carlo.romano.grisanti@unipi.it

pagine.dm.unipi.it/grisanti

ricevimento

Venerdì 15:30 - 18:30 su appuntamento email

Acerbi - Buttazzo

Analisi Matematica ABC

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ numeri naturali
interi positivi
compreso $\emptyset$

$\mathbb{Z}$ numeri interi
positivi e negativi

$\mathbb{Q}$ razionali

"frazioni"

$$\frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{Z}$$

$$q \neq 0$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$\mathbb{R}$ reali

$\mathbb{Q}$ + molto altro

es. $\sqrt{2}$, π, e ....

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>dim</u> : per assurdo supponiamo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ allora $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

posso supporre
p e q non entrambi
pari

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

quindi p^2 è pari

$\Rightarrow$ p è pari

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c

$$p = 2m$$

$$\Rightarrow p^2 = 4m^2$$

$$p^2 = 2q^2$$

$$p^2 = 4m^2$$

$$\cancel{2}q^2 = \cancel{4}m^2$$

$$q^2 = 2m^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari

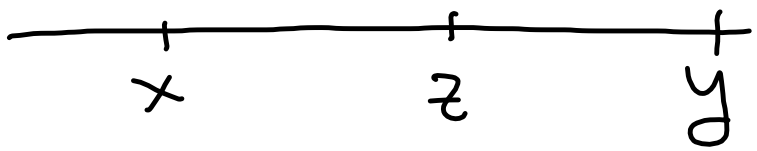
$\Rightarrow q$ è pari

assurdo.

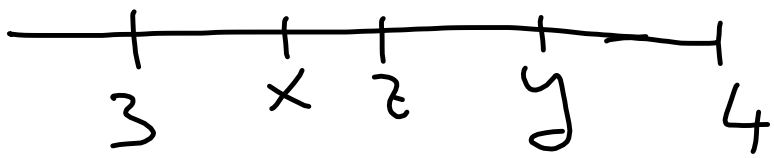
$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$

Intervalli di $\mathbb{R}$

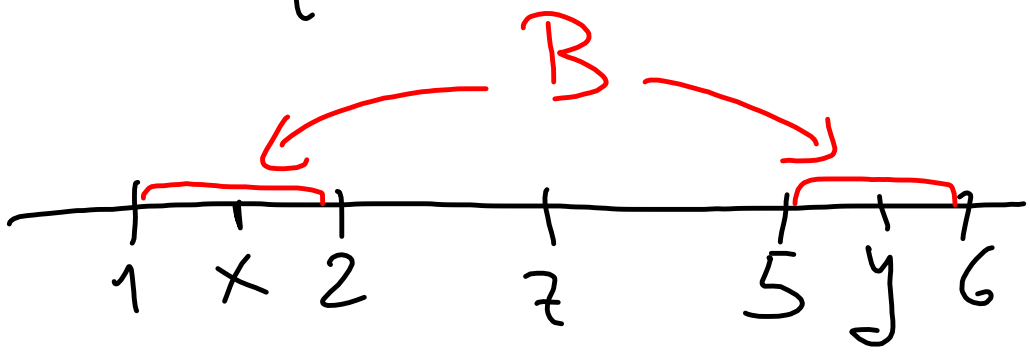
<u>Def</u>: $I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall x, y \in I$ con $x < y$, dato z : $x < z < y$ risulta $z \in I$.



$$A = \{ x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4 \}$$



$$B = \{ x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2 \} \cup \{ x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 6 \}$$



