Def: Se $b<a$

definisco

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

inoltre definisco

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \;.$$

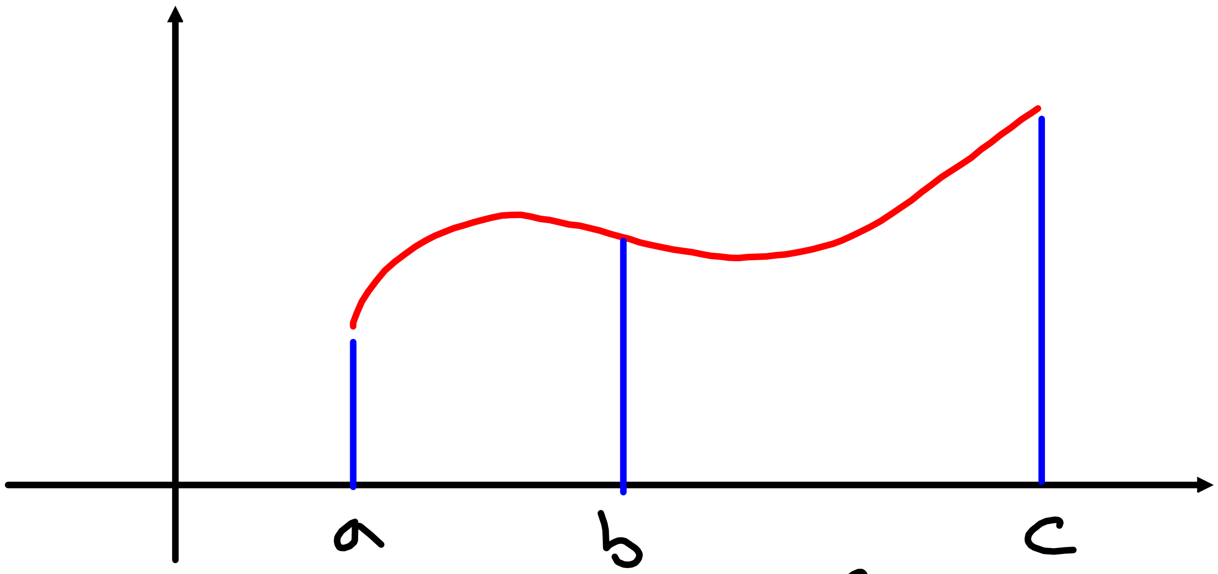
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

è ancora valida se

$$a < b < c$$

?

$$\boxed{\text{SI}}$$



$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La media integrale vale anche con gli estremi scambiati? SI

Se $b < a$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$$

quindi

nov 24-16:26

$$\inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f$$

comunque siano messi a e b

cioè anche se $b<a$

se $b<a \Rightarrow [a,b]$ si intende

come $[b,a]$

<u>Def</u> : $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione

$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u>

di f se F è derivabile in I

e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

nov 24-16:29

Es: $f(x) = 2x$

$F(x) = x^2$ è una primitiva di f

perché $F'(x) = f(x)$.

Trovata una primitiva ne avete trovate infinite

$G(x) = x^2 + k \quad , \; k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \; G'(x) = 2x = f(x)$

$\Rightarrow$ G è una primitiva di f.

Oss: Due primitive di f differiscono sempre per una costante.

dim: Se F e G sono primitive di f $\Rightarrow$

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

F e G sono definite su un intervallo quindi

$F - G$ è costante.

$$F - G = k \Rightarrow F = G + k$$

$\square$

Def: L'insieme di tutte le primitive di f si dice <u>integrale indefinito</u> di f e si indica con

$$\int f(x)\,dx =$$

$$= \{ F : F \text{ è una primitiva di } f \}.$$

<u>Es</u>: $\int 2x\,dx = \{ x^2 + k : k \in \mathbb{R} \}$

questa notazione si abbrevia così

$$\int 2x\,dx = x^2 + k.$$

______ - ______

$$\int e^x\,dx = e^x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

nov 24-16:40

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + k$$

$$\text{se } x>0 \Rightarrow D(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{se } x<0 \Rightarrow D(\log(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

