<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a \ \forall a \in A$

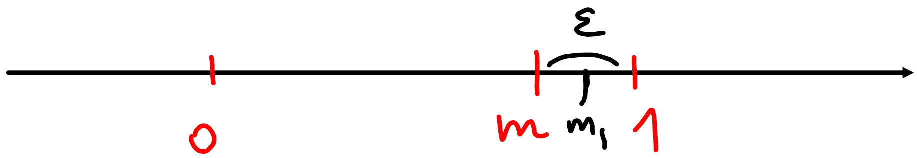
e $m \in A$.

<u>Es</u>: $A = [0,1]$

$\max(A) = 1$

$B = [0,1)$

B non ha massimo perché



se m fosse il massimo di B

$\Rightarrow m \in B \Rightarrow m < 1$

poniamo $\varepsilon = 1 - m > 0$

sia $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2} > m$

$m_1 \in B \Rightarrow m$ non è il

massimo di B.

$\Rightarrow B$ non ha max.

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a \quad \forall a \in A$.

Con $\mathcal{M}_A = \{\text{maggioranti di } A\}$

Es: $A = [0,1]$

$2 \in \mathcal{M}_A$ è un maggiorante

$1 \in \mathcal{M}_A$, $\frac{1}{2} \notin \mathcal{M}_A$

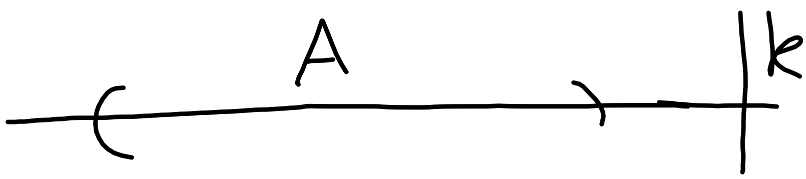
Oss: Se esiste un maggior. ne esistono infiniti.

Infatti se $m \in \mathcal{M}_A$

allora ogni $k \geq m$
è ancora un maggiorante.

<u>Es</u>: $A = \mathbb{R}$ non ha
maggioranti
$A = [3, +\infty)$ non ha
maggioranti

Def: Se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ l'insieme A si dice limitato superiormente.

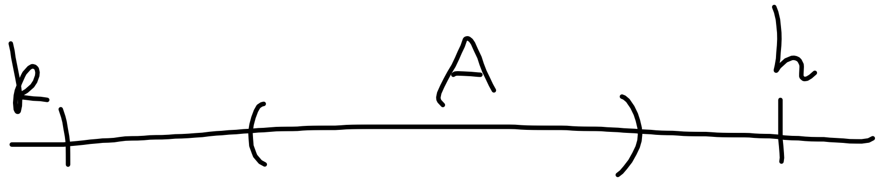


Definizioni analoghe per minoranti e minimo di un insieme - e insiemi inferiormente limitati.

Def: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
se A è sia superiormente che inferiormente limitato $\Rightarrow$ A si dice limitato.

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, k, h \in \mathbb{R}$ t.c.

$$k \leq a \leq h \quad \forall a \in A.$$



<u>Teorema</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

A superiormente limitato.

Allora esiste il minimo di $\mathcal{M}_A$.

<u>Def</u>: Il minimo dei maggioranti di A si dice estremo superiore di A e si scrive

$$\sup(A).$$

Se A è superiormente limitato $\Rightarrow$ ha un estremo superiore.

Es: $A = [0, 1)$

$$\mathcal{M}_A = [1, +\infty)$$

$$\sup(A) = 1.$$

$$B = [0,1]$$

$$\mathcal{M}_B = [1, +\infty)$$

$$\sup(B) = 1$$

Oss: Se $\exists \max(A)$

$\Rightarrow \max(A) = \sup(A)$.

