$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^2}{2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

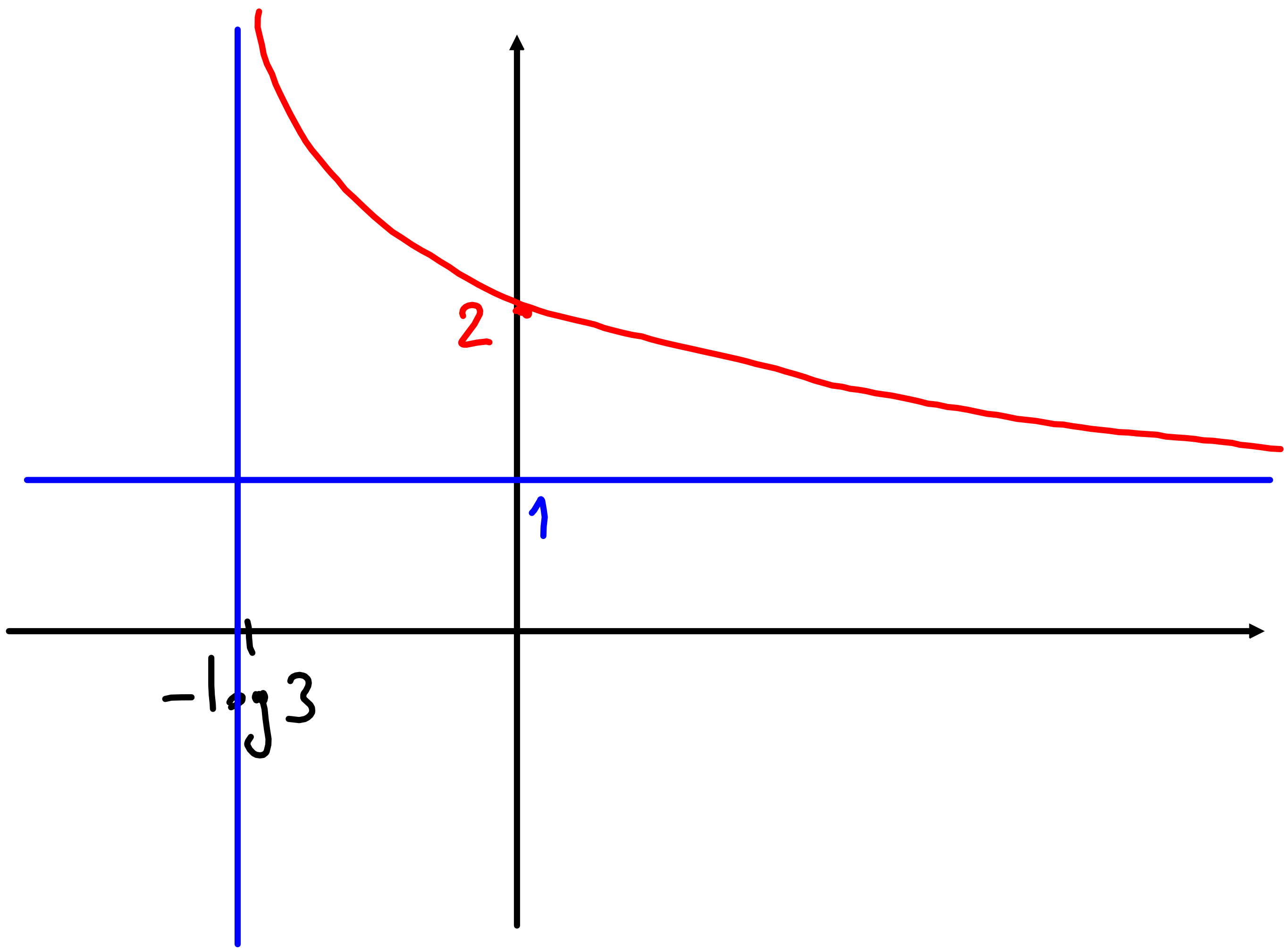
$$y(0) = \frac{1+3e^0}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y(x) = \frac{1+3e^x}{3e^x-1}$$

$$3e^x - 1 \neq 0 \qquad 3e^x \neq 1$$

$$e^x \neq \frac{1}{3} \qquad x \neq -\log 3$$

dic 2-08:50



dic 2-09:18

il dominio della soluzione non è

$\mathbb{R} \setminus \{-\log 3\}$

ma è $(-\log 3, +\infty)$

perché è un <u>intervallo</u> che deve contenere il punto $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to -\log 3^+} \frac{1+3e^x}{3e^x - 1} = \frac{1+3e^{-\log 3}}{3e^{-\log 3} - 1} =$$

$$= \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+3e^x}{3e^x-1} = 1$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^2}{2} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{3+e^x}{e^x-3}$$

