Equazione completa
(non omogenea)

$$y'' + ay' + by = f \quad (*)$$

Supponiamo di avere una soluzione $\bar{y}$ di $(*)$ e di avere y_0 soluzione dell'omogenea cioè

$$y_0'' + a y_0' + b y_0 = 0$$

Poniamo $y = \bar{y} + y_0$

$$\Rightarrow \quad y'' + a y' + b y =$$

$$(\bar{y}'' + y_0'') + a(\bar{y}' + y_0') + b(\bar{y} + y_0) =$$

$$= \underbrace{(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y})}_{f} + \underbrace{(y_0'' + a y_0' + b y_0)}_{0} =$$

$= f + 0 = f$

quindi y risolve l'equazione completa.

Viceversa. Se $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ sono due soluzioni dell'eq. completa

$\Rightarrow$ pongo $y = \bar{y} - \tilde{y}$

$$y'' + ay' + by =$$

$$= (\bar{y}'' - \tilde{y}'') + a(\bar{y}' - \tilde{y}') + b(\bar{y} - \tilde{y}) =$$

$$= (\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) - (\tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y}) =$$

$$= f - f = 0$$

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono del tipo

$$y(x) = y_0 + \bar{y}$$

dove y_0 risolve l'omogenea

e $\bar{y}$ risolve la completa

$\bar{y}$ si dice <u>soluzione particolare</u>

Come si trova $\bar{y}$?

<u>Metodo di somiglianza</u>

si applica a f di un tipo particolare

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, p, q polinomi.

se $\alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow f =$ polinomio

se $\beta = 0$, $p = 1 \Rightarrow f =$ esponenz.

se $\alpha = 0$, $p = 1, q = 1 \Rightarrow f =$ trigonom.

Si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = x^m e^{\alpha x}\left[r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right]$$

r, s sono polinomi e

$$\text{grado}(r) = \text{grado}(s) = \max\{\text{grado}(p), \text{gr}(q)\}$$

m è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ come radice del polinomio caratteristico.

Se $\alpha+i\beta$ non è radice

allora $m=0$.

Oss.: $(\lambda-1)^2$ ha radice

$\lambda=1$ con molteplicità 2.

Es: $y'' + 4y = \sin x$

1) risolvo l'omogenea

$$y'' + 4y = 0$$

polin. caratt. $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

soluzione omogenea.

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right]$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1 \qquad p \equiv 0$$

$$q(x) = 1 \qquad \text{grado } p = \text{grado } q = 0$$

$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i$

i non è radice del polin. caratteristico $\Rightarrow$ $m = 0$.

Cerco una soluzione

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \left[r(x) \cos(\beta x) + s(x) \sin(\beta x) \right]$$

grado (r) = grado $(s) = 0$

$$\bar{y} = e^{0 \cdot x} \cdot x^{0} \left[\underbrace{A}_{r(x)} \cos x + \underbrace{B}_{s(x)} \sin x \right]$$

$$= A \cos x + B \sin x$$

devo determinare A e B.

Calcolo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$ e li sostituisco nell'equazione completa.

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

eq. completa

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin x$$

$$\underbrace{\left(-A\cos x - B\sin x\right)}_{\bar{y}''} + 4\overbrace{\left(A\cos x + B\sin x\right)}^{\bar{y}}$$

$$= \sin x$$

$$3A\cos x + 3B\sin x = 1\sin x + 0\cdot\cos x$$

uguaglio i coeff. di $\cos x$

e di $\sin x$.

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{3}\sin x = (A\cos x + B\sin x)$$

$\Rightarrow$ soluzione è

$$y = y_0 + \bar{y} =$$

$$= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x$$

Es: $y'' + 4y = \sin(2x)$

omogenea $y'' + 4y = 0$

$\lambda = \pm 2i$

$y_0 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

$f(x) = \sin(2x)$

$\alpha = 0$, $p \equiv 0$, $q \equiv 1$, $\beta = 2$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 2 = 2i$$