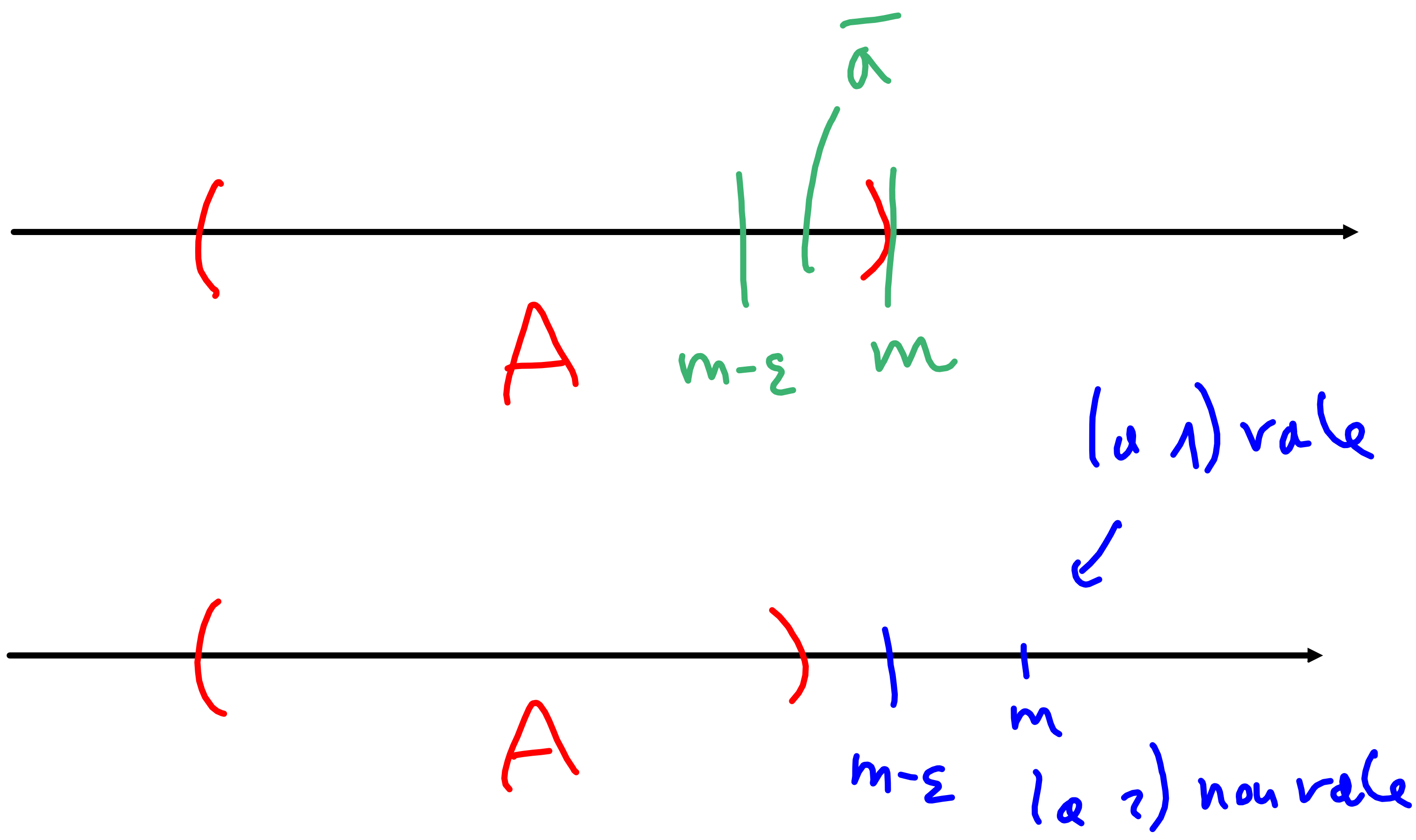
Def.: Se A non è superiormente limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty$

Oss: $A \neq \emptyset$ superiorm. limitato. $m = \sup(A)$ se e solo se valgono

1) $a \leq m \quad \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A$ t.c.

$$\bar{a} > m - \varepsilon$$



A
m-ε
m
(a 1) vale
A
m-ε
m
(a 2) non vale

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

quindi se $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty$$

Es: La scrittura

$\sup(A) < +\infty$ vuol

dire che A è superiorm.

limitato.