$x = \frac{3}{2}$ $\quad$ $y = \frac{11}{2}$

$z = 3$ $\quad$ $x < z < y$

$z \notin B$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

non è un intervallo

Notazione

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

intervallo chiuso

$$(a,b) =]a,b[=$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

intervallo aperto

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

semiretta chiusa

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

semiretta aperta

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

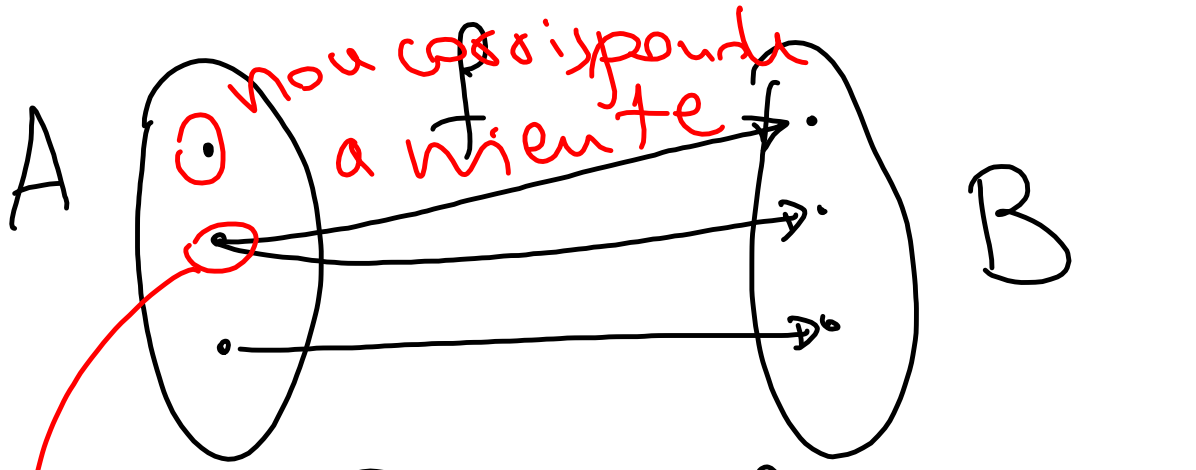
$$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$$

Funzioni

Terna di ogetti
due insiemi
A = dominio
B = codominio
f legge

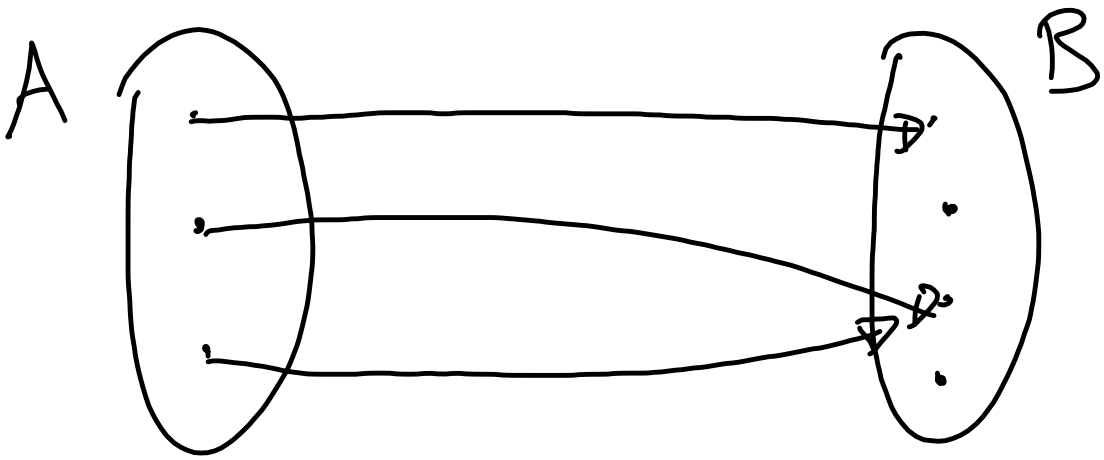
$$f : A \longrightarrow B$$

f mette in corrispond.
<u>ogni</u> elemento di A
con uno e un solo
elemento di B.