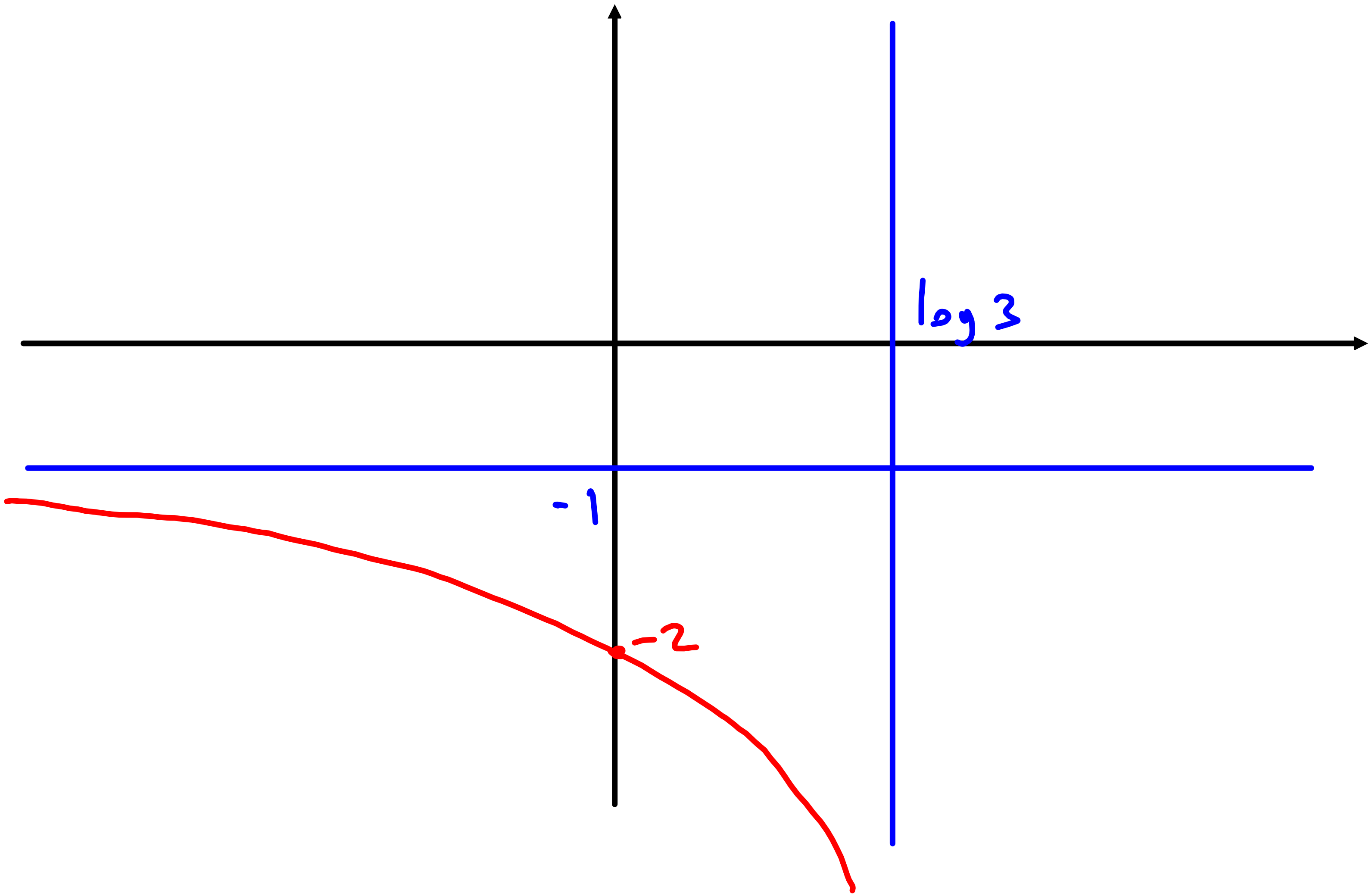
$$e^x - 3 \neq 0$$

$$e^x \neq 3 \qquad x \neq \log 3$$

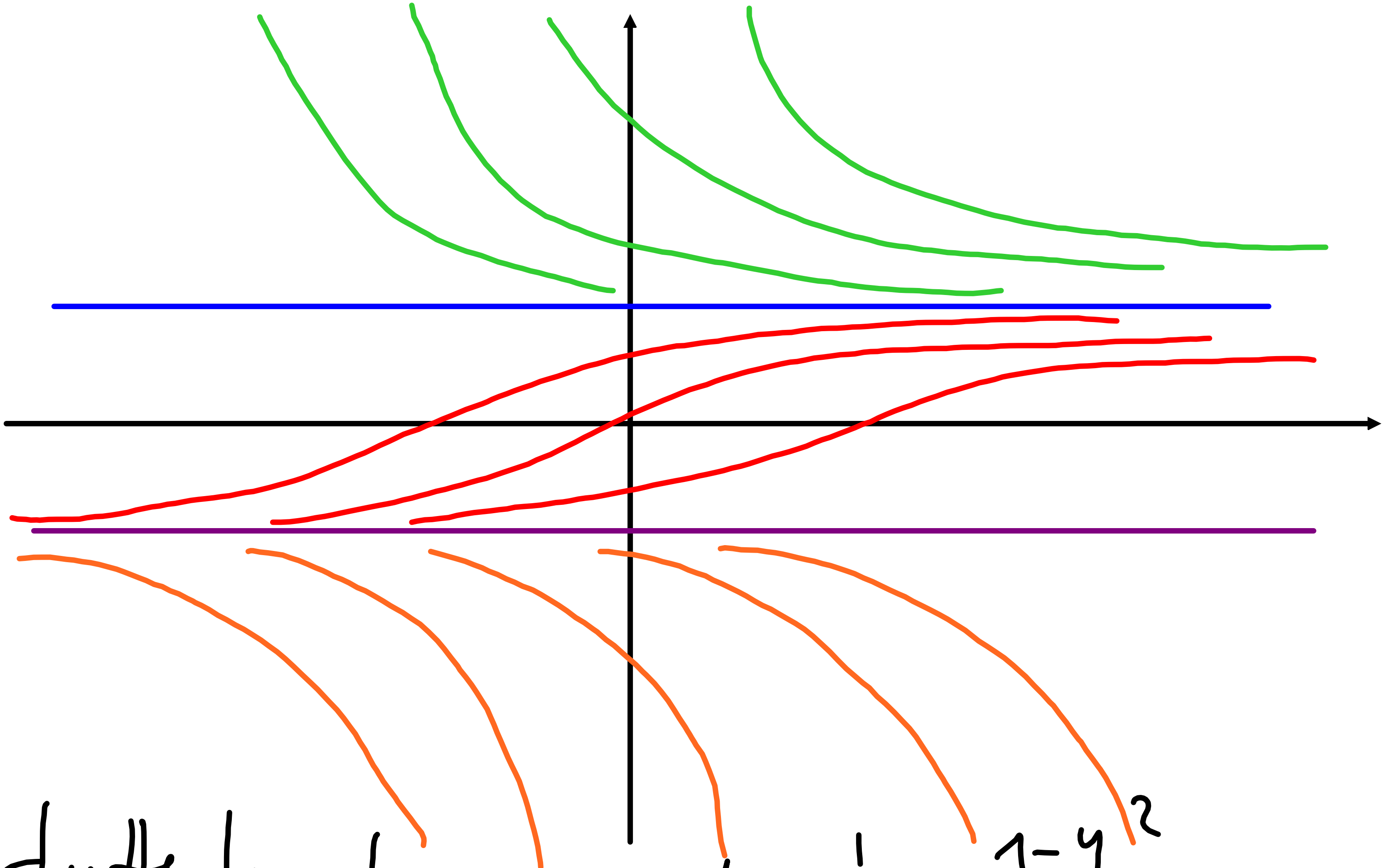
dominio è $(-\infty, \log 3)$

$$\lim_{x \to \log 3^-} \frac{3+e^x}{e^x-3} = \frac{3+3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3+e^x}{e^x-3} = \frac{3+0}{0-3} = -1$$



dic 2-09:27



tutte le soluzioni di $y' = \frac{1-y^2}{2}$.

Non unicità

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = 0 \ \forall x$ è soluzione

ce ne sono altre?