Operazioni con $\pm\infty$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora

$$x + (-\infty) = -\infty$$

2) Se $x \neq -\infty$ allora

$$x + (+\infty) = +\infty$$

3) Se $x > 0$ allora

$$x \cdot (+\infty) = +\infty$$

e $x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) se $x < 0$ allora

$$x(-\infty) = +\infty$$

$$x(+\infty) = -\infty$$

Operazioni vietate

$$(+\infty)+(-\infty)=?$$

$$0\cdot(+\infty)=?$$

$$0\cdot(-\infty)=?$$

Operazioni valide

$$(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

$$(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se

A è superiormente limitato

allora A ha massimo, se

è inferiormente limitato

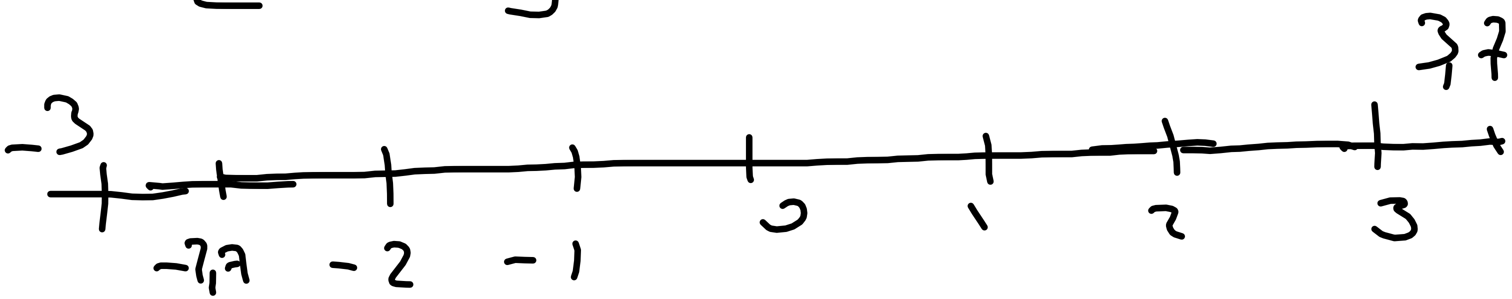
ha minimo.

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x

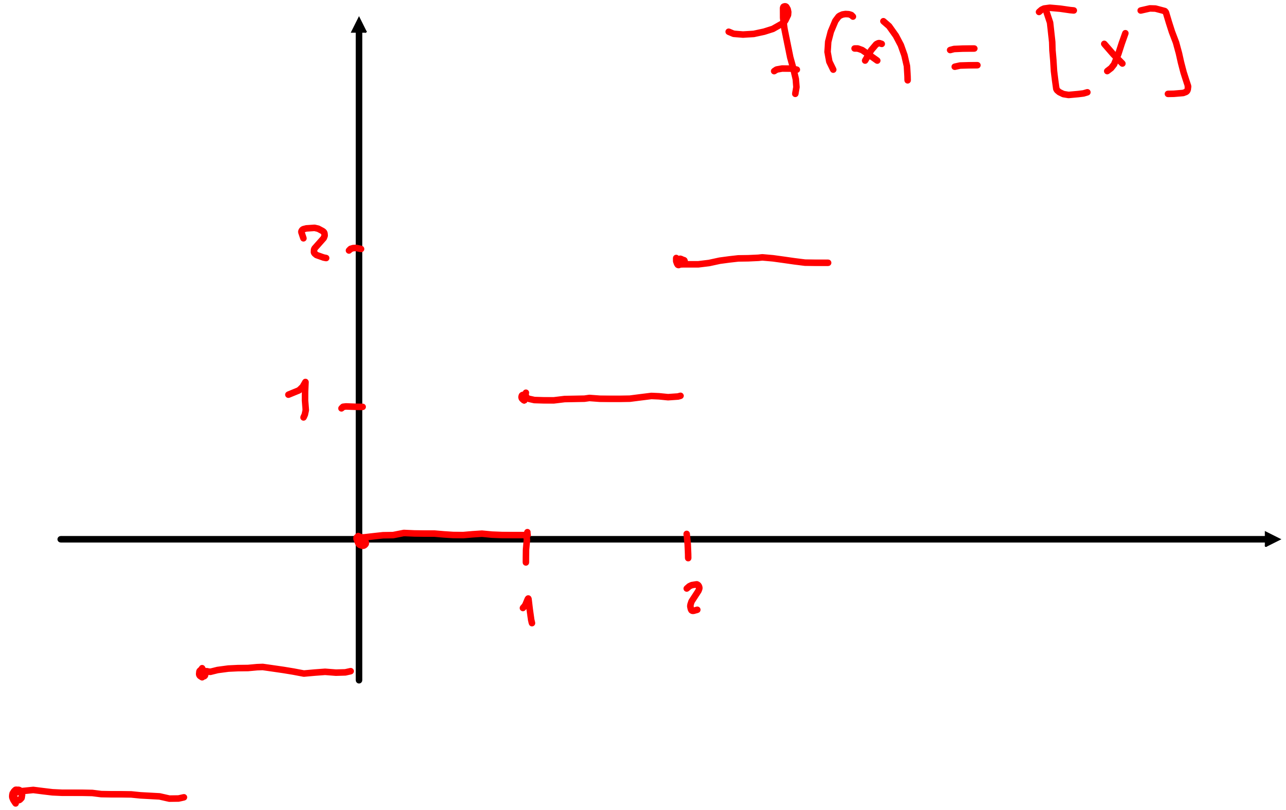
$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