non è una funzione

corrisponde a due elementi



è una funzione

Grafico di f

$$\text{graph}(f) = \{(a,b) \in A \times B \text{ t.c. } b = f(a)\}$$

Es: $A, B = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

$$(3,6) \in \text{graph}(f)$$

$$6 = f(3) = 2 \cdot 3$$

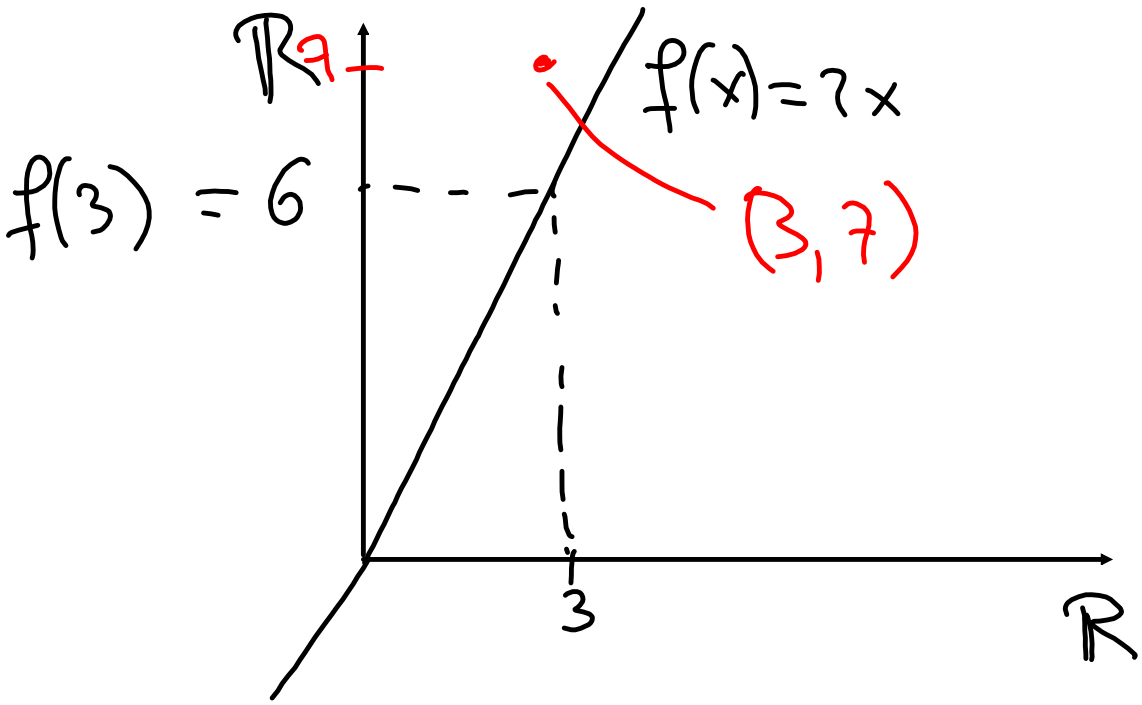
$$(3,7) \notin \text{graph}(f)$$

$$7 \neq f(3) = 6$$

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

piano Euclideo



Def: $f: A \to B$

$D \subset A$

$f(D) = \{ f(a) : a \in D \}$

si dice <u>immagine</u> di D attraverso f

$f(D) \subset B$

<u>Es</u>: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$D = [1,3]$

$\underline{f(D) = [1,9]}$

$Imm(f) = f(A)$

Immagine di f

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$Imm(f) = [0, +\infty)$

Def.: $f: A \to B$
si dice <u>iniettiva</u>
se $\forall\, a_1, a_2 \in A$ con
$a_1 \neq a_2$ risulta
$$f(a_1) \neq f(a_2)$$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = x^2$$

$a_1 = -3$, $a_2 = 3$
$$f(a_1) = 9 = f(a_2)$$
non è iniettiva

$g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$$g(x) = x^2$$
g è iniettiva

Def.: $f: A \to B$ si dice <u>surgettiva</u> se $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A$ t.c. $f(a) = b$

