Equazioni differenziali ordinarie

$y = y(x)$ funzione derivabile n volte

F di $n+2$ variabili

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n.

Es: $\cos(y') + y^3 + e^x + \lg x = 0$

eq. diff. di ordine 1.

$$e^{y''} - \log y + \operatorname{tg} x = 0$$

è un eq. diff. di ordine 2

L'incognita è la funzione $y(x)$.

Se posso ricavare la derivata di ordine più alto l'equazione si dice in forma normale.

Es: $y''' = 3y'' + \cos(y') + e^x \log y$

è in forma normale.

Es: $y' = x^2$

soluzione

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

Es: $y' = y$

soluz. $y(x) = e^x$

nov 30-11:24

$y = e^x + c$ è soluzione?

NO: $y' = e^x$

$e^x \neq e^x + c$

$y(x) = k e^x$ è soluzione.

nov 30-11:27

Es: $y'' = y$

soluz: $y(x) = e^{x}$

$y(x) = \sinh x$

$y(x) = \cosh x$

$y(x) = k e^{x}$

$y(x) = e^{-x}$

$$y' = -e^{-x}$$

$$y'' = -(-e^{-x}) = e^{-x} = y.$$

$$y(x) = k \cdot e^{-x} \text{ è soluzione}$$

$$y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x}$$

$$y' = k_1 e^{x} - k_2 e^{-x}$$

$$y'' = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} = y$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \qquad k_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \qquad k_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x$$

Es: $y'' = -y$

$y(x) = \cos x$

$y(x) = \sin x$

$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$.

nov 30-11:34

Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

con $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ fissati

nov 30-11:36

fisso un punto x_0 e il valore della funzione e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ in quel punto.

Es: $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

$$y(0) = 0$$

$$k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = 0$$

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

nov 30-11:39

$$y' = -k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

$$y'(0) = -k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 1$$

deve essere $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad k_2 = 1$$

soluzione

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x =$$

$$= \sin x \qquad (k_1 = 0,\ k_2 = 1).$$

nov 30-11:43

L'unica funzione che risolve il problema di Cauchy è $y(x) = \sin x$.

nov 30-11:45

Equaz. lineari del primo ordine.

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

a, b continue.

Es: $y' = \sin x \cdot y + \log x$

Es: $y' = tgx \cdot y^{2} + e^{x}$

non è lineare

Se $b(x) = 0$ l'equazione si dice omogenea.

$$y' = a(x)\, y.$$

nov 30-11:50

Siano y_1 e y_2 soluzioni dell'omogenea.

Considero $y = y_1 + y_2$

$$y' = y_1' + y_2' = a(x) y_1 + a(x) y_2$$

$$= a(\underbrace{y_1 + y_2}_{y}) = a(x) \cdot y .$$

nov 30-11:52

la somma di 2 soluzioni è ancora soluzione.

Se y_1 è soluzione e $k \in \mathbb{R}$ allora $y(x) = k y_1(x)$ è soluzione. Infatti

$$y' = k y_1' = k\,(a(x) y_1) =$$

$$= a(x)(k y_1) = a(x)\,y.$$

nov 30-11:54

Se invece ho due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione completa

$$y' = a(x)y + b(x)$$

cioè

$$y_1' = a(x)y_1 + b(x)$$
$$y_2' = a(x)y_2 + b(x)$$

sottraete

$$(y_1 - y_2)' = a(x)(y_1 - y_2)$$

$\Rightarrow$ $y_1 - y_2$ è soluzione dell'omogenea.

Quindi ogni soluzione
dell'equazione completa
si ottiene sommando una
soluzione dell'omogenea
con una soluzione dell'equaz.
completa.

Soluzione dell'omogenea.

$$y' = a(x)\, y \quad .$$

supponiamo $y(x) > 0$.