$$[37/10] = 3$$

$$[-27/10] = -3$$



$f(x) = [x]$



Def: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$

a) f si dice limitata sup. se $f(A)$ è limitato sup.
(limit. inf, limitata).

b) f ha massimo se $f(A)$ ha massimo. M è il max di f se $M = \max(f(A))$.

lo stesso per $\min(f)$.

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$.

se f non è limitata superiorm.

si scrive $\sup(f) = +\infty$

inf ....

d) Se f ha massimo ogni $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = \max(f)$

si dice punto di massimo per f.

Oss: Il massimo di f è unico, il punto di massimo potrebbe non esserlo.

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$\max(f) = 1$ $\qquad$ $f(A) = [-1, 1]$

$A = \mathbb{R}$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo

$x_1 = \frac{5}{2}\pi$ è punto di massimo

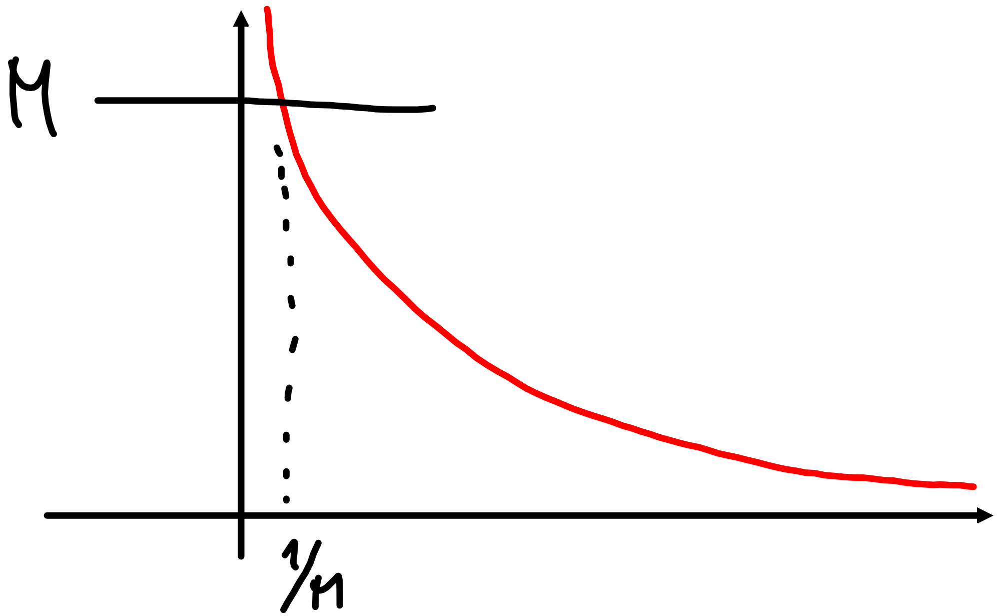
$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ è punto di massimo.