nov 24-16:42

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

$n \neq -1$

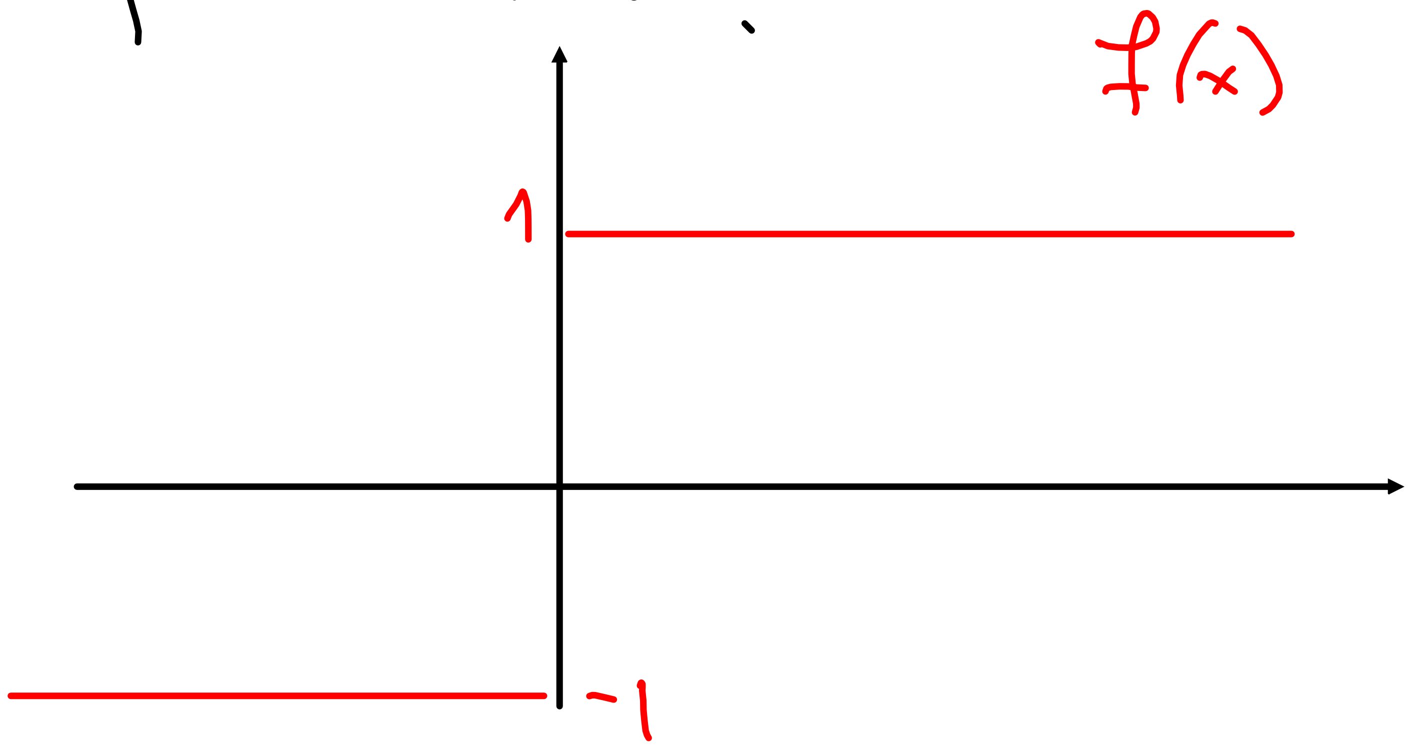
$n \in \mathbb{Z}$.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha \neq -1$.

nov 24-16:45

Tutte le funzioni hanno una primitiva?



