$$\begin{cases} y' = 2y - e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$a(x) = 2 \qquad b(x) = -e^x$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = 2x$$

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-2x} \cdot (-e^x)\,dx$$

$$= -\int e^{-x}\, dx = e^{-x} + c$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)} b(x)\, dx + c\right) =$$

$$= e^{2x}\left(e^{-x} + c\right)$$

ricavo c dalla condizione

$y(0) = 0$

$$y(0) = e^{0}\left(e^{-0} + c\right) = 1(1+c)$$

$$= 1 + c$$

ma $y(0) = 0 \Rightarrow 1 + c = 0$

$$c = -1$$

$$y(x) = e^{2x}\left(e^{-x} - 1\right) =$$

$$= e^{x} - e^{2x}.$$

dic 1-16:04

Equazioni a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x)\, f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a, f sono funzioni continue.

Supponiamo $f(y_0) \neq 0$.

f è continua quindi $f(y) \neq 0$ in un intorno di y_0.

divido per $f(y)$

$$\boxed{\frac{y'}{f(y)} = a(x)}$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{f}$

cioè $\frac{dG}{dy} = \frac{1}{f(y)}$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ cioè $\frac{dA}{dx} = a(x)$.

dic 1-16:04

calcoliamo

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{1}{f(y)} \cdot y'$$ quindi

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = a(x)$$

integro in dx

dic 1-16:04

$$G(y(x)) = A(x) + C \quad (*)$$

G è invertibile ?

$G' = \frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow$ G è monotona

$\Rightarrow$ G è invertibile (localmente).

$\Rightarrow \exists\ G^{-1}$ (inversa)

$(*)$ $y(x) = G^{-1}(A(x) + c)$.

E se $f(y_0) = 0$?

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(x) = y_0$ costante è soluzione.

infatti $y'(x) = 0$

$a(x) f(y) = a(x) f(y_0) = 0$

$0 = 0$. soluzione.

dic 1-16:37

Es: $$\begin{cases} y' = -\left(\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2 \\ y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int \frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx + c$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\frac{1}{y-1}$$

$$-\int \frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx = -3\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -3\log|x^2+x+1|$$

$x^2 + x + 1 = 0$?

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ mai.

$\Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$ il valore assoluto non serve.

$\frac{-1}{y-1} = -3 \log(x^2+x+1) \mp c$

ricavo c dalla condizione iniziale.

$$y(0) = \frac{3\log 3 - 1}{3\log 3} = 1 - \frac{1}{3\log 3}$$

nell'equazione sostituisco

0 al posto di x

e $1 - \frac{1}{3\log 3}$ al posto di y

$$\frac{1}{\cancel{1} - \frac{1}{3\log 3} - \cancel{1}} = 3\log\cancel{(0+0+1)} - c$$

$$-3\log 3 = -c \qquad c = 3\log 3$$

$$\frac{1}{y-1} = 3\log(x^2+x+1) - 3\log 3$$

$$= 3\log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3} \frac{1}{\log\left(\frac{x^2 + x + 1}{3}\right)}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{x^2 + x + 1}{3}\right)}$$

Es: $\begin{cases} y' = -\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}(y-1)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y(x) = 1 \quad \forall x$

costante

Teorema: Se $f(y)$ è di classe C^1 in un intorno di y_0 allora il problema

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione locale unica.

cioè $\exists\, \delta > 0$ t.c. $y(x)$
è soluzione $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Es: $\begin{cases} y' = tg\,x \cos^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int tg\,x\,dx + c$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = tg\,y$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\log|\cos x|$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y = -\log|\cos x| + c$$