Es: $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = 0$



f non ha né max né min

Oss: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

a) Se A ha max e f è deb. crescente $\Rightarrow$ f ha max e

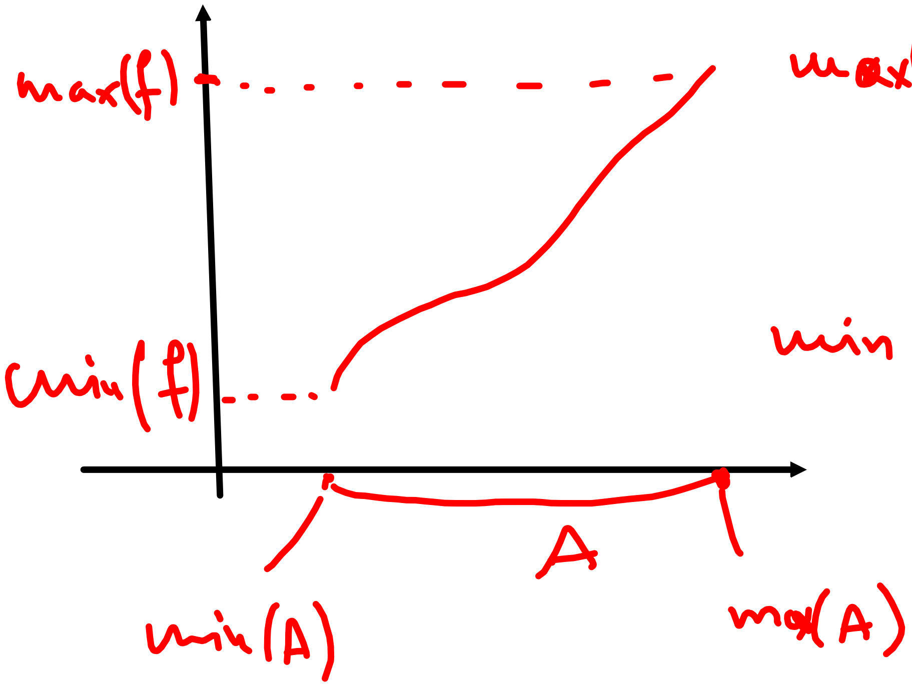
$$\max(f) = f(\max(A))$$

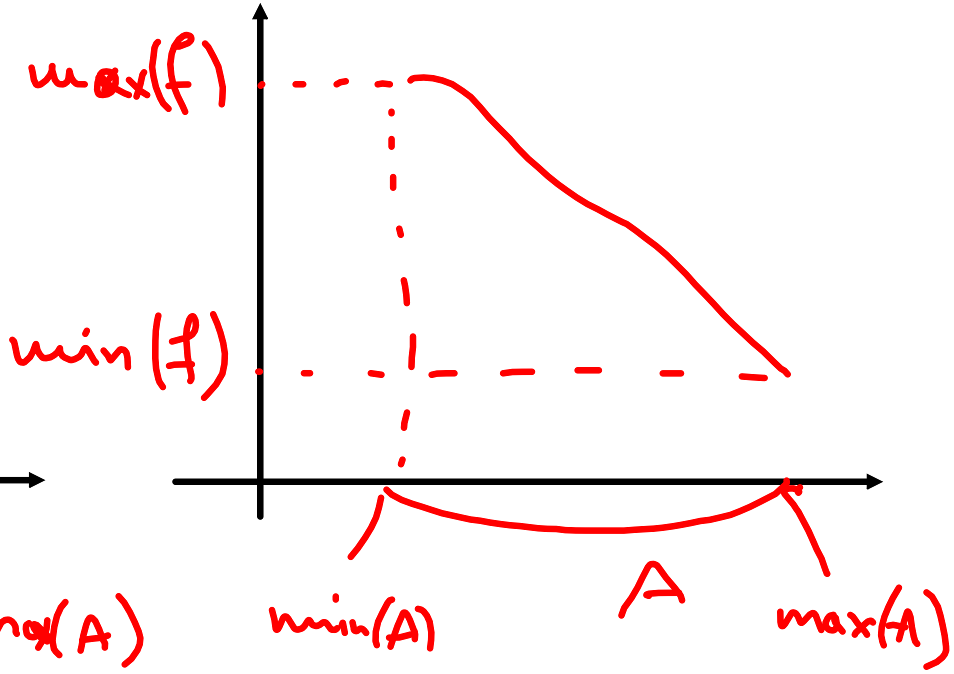
b) Se A ha minimo e f è deb. cresente $\Rightarrow$ f ha minimo e

$$\min(f) = f(\min(A))$$

c) Se A ha max e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha minimo e
$\min(f) = f(\max(A))$

d) Se A ha min e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha max e
$\max(f) = f(\min(A))$.


max(f)
min(f)
A
min(A)
max(A)


max(f)
min(f)
A
min(A)
max(A)