Se cerco una primitiva di f

$\Rightarrow$ deve essere $F'(x) = 1$ se $x > 0$

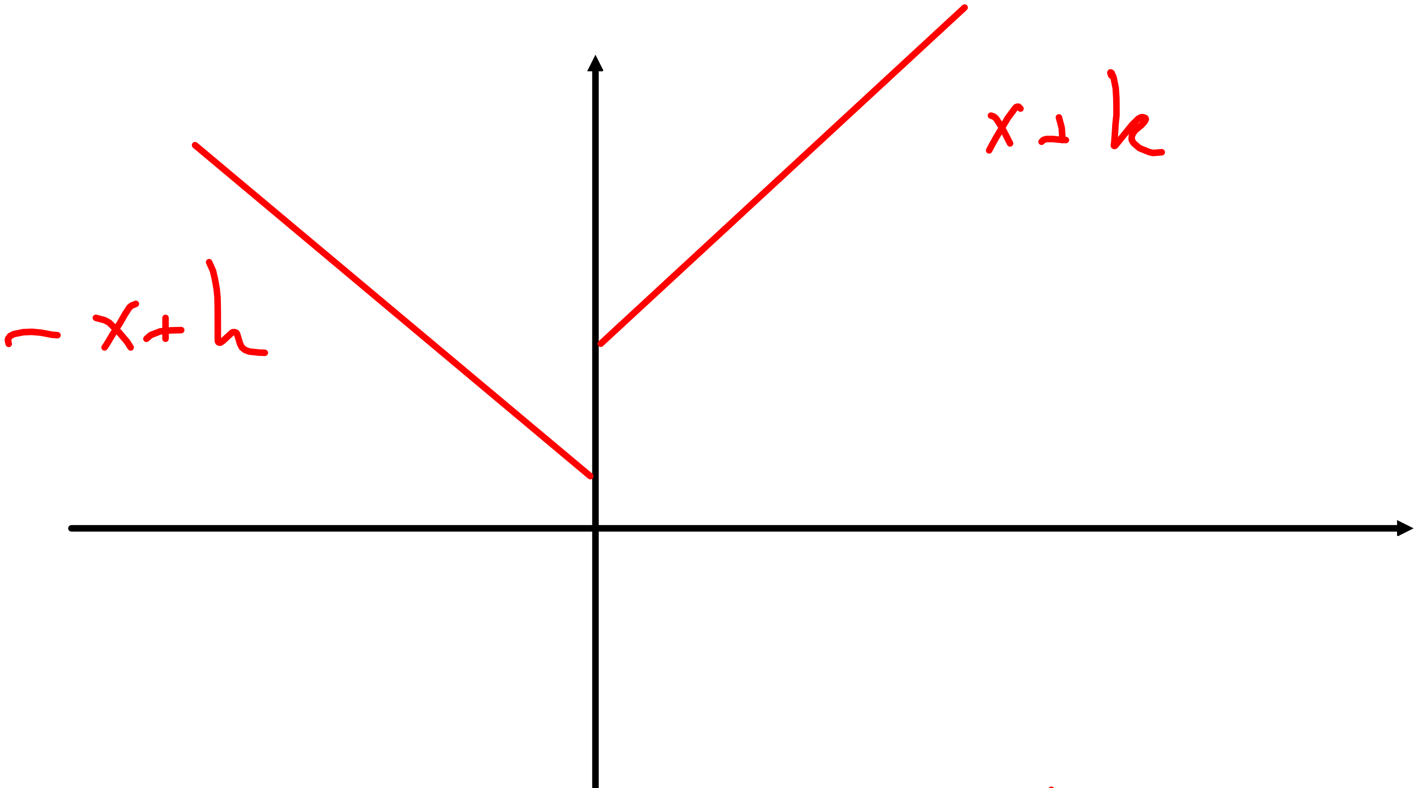
$F'(x) = -1$ se $x < 0$.

$\Rightarrow$ $F(x) = x + k$ se $x > 0$

$F(x) = -x + h$ se $x < 0$

F non è derivabile per qualunque scelta di k e h.

nov 24-16:50



mettendo $h=k$ ottengo al massimo che F è continua ma non derivabile.