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx + c$$

$$2\sqrt{y} = x + c$$

ricavo c da $y(0) = 0$

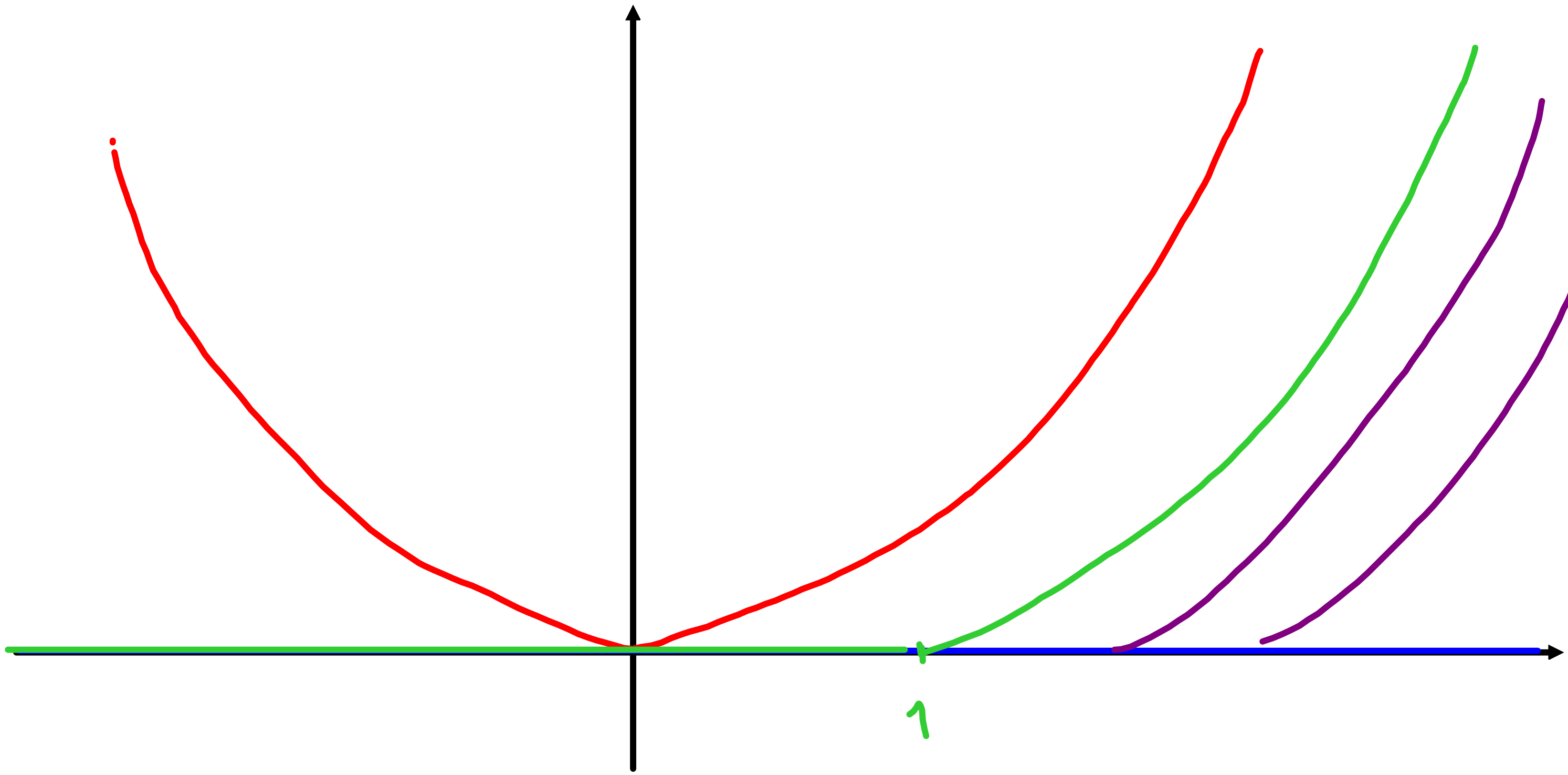
$$2 \cdot 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

dic 2-09:33

$$2\sqrt{y} = x \qquad \sqrt{y} = \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

ho due soluzioni distinte.



Fenomeno di Peano.

consideriamo la funzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{4} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

y è continua.