ricavo c da $y(0) = 1$

$$\operatorname{tg} 1 = -\cancel{\log|\cos(0)|} + c$$

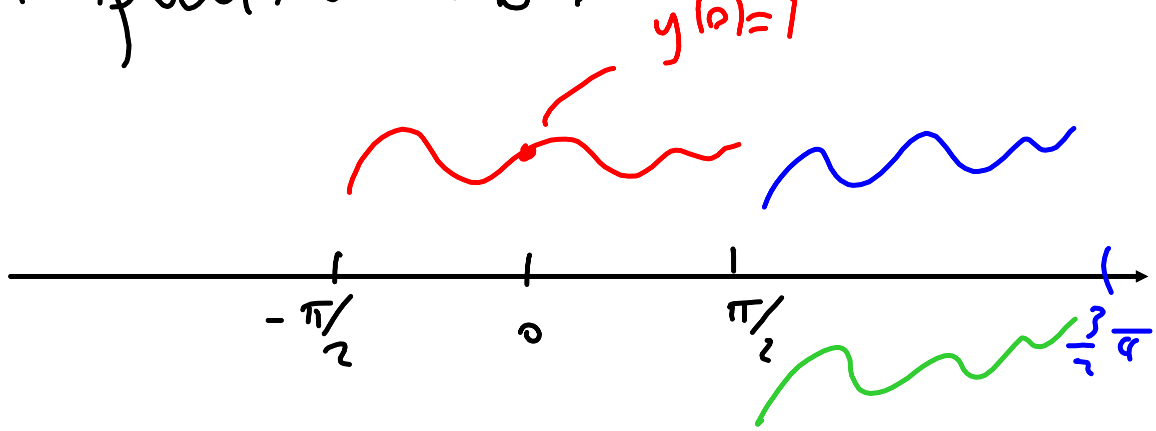
$$\operatorname{tg} y = -\log|\cos x| + \operatorname{tg} 1$$

$$y = \operatorname{arctg}\left(-\log|\cos x| + \operatorname{tg} 1\right)$$

esiste se $\cos x \neq 0$

cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$

La soluzione di un problema di Cauchy è definita su un intervallo che contiene il punto x_0.



$$\begin{cases} y' = \boxed{\dfrac{1-y^2}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{2\,dy}{1-y^2} = \int 1 \cdot dx + c$$

$$1-y^2 = (1+y)(1-y)$$

dic 1-17:14

$$\frac{2}{1-y^2} = \frac{2}{(1+y)(1-y)} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y}$$

$$\frac{A(1-y)+B(1+y)}{(1+y)(1-y)} = \frac{A+B+y(B-A)}{\cdots\quad\cdot}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow B=A \qquad 2A=2 \qquad A=1 \qquad B=1$$

$$\int \frac{2}{1-y^2}\,dy = \int \frac{dy}{1+y} + \int \frac{dy}{1-y} =$$

$$= \log|1+y| - \log|1-y| =$$

$$= \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\int 1 \cdot dx = x + c$$

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + c$$

ricavo c da $y(0)=0$

dic 1-17:17

$$\log\left|\frac{1+0}{1-0}\right| = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x$$

segno di $\frac{1+y}{1-y}$.

è >0 se $-1<y<1$.

$y(x_0)=y_0 \qquad y_0 = 0 \in (-1,1)$

dic 1-17:20

$\Rightarrow \quad \dfrac{1+y}{1-y} > 0$ in un intorno di $y_0 = 0$.

$$\Rightarrow \log \frac{1+y}{1-y} = x$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^x \Rightarrow 1+y = e^x - y e^x$$