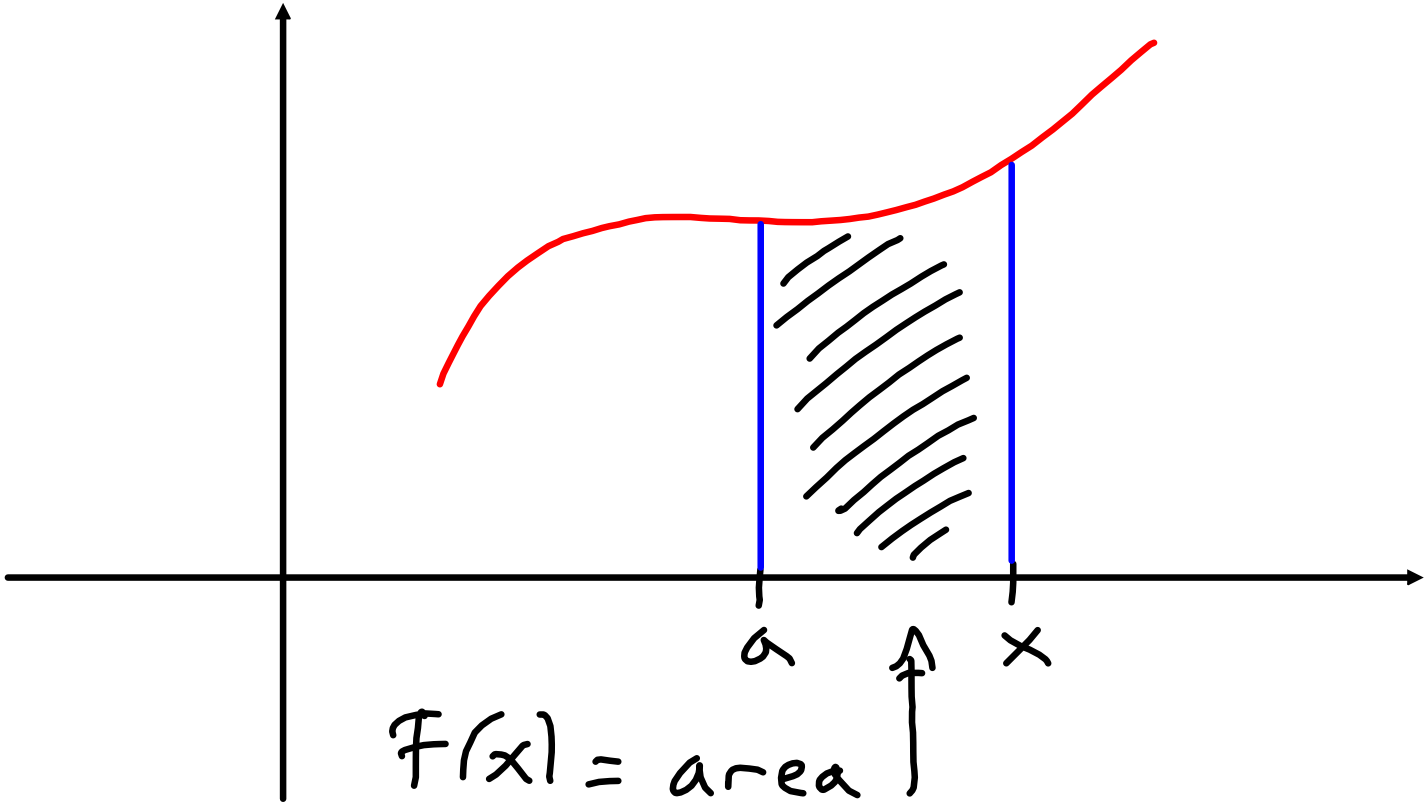
Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $a \in I$ punto qualsiasi, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

è una primitiva di f.

nov 24-16:55


a
x
F(x) = area

dim: devo dimostrare che F è derivabile e $F'(x_0) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in I$. Calcolo

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\Big(\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)} - \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{F(x_0)}\Big)$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt\right)$$