$y' = 0$ se $x < 1$.

$$y'(x) = \frac{2(x-1)}{4} = \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{se } x > 1.$$

dic 2-09:37

$y(x)$ è derivabile anche in $x = 1$.

y risolve l'equazione?

$$\sqrt{y} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 1 \\ \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{4}} = \dfrac{|x-1|}{2} = \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow y' = \sqrt{y} \Rightarrow$ risolve.

Rispetta la condizione $y(0) = 0$? $\boxed{\text{Sì}}$

dic 2-09:39

quindi ho una terza soluzione del problema di Cauchy.

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le c \\ \dfrac{(x-c)^2}{4} & \text{se } x \ge c \end{cases} \qquad \boxed{c > 0}$$

è soluzione del problema di Cauchy. Ho ∞ soluzioni

dic 2-09:41

$y' = \sqrt{y}$ $\qquad f(y) = \sqrt{y}$

non è di classe C^1 se $y = 0$.

$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ per $y = 0$

non è derivabile.

Non vale l'unicità.

dic 2-09:46

Equazioni differenziali lineari del 2° ordine a coeff. costanti omogenee.

$$y'' + ay' + by = 0$$

$a, b \in \mathbb{R}$ costanti

Oss: se y_1 e y_2 sono soluzioni

allora $y_1 + y_2$ è soluzione

e se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k y_1$ è soluzione.

---

come si risolvono?

provo con una funzione

tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

dic 2-09:51

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

sostituisco nell'equazione

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$\cancel{e^{\lambda x}}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad e^{\lambda x} > 0$$

dic 2-09:54

$e^{\lambda x}$ è soluzione se λ risolve

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

$\uparrow$

polinomio caratteristico dell'equaz. differenziale.

Es: $y'' - y' - 6y = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

ho trovato 2 soluzioni

$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$

Oss: Si ho 2 soluzioni y_1 e y_2 allora per qualunque scelta di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

risolve l'equazione.

Oss: Se λ_1, λ_2 sono radici del polinomio caratteristico e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ ogni soluzione dell'equazione differ. si scrive come

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

e si dice che $y_1 = e^{\lambda_1 x}$

dic 2-10:01

$y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni.

Le soluzioni

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

si dicono integrale generale dell'equazione differenziale.

Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

ha una sola radice ?

λ_0 radice unica.

$\Rightarrow e^{\lambda_0 x}$ risolve l'equazione.

Come altra soluzione

scelgo $y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$

dic 2-10:05

verifico che è soluzione.

$$y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$$

$$y_2'(x) = e^{\lambda_0 x} + x \lambda_0 e^{\lambda_0 x}$$

$$y_2''(x) = \underline{\lambda_0 e^{\lambda_0 x}} + \underline{\lambda_0 e^{\lambda_0 x}} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}$$

sostituisco in

$$y'' + a y' + b y = 0$$

dic 2-10:07

$$2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + x\lambda_0^2 e^{\lambda_0 x} +$$

$$+ a\left(e^{\lambda_0 x} + x\lambda_0 e^{\lambda_0 x}\right) + b x e^{\lambda_0 x} = 0$$

$$e^{\lambda_0 x}\left[x\left(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b\right) + 2\lambda_0 + a\right] = 0$$

$$\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b = 0$$ perchè λ_0 è radice.

$\Delta = 0$

$$\lambda_0 = \frac{-a \pm \cancel{\sqrt{a^2 - 4b}}}{2} = -\frac{a}{2}$$

dic 2-10:09

$$\Rightarrow 2\lambda_0 + a = 0$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x e^{\lambda_0 x} \quad \text{risolve.}$$

quindi se il polinomio caratteristico ha una sola radice reale λ_0 allora

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$$

dic 2-10:14

sono un sistema fondamentale di soluzioni, quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es: $y'' + y' = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1$

$\boxed{\text{due radici distinte.}}$

$y_1 = e^{0\cdot x} = 1 \qquad y_2 = e^{-1\cdot x} = e^{-x}$

$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$

Es di radici coincidenti.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda = 2$$

unica radice

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

integrale generale

dic 2-10:19

Polinomio caratteristico senza radici reali.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

senza radici reali.