$$y\left(1+e^x\right) = e^x - 1$$

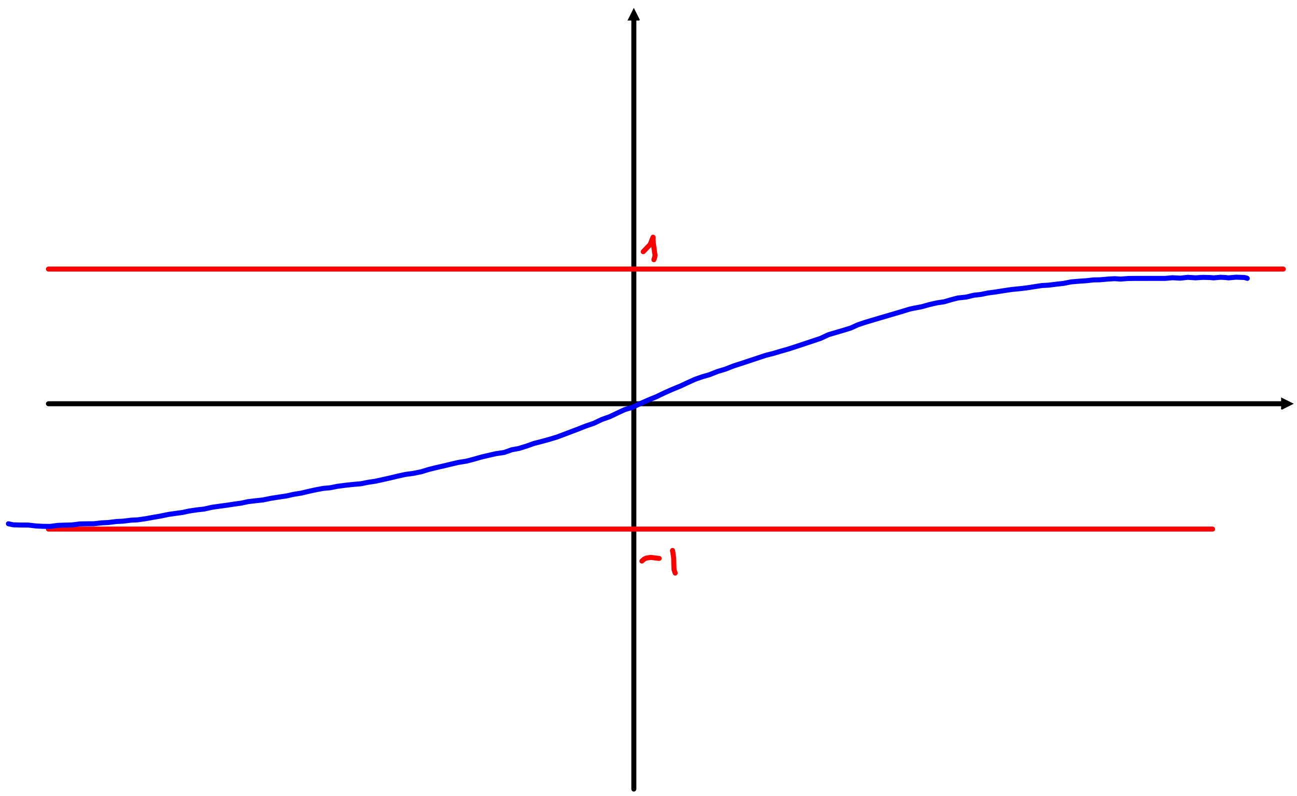
dic 1-17:22

$$y(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x} \quad .$$

per quali x esiste? $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$


1
-1

L'equazione diff. ha soluzioni costanti?

$$y' = \frac{1-y^2}{2}$$

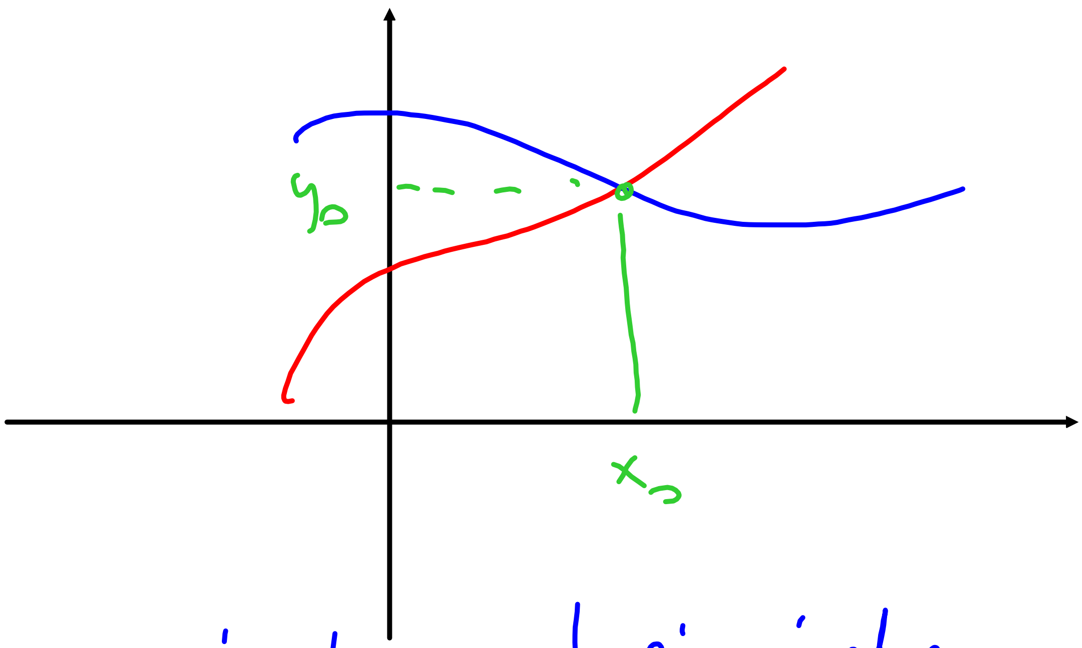
$y \equiv 1$, $y \equiv -1$ sono soluzioni costanti.