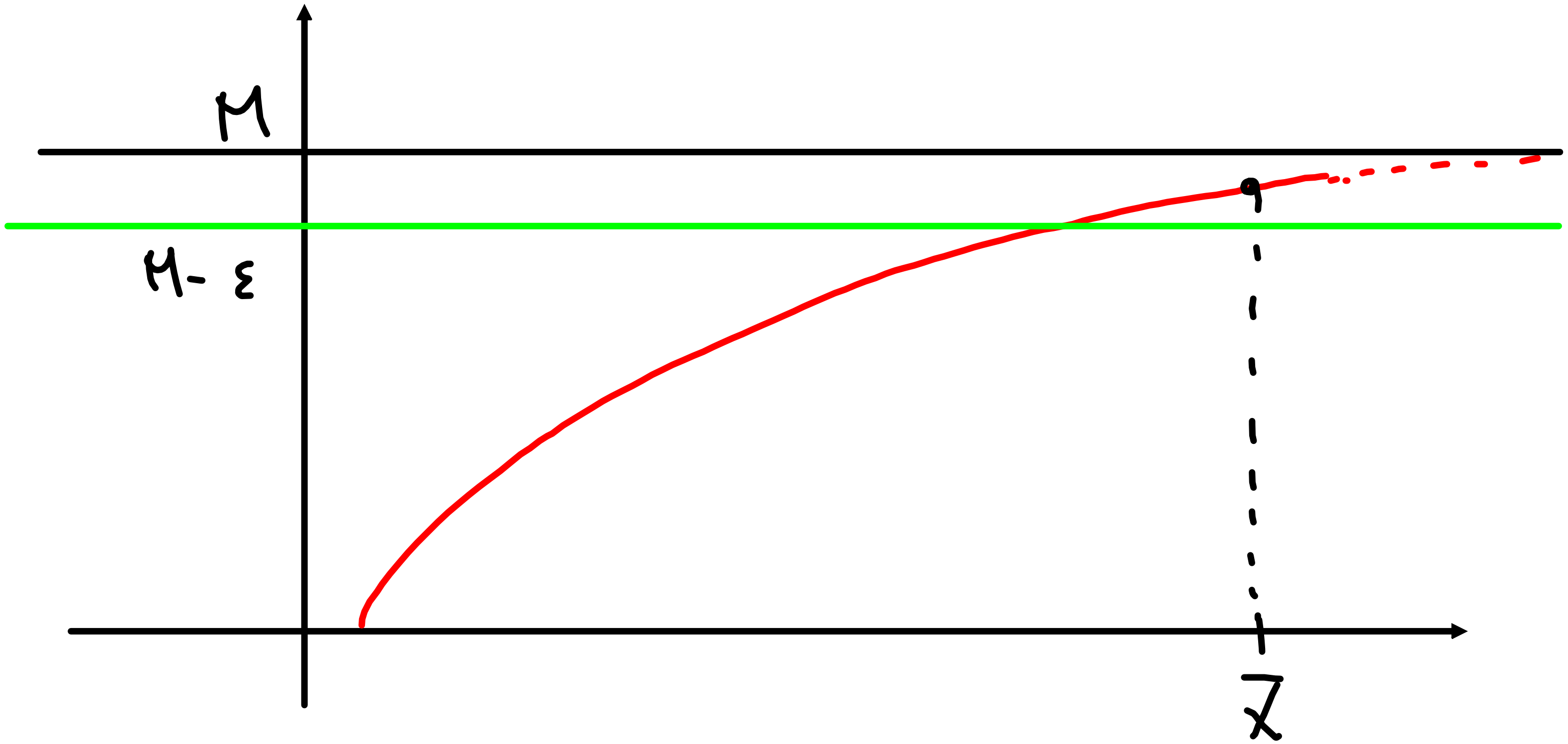
Oss: $f : A \to \mathbb{R}$

$M = \sup(f)$ se e solo se valgono

1) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{x} \in A$ t.c.

$$f(\bar{x}) > M - \varepsilon$$



M
M- ε
Z

Valore assoluto

Def: $\forall x \in \mathbb{R}$ si dica valore assoluto di x

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Proprietà.

1) $x \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$. -

$|x| = -x$ se $x \leq 0$. - .