Es.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

non è surgettiva

$$b = -4$$

$$\nexists\, a \in \mathbb{R} : a^2 = -4$$

Oss.: $f: A \to B$ è surgettiva se e solo se

$$\mathrm{Imm}(f) = B$$

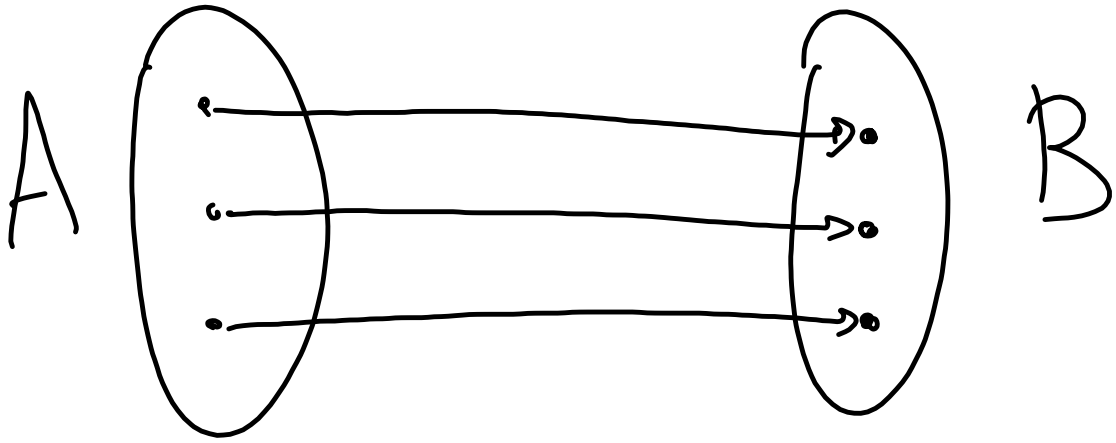
Es: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$

è surgettiva.

Def: $f: A \to B$

se è f è sia iniettiva che surgettiva si dice <u>biunivoca</u> o invertibile.



Posso costruire
la funzione inversa

$f^{-1} : B \longrightarrow A$

$f^{-1}(b) = a$ se e solo
se $f(a) = b$

esiste almeno un $a \in A$
perché f è surgettiva
ne esiste <u>solo</u> uno
perché f è iniettiva

Es: $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

$f(x)=x^2$

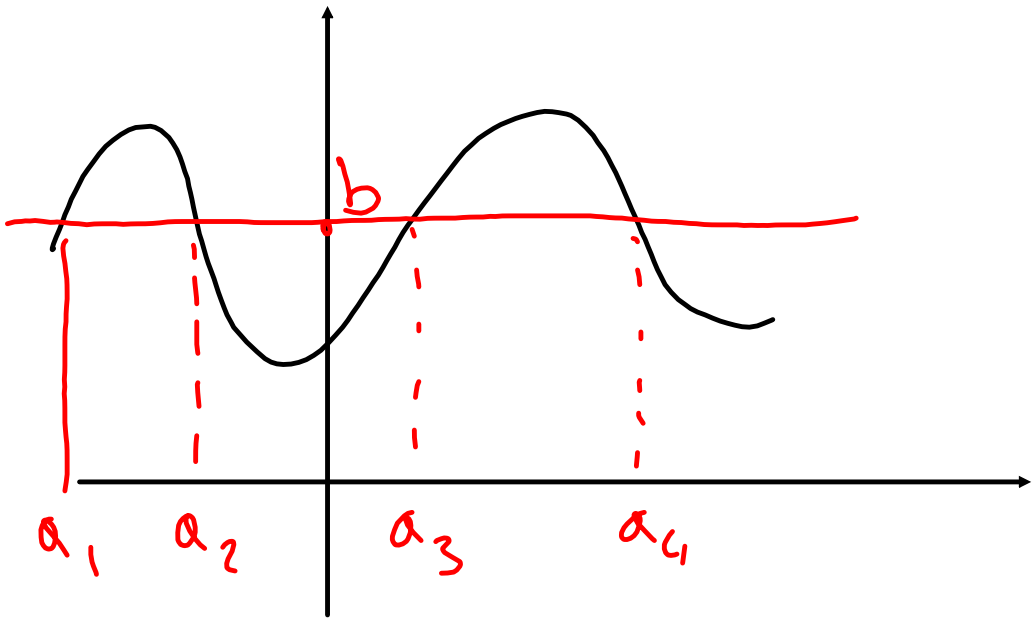
è invertibile.

$f^{-1}(y)=\sqrt{y}$.

$f^{-1}:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$

$\sqrt{4}=2$

$\sqrt{x}\geq 0$ <u>sempre</u>



$$f(a_1) = f(a_2) = \dots f(a_4) = b$$

f non è iniettiva