$\Rightarrow$ ci sono due radici complesse coniugate.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

dic 2-10:23

Es: $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$

$\alpha = 0 \,,\; \beta = \pm 1.$

$\lambda_1 = 0 + 1 \cdot i \qquad \lambda_2 = 0 - 1 \cdot i$

$\alpha \quad \beta$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$= \frac{0 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 0 + i \\ 0 - i \end{cases}$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x), \quad y_2(x) = e^{0 x} \sin(1 \cdot x)$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x.$$

dic 2-10:28

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Es: $$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 13}}{1} = \frac{2 \pm \sqrt{-9}}{1} = 2 \pm 3i$$

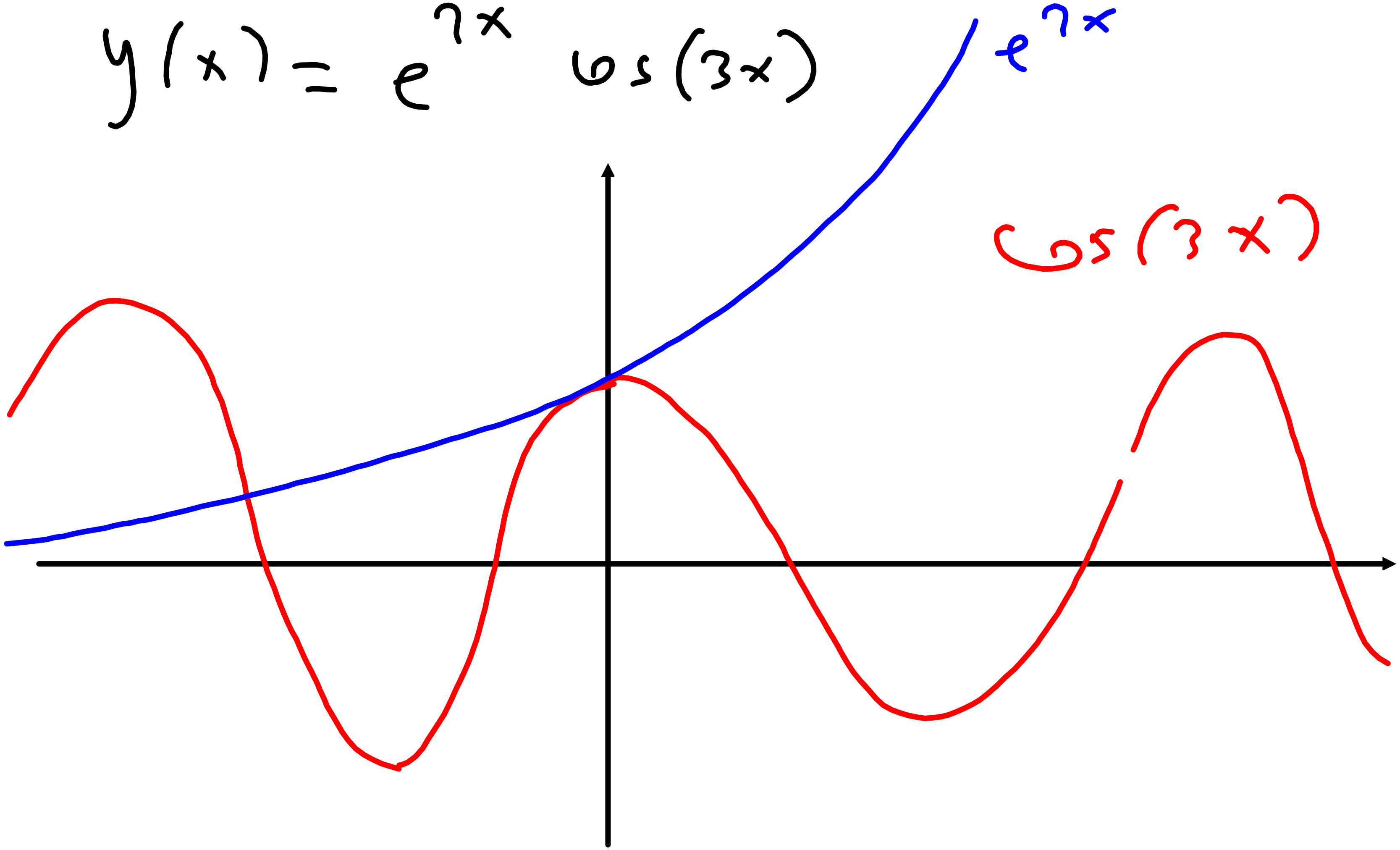
dic 2-10:30