3) $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4) $|x| = 0 \iff x = 0$

5) $|-x| = |x|$

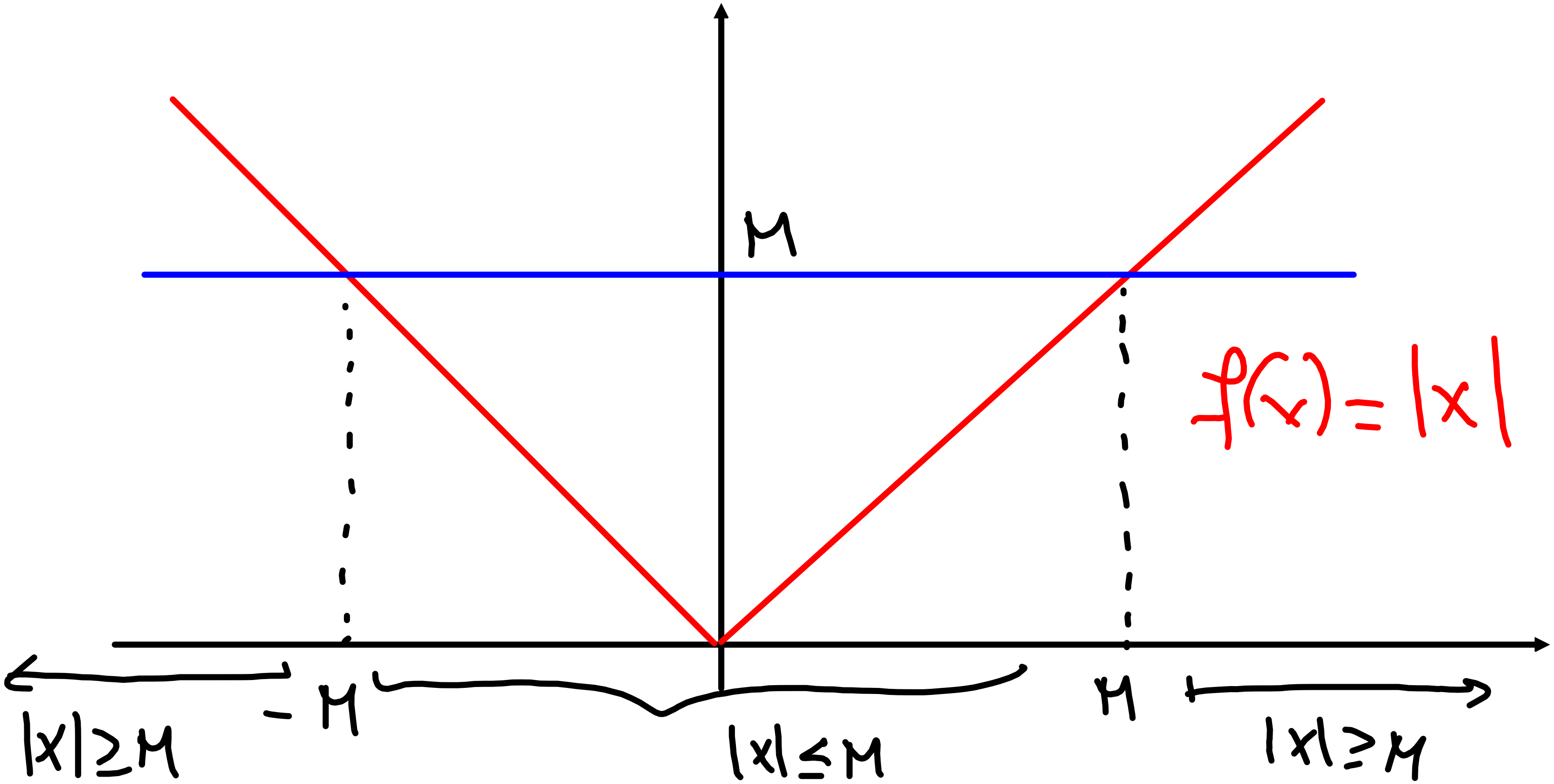
6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq M$ se e solo se

$$-M \leq X \leq M$$

8) $|x| \geq M$ se e solo se

$X \geq M$ oppure $X \leq -M$



$$|x| \geq M \iff x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$$

$$M \geq 0$$

Se $M < 0$

$|x| \geq M$? $x \in \mathbb{R}$

$|x| < -3$ $\emptyset$

Disugnaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$$

Oss: $|a+b+c| \le |a+b| + |c|$

$\le |a| + |b| + |c|$