistra se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Teorema di confronto.

$A \subset \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$

$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

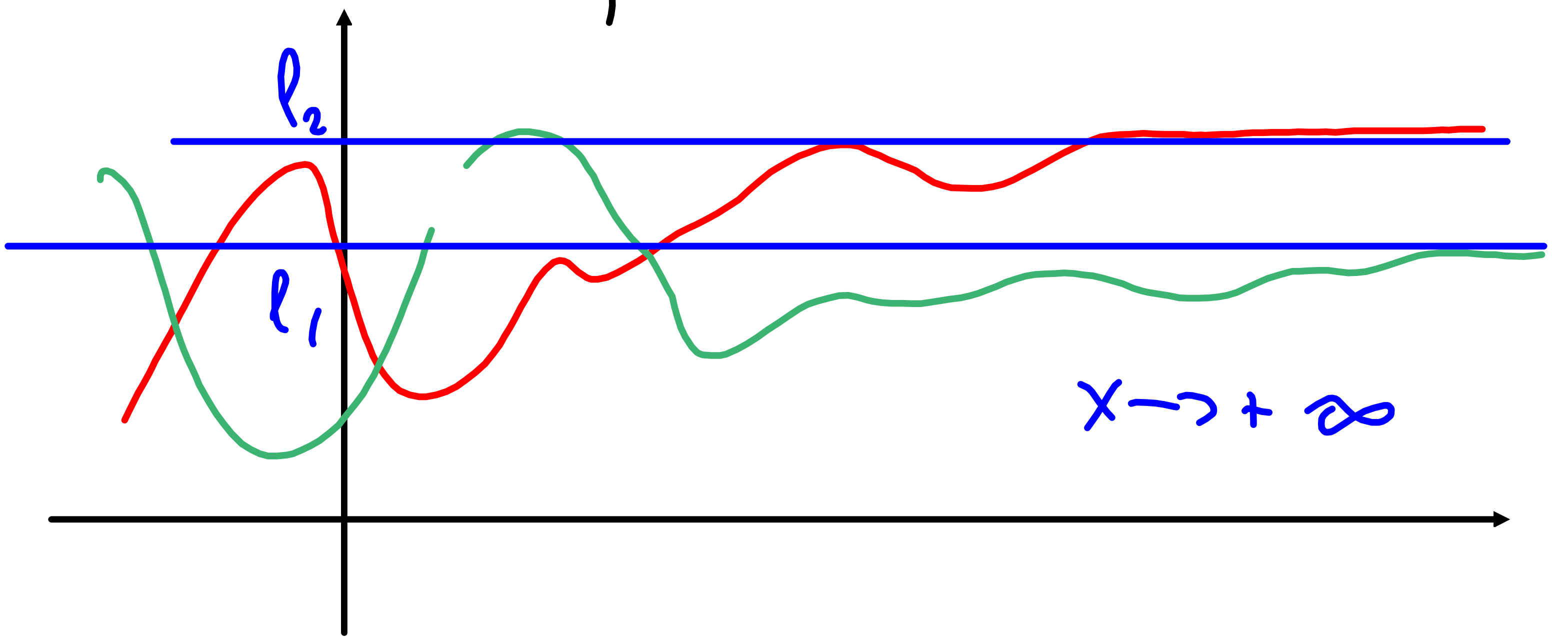
Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad , \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

e se $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$$x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \leq g(x)$$

Allora $\quad \ell_1 \leq \ell_2$.



Detto in altri termini la disuguaglianza passa al limite.