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log y(x)\right] = a(x)$$

nov 30-12:02

integro

$$\log y(x) = \int a(x)\,dx + c$$

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx + c}$$

$$= e^{c} \cdot e^{\int a(x)\,dx} = k\,e^{A(x)}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

nov 30-12:04

verifico che è soluzione.

$$y(x) = k \cdot e^{A(x)}$$

$$y'(x) = k \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) =$$

$$= \underbrace{k e^{A(x)}}_{y} \cdot a(x) = y \cdot a(x)$$

Funziona anche se $y(x)<0$

$$y(x) = k e^{A(x)}$$ è soluzione

e se $k>0 \Rightarrow y(x)>0 \ \forall x$

se $k<0 \Rightarrow y(x)<0 \ \forall x$

se $k=0 \Rightarrow y(x)=0 \ \forall x$

e $y \equiv 0$ è soluzione.

nov 30-12:09

infatti se

$y(x)=0 \quad \forall x \Rightarrow y'(x)=0 \quad \forall x$

$y' = a(x)\, y$

$0 = a(x) \cdot 0$ <u>vera</u>.

Es: $y' = x^2 y$

$a(x) = x^2$ $\qquad A(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$y(x) = k e^{\frac{x^3}{3}}$ è soluzione.

se aggiungo una condizione iniziale $y(0) = -1$

$$y(0) = k \cdot e^{\frac{0^3}{3}} = k \cdot 1$$

ma $y(0)$ deve essere -1

$$\Rightarrow -1 = k \cdot 1$$

$$\Rightarrow y(x) = -1 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = -e^{\frac{x^3}{3}}$$

nov 30-12:15

Equazione completa

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Cioè $A' = a$

moltiplico l'equazione per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} = a(x) e^{-A(x)} y(x) + b(x) e^{-A(x)}$$

$$\underbrace{y' e^{-A(x)} - y(x)\, a(x)\, e^{-A(x)}} = b(x) e^{-A(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-A(x)}\right) = b(x) e^{-A(x)}$$

integro

nov 30-12:19

$$y\, e^{-A(x)} = \int b(x) e^{-A(x)}\, dx + c$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x) e^{-A(x)}\, dx + c \right)$$

tutte e sole le soluzioni

dell'equaz. $y' = a(x)\, y + b(x)$.

Es: $y' = x^2 y + x^2$

$a(x) = x^2 \qquad b(x) = x^2$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int x^2\,dx$

$= \frac{x^3}{3}$

devo calcolare

$$\int e^{-A(x)} b(x)\, dx =$$

$$= \int e^{-\frac{x^3}{3}} x^2\, dx =$$

$$x^3 = t \Rightarrow 3x^2\, dx = dt$$

$$= \int e^{-\frac{t}{3}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{\cancel{3}} e^{-\frac{t}{3}} \left(\cancel{-3}\right) =$$

nov 30-12:30

$$= -e^{-t/3} = -e^{-\frac{x^3}{3}} \quad \left(t = x^3 \right)$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx + c \right) =$$

$$= e^{\frac{x^3}{3}}\left(-e^{-\frac{x^3}{3}} + c \right)$$

$$= -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}} .$$

nov 30-12:33

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ \boxed{y(3) = 2} \end{cases}$$

$$y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

devo trovare c usando la condizione

$$2 = y(3) = -1 + c\, e^{\frac{3^3}{3}} =$$

$$= -1 + c\, e^{9}$$

$$\Rightarrow 2 = -1 + c\, e^{9}$$

$$3 = c\, e^{9} \Rightarrow c = 3 \cdot e^{-9}$$

$$\Rightarrow y(x) = -1 + 3 \cdot e^{-9}\, e^{\frac{x^3}{3}}.$$

unica soluzione

Se invece considero

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\cancel{-1} = \cancel{-1} + c \cdot e^{\frac{3^3}{3}}$$

$$c\, e^{9} = 0 \qquad c = 0$$

soluzione $y(x) = -1 \quad \forall x$

costante.

soluzioni di $y' = x^2 y + x^2$