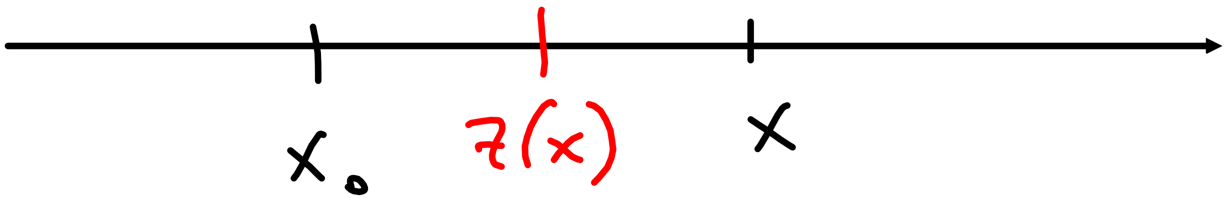
$$= \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt =$$

media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x.

$$= f(z(x))$$

con $z(x)$ punto compreso fra x_0 e x.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x))$$



se $x\to x_0 \Rightarrow z(x)\to x_0$ per il teorema dei Carabinieri.

cambio variabile nel limite

pongo $z(x) = y$

$$\lim_{x \to x_0} f(z(x)) = \lim_{y \to x_0} f(y) = f(x_0)$$

perché f è continua.

$$\Rightarrow \quad F'(x_0) = f(x_0) \qquad \square$$

Teorema di Torricelli.

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo $a \in I$ fissato. Se G è una primitiva di f allora $\exists\, k$ t.c.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$$

e $\forall\, \alpha, \beta \in I$ risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

<u>dim</u>: Se pongo $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$

$\Rightarrow F$ è una primitiva di f

ma anche G è una primitiva

$\Rightarrow \exists\, k$ t.c. $G = F + k$.

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_a^\beta f(t)\,dt$$

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = -\int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_a^\beta f(t)\,dt$$

$$= -F(\alpha) + F(\beta) =$$

$$= F(\beta) + k - (F(\alpha) + k) = G(\beta) - G(\alpha).$$

$\square$

nov 24-17:14

Notazione

$$G(\beta) - G(\alpha) = \Big[G(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} .$$

variazione di G tra α e β.

Es:
$$\int_1^3 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 .$$

nov 24-17:18

Oss: f integrabile

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $a \in I$

allora $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

F è continua.

dim: fissiamo $x_0 \in I$

e prendiamo $x > x_0$

nov 24-17:20

voglio dimostrare che F è continua in x_0 (da destra).

$$|F(x)-F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{\sup|f|}_{\text{costante}}\,dt =$$

nov 24-17:22

$$= \sup|f| \cdot (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} |F(x) - F(x_0)| \le$$

$$\le \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\sup|f|}_{\text{fissato}} \underbrace{(x - x_0)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow F$ è continua in x_0 da destra.

Da sinistra è simile. $\square$

nov 24-17:26

$$\lim_{x \to a} \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

perché $F(x)$ è continua.

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$ continua, $A \subset \mathbb{R}$

$\alpha : A \to I$, $\beta : A \to I$ derivabili.

Definisco

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

nov 24-17:30

Allora G è derivabile e

$$G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

dim: Sia $F(x)$ una primitiva di f.

Per il teorema di Torricelli

$$G(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$$

derivo questa

nov 24-17:32

$$G'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x)$$

$$= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

$\square$

Es: $G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \operatorname{arctg} t \, dt$

calcolare $G'(x)$.

$\alpha(x) = x^2 \quad \beta(x) = \sin x$

$f(t) = e^t \operatorname{arctg} t$

nov 24-17:35

$$G'(x) = e^{\sin x} \operatorname{arctg}(\sin x) \cdot \underbrace{\cos x}_{\beta'}$$

$$- e^{(x^2)} \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \underbrace{2x}_{\alpha'}$$

nov 24-17:38

Es: $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{\overset{\alpha}{0}}^{x^2} e^t \operatorname{arctg} t \, dt}{\sin(x^4)} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancelto{1}{e^{(x^2)}} \operatorname{arctg}(x^2) \cdot 2x - \overset{\alpha'}{0}}{\cancelto{1}{\cos(x^4)} \cdot 4x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2\cancel{x}}{4x^{\cancel{3}\,2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)\cdot 2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t).$$