$2i$ è radice del polinomio caratteristico con molteplic. 1

$$\Longrightarrow \quad m = 1 .$$

$$\Longrightarrow \bar{y}(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \left(r(x) \cos(\beta x) + s(x) \sin(\beta x) \right)$$

$$= x \left(A \cos(2x) + B \sin(2x) \right)$$

$$\bar{y}' = A\cos(2x) + B\sin(2x) +$$
$$+\ x\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right)$$

$$\bar{y}'' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) +$$
$$\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right) +$$
$$+\ x\left(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)\right)$$

sostituisco in

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin(2x)$$

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - \cancel{4Ax\cos(2x)}$$

$$-\cancel{4Bx\sin(2x)} +$$

$$+4\left(\cancel{Ax\cos(2x)} + \cancel{Bx\sin(2x)}\right) = \sin(2x)$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{4} x \cos(2x)$$

$$\bar{y} = A x \cos(2x) + B x \sin(2x)$$

$$A = -\frac{1}{4} \qquad B = 0$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

risolve

$$y'' + 4y' = \sin(2x)$$

Es: $\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{e}{2} \end{cases}$

omogenea $\quad y'' - y = 0$

pol. caratt. $\quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1$

soluzione omogenea

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$$

Soluz. particolare.

$$f(x) = e^{x}$$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0, \quad p \equiv 1 \quad \text{grado}(p) = 0$

$\alpha + i\beta = 1$ è radice del pol. caratt.

$$\boxed{m = 1}$$

$$\bar{y}(x) = x A e^{x}$$

$$\bar{y}'(x) = A e^{x} + A x e^{x}$$

$$\bar{y}''(x) = A e^{x} + A e^{x} + A x e^{x}$$

$$= 2 A e^{x} + A x e^{x}$$

sostituisco in $\bar{y}'' - \bar{y} = e^{x}$

$$\underbrace{2Ae^x + A\cancel{xe^x}}_{\bar{y}''} - \underbrace{\cancel{Axe^x}}_{\bar{y}} = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x e^x$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x$$

soluzione generale dell'equazione completa.

Devo trovare c_1 e c_2.

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^x + \frac{x}{2} e^x$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e + \frac{e}{2}$$

$$y'(1) = -c_1 e^{-1} + c_2 e + \frac{e}{2} + \frac{e}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{e} + c_2 \cdot e + \dfrac{e}{2} = 0 \\ -\dfrac{c_1}{e} + c_2 e + e = \dfrac{e}{2} \end{cases}$$

sommo le equazioni

$$2c_2 e + \frac{3}{2} e = \frac{e}{2}$$

$$2c_2 e = -e \qquad c_2 = -\frac{e}{2e} = -\frac{1}{2}$$

sostituisco nella prima equazione

$$\frac{c_1}{e} - \cancel{\frac{e}{2}} + \cancel{\frac{e}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{e} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} x e^x .$$

soluzione del problema di Cauchy.

Principio di sovrapposizione

$$y'' + ay' + by = f_1 + f_2$$

se $\bar{y}_1$ è soluzione particolare di

$$y'' + ay' + by = f_1$$

e se $\bar{y}_2$ è soluzione particolare

di $y'' + ay' + by = f_2$

allora $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluzione

di $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

Es: $$y'' + y' - 2y = \underbrace{x}_{f_1} \underbrace{- 3\sin x + \cos x}_{f_2}$$

omogenea

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\[2ex] \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ omogenea.

soluz. particolare di

$y'' + y' - 2y = x$

$f_1(x) = x \qquad \alpha = 0, \ \beta = 0$

$\alpha + i\beta = 0$ non è radice

del polin. caratt. $\Rightarrow m = 0$.

$p(x) = x \Rightarrow \text{grado}(p) = 1$

$$\Rightarrow \bar{y}_1(x) = Ax + B$$ polinomio di grado 1.

$$\bar{y}_1' = A \quad , \quad \bar{y}_1'' = 0$$

sostituisco in

$$y'' + y' - 2y = x$$

$$0 + A - 2(Ax + B) = x$$

$$A - 2B - 2Ax = x$$

$$\begin{cases} A - 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \qquad A = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - 2B = 0 \qquad -\frac{1}{2} = 2B \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

cerco soluz. particolare di

$$y'' + y' - 2y = -3\sin x + \cos x$$

$$f_2(x) = -3\sin x + \cos x$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1 \qquad p(x) = -3 \quad q(x) = 1.$$

$$\text{grado}(p) = \text{grado}(q) = 0$$

$\alpha + i\beta = i$ non è radice del polinom. caratt. $\rightarrow m = 0.$

$$\Rightarrow \bar{y}_2(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$\bar{y}_2' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}_2'' = -A\cos x - B\sin x$$

sostituisco

$$-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x)$$

$$-2(A\cos x + B\sin x) = -3\sin x + \cos x$$

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -3B - A = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1 + 3A \\ -3(1+3A) - A = -3 \end{cases}$$

$$\cancel{-3} - 9A - A = \cancel{-3} \Rightarrow A = 0$$

$$B = 1$$

$$\bar{y}_2 = \sin x$$

soluzione completa

$$y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 =$$

$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \sin x$$