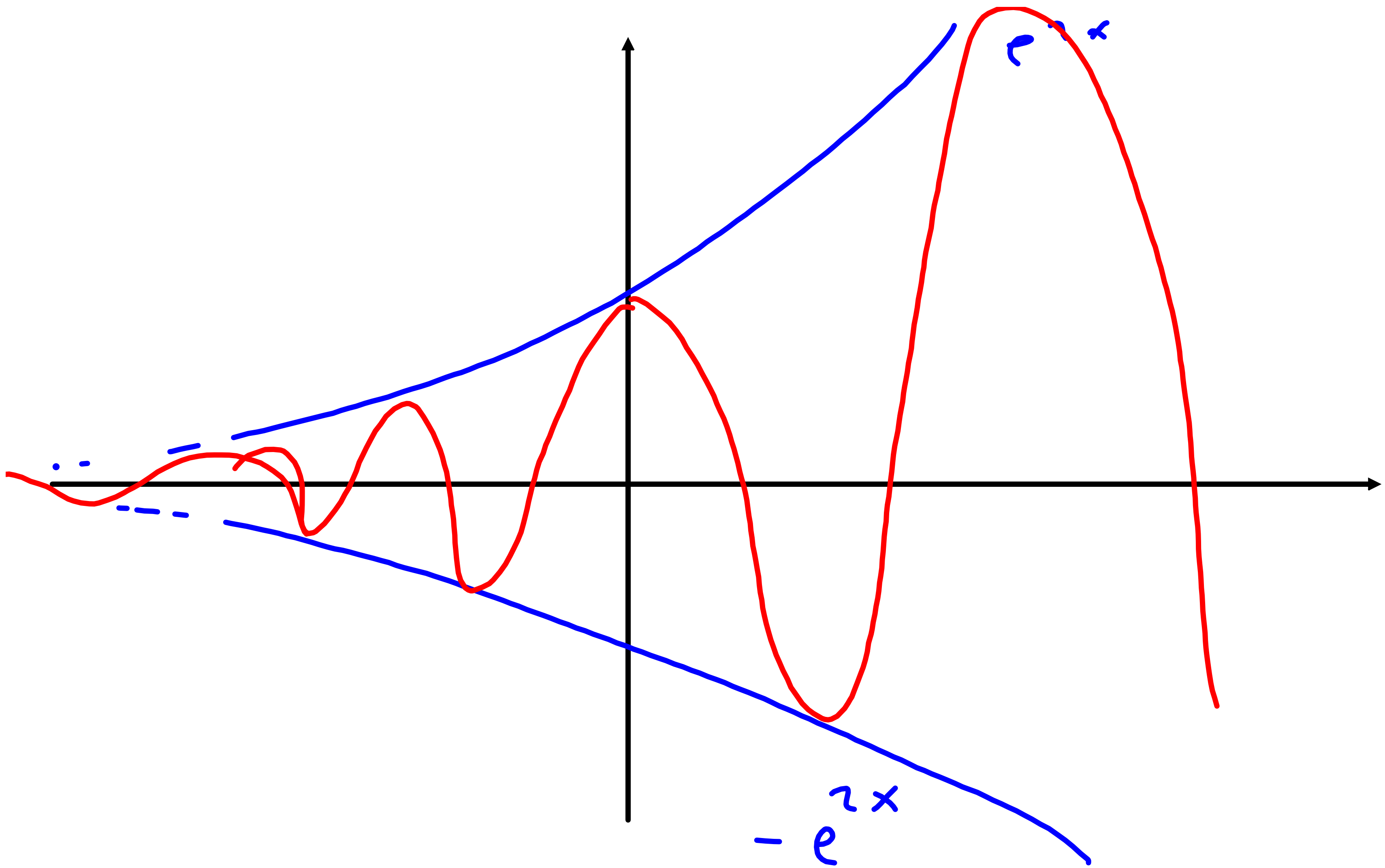
$\alpha = 2 \qquad \beta = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \cos(3x)$

$y_2(x) = e^{2x} \sin(3x)$

$$y(x) = e^{?x} \cos(3x)$$





dic 2-10:37

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

trovare c_1 e c_2.

$$y(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 + \cancel{c_2 \cdot 1 \cdot 0} = 2$$

$$\Rightarrow c_1 = 2$$

$$y' = c_1 e^x \cos x + \cancel{c_1 e^x (-\sin x)} + \cancel{c_2 e^x \sin x} + c_2 e^x \cos x$$

per $x = 0$

$$y'(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 - c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \cdot 1 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 1 \to \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 - 2 = -1$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x = \boxed{2e^x \cos x - e^x \sin x}$$

dic 2-10:42