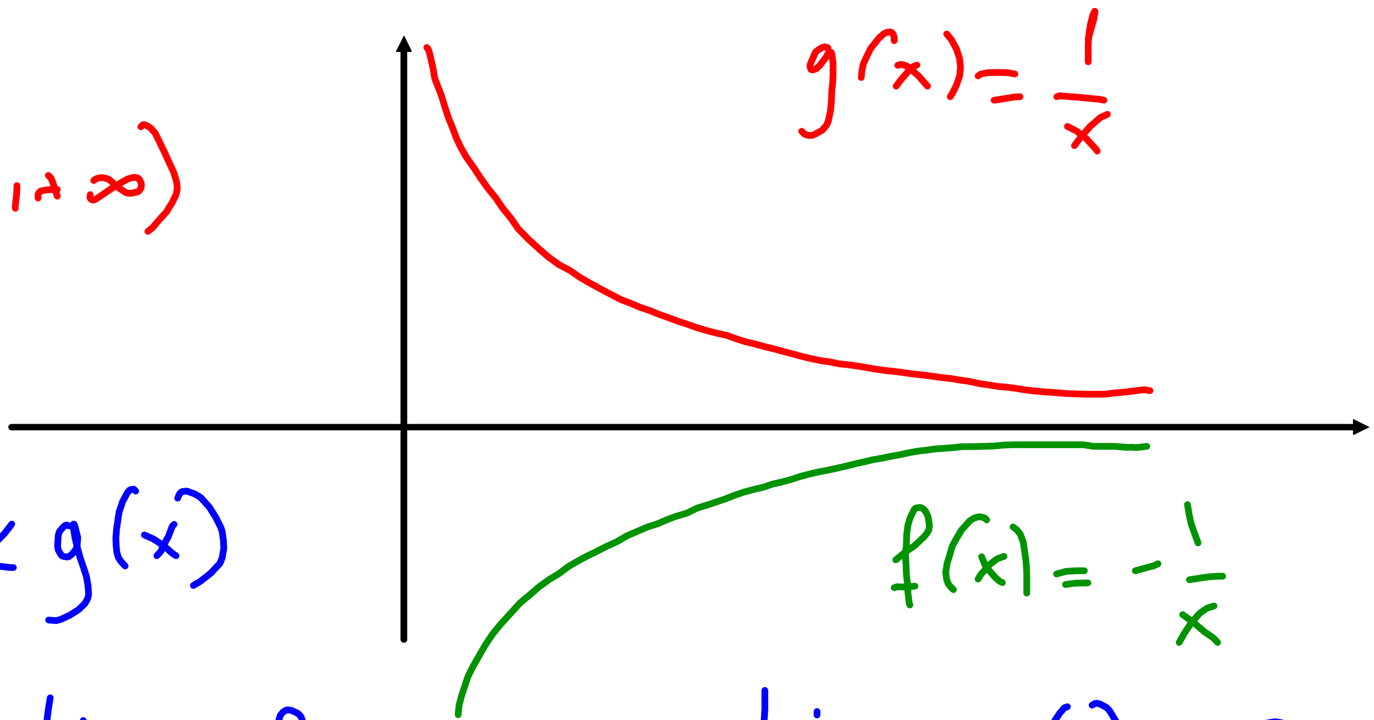
$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

E se fosse

$$f(x) < g(x) \quad ?$$

$A = (0, +\infty)$



$f(x) < g(x)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \, , \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Le disuguaglianze strette potrebbero diventare deboli passando al limite. Cioè

$$f(x) < g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Teorema dei Carabinieri.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

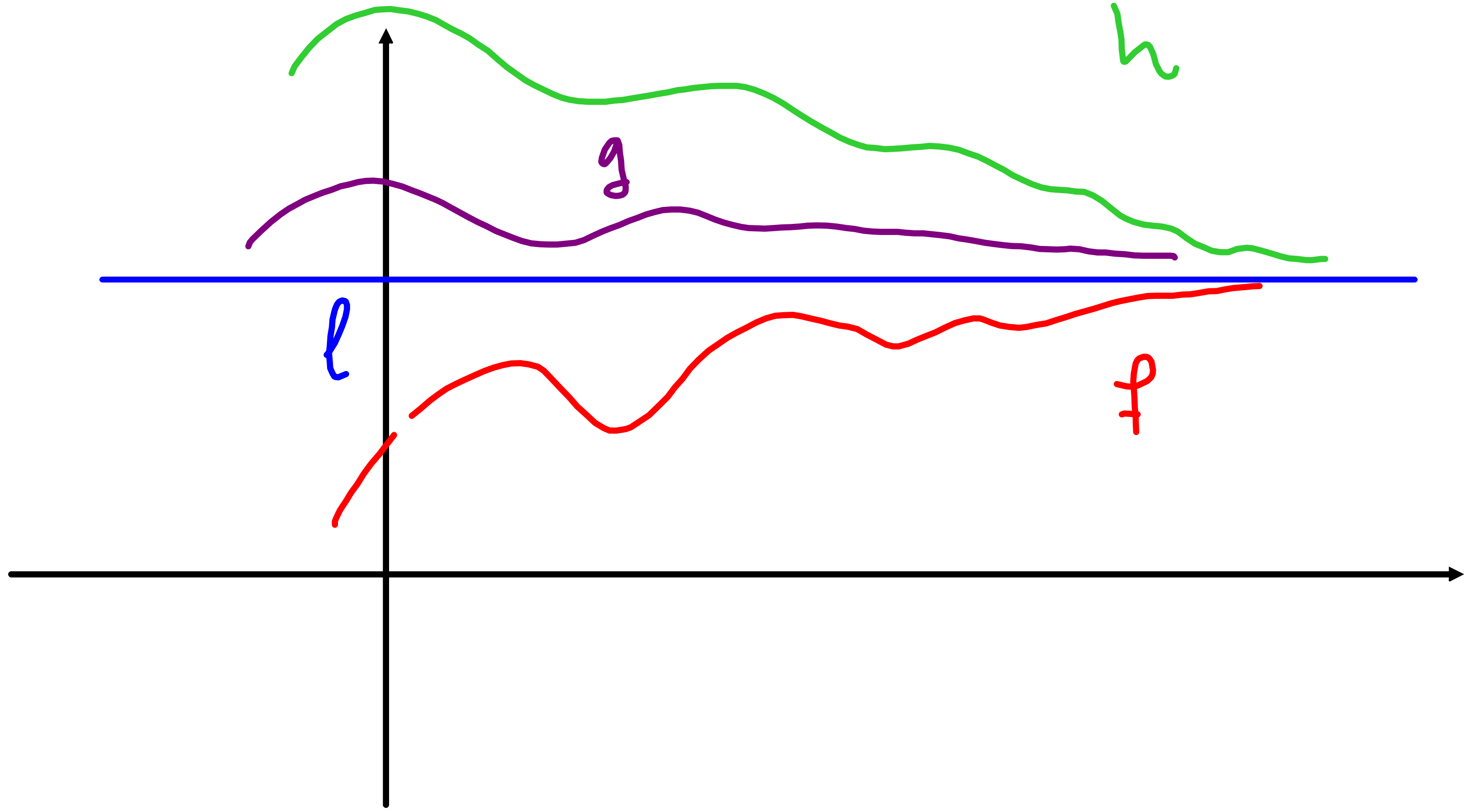
$f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$$