$y' = a(x) f(y)$

se $f(y)$ è di classe C^1

il problema di Cauchy ha

soluzione (locale unica).

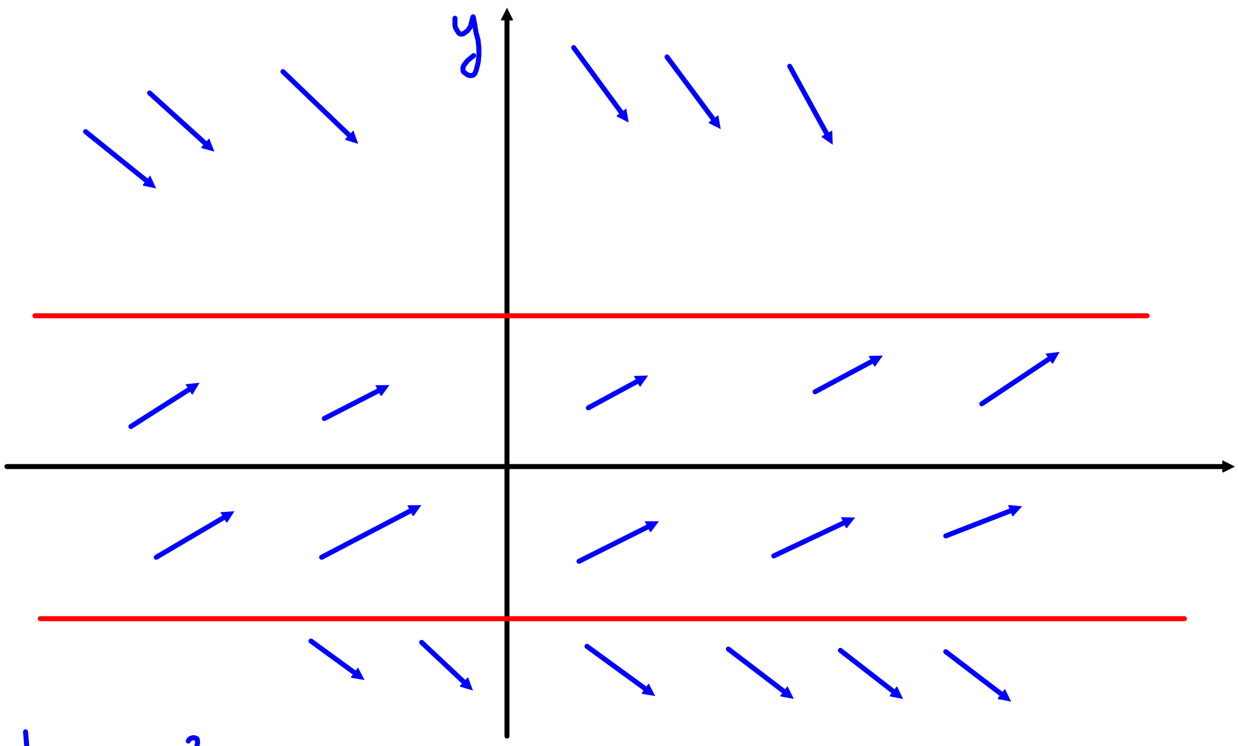


se avessi due soluzioni che
si intersecano

prendo (x_0, y_0) punto di intersezione
e considero

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

avrei due soluzioni distinte
dello stesso problema di
Cauchy.



$y' = \frac{1-y^2}{2} > 0 \iff -1 < y < 1$, $y' < 0 \iff y > 1$ oppure $y < -1$

dic 1-17:36

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^2}{2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^2}{2} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = x + c$$

$$\log\left|\frac{y+1}{1-y}\right| = x + c$$

se $y(0) = 2$ oppure $y(0) = -2$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{1-y} < 0$$

dic 1-17:41