e se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$


h
g
ℓ
f

Es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x}$$

$x > 0$

$$\underset{f}{\frac{1}{x}} = \frac{2-1}{x} \leq \underset{g}{\frac{2+\sin x}{x}} \leq \frac{2+1}{x} = \underset{h}{\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \,, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Teorema (somma e prodotto di limiti).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) se ha senso $\ell_1 + \ell_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

2) se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 .$$

Vuol dire che non vale nei casi
di indeterminazione

$$(+\infty)+(-\infty)$$

$$(-\infty)+(+\infty)$$

$$(+\infty)\cdot 0$$

$$(-\infty)\cdot 0$$

cioè il teorema non vi dice
niente.

Esempi di indeterminazione.

1) $f(x) = 2x \qquad g(x) = -x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) = ?$

$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} 2x - x = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$

2) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ $\quad g(x) = -x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;,\; \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

$$(+\infty) + (-\infty) = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2} - x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

Es: $0 \cdot \infty$?

$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

Es: $0 \cdot \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = x^2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$

ma in questo caso

$f \cdot g = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x \longrightarrow +\infty$

Prop: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

e $\ell \in \mathbb{R}$ (cioè è finito)

allora f è limitata in un

intorno di x_0 cioè

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ e $\exists\, M > 0$ t.c.

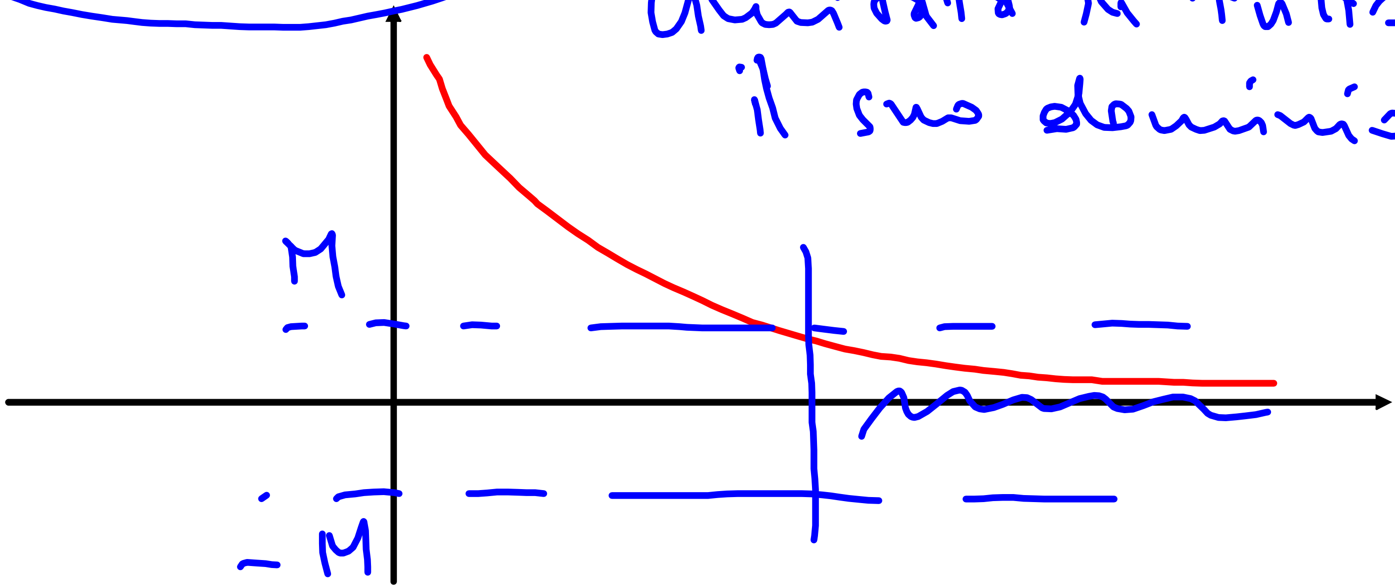
$x \in U \cap dom(f) \setminus \{x_0\}$

$\Longrightarrow \quad |f(x)| < M$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

è limitata in un intorno di $+\infty$.

f non è limitata in tutto il suo dominio



Oss: Se f è limitata inferiormente e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$$

<u>Es</u> : $f(x) = \sin x$

$g(x) = x$

$\nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$

ma $\sin x \geq -1$ quindi

f è limitata inferiormente

$\lim_{x \to \infty} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} x + \sin x = +\infty$