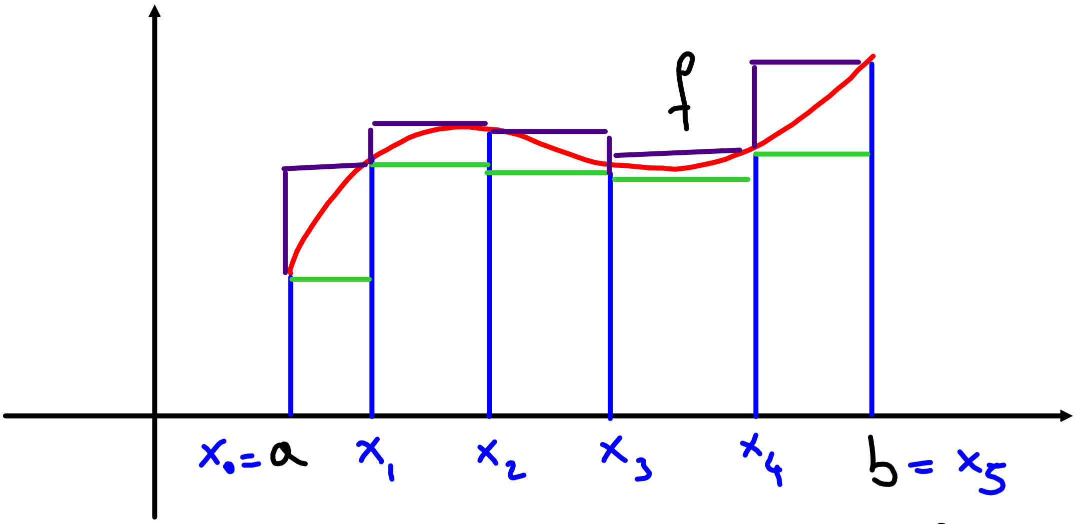
Integrale di Riemann



area del sottografico di f

Consideriamo solo funzioni f

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f limitata .

Def: Un insieme di punti

$\mathcal{A} = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \}$

t.c.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

si dica suddivisione di $[a,b]$.
Gli intervalli non sono necessariamente della stessa grandezza.

Oss: $$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Def :

$$S'(f, A) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \ (x_j - x_{j-1})$$

somma inferiore di f relativa alla suddivisione A.

È l'area dei rettangoli che sono sotto il grafico di f.

nov 23-11:28

$$S''(f, A_0) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x) \, (x_j - x_{j-1})$$

somma superiore di f relativa alla <u>suddivisione</u> A_0.

<u>Oss</u>: Non ho necessità della continuità di f, ma della limitatezza sì.

Def:

$$S'(f) = \sup \{ S'(f,A) : A \text{ suddivisione} \}$$

$$S''(f) = \inf \{ S''(f,A) : A \text{ suddivisione} \}.$$

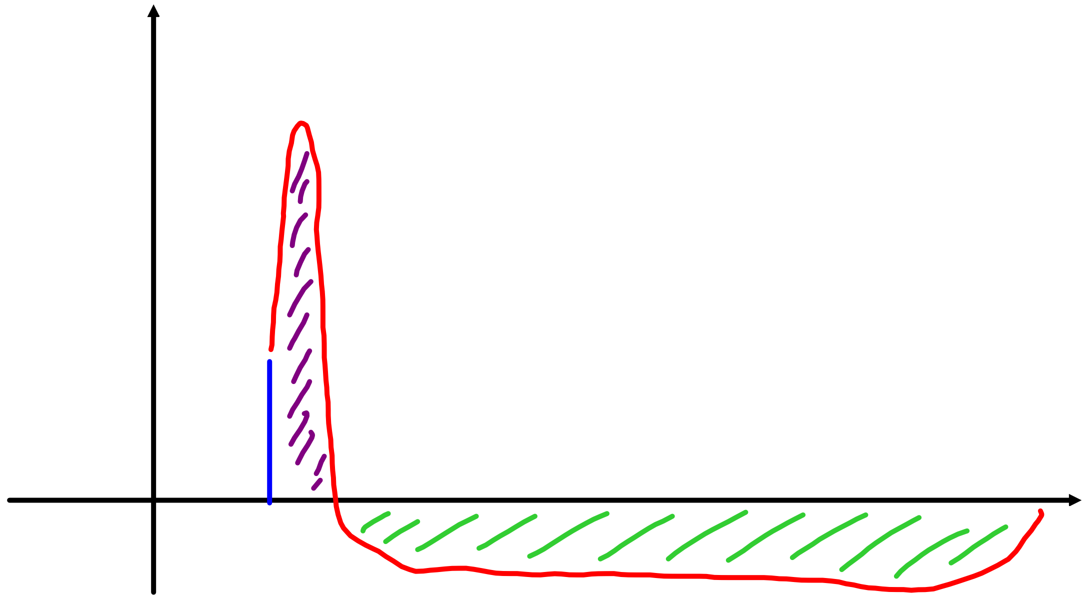
$S'(f)$ si dice somma inferiore per f

$S''(f)$ somma superiore per f.

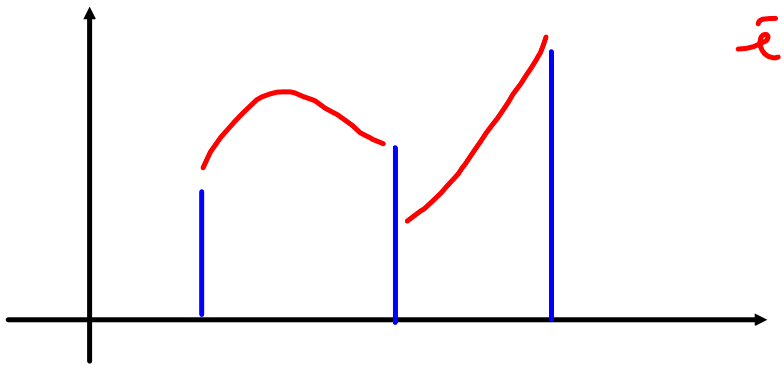
Def: Se $S'(f) = S''(f)$
f si dice integrabile secondo Riemann su $[a, b]$.
Userò la notazione
f integrabile invece che
f integrabile secondo Riemann.

nov 23-11:37

Oss: non è detto che sia $f \geq 0$.
L'integrale di Riemann misura l'area del sottografico di f col segno.
Le zone dove $f \geq 0$ sono col segno positivo e quelle dove $f \leq 0$ sono col segno negativo.



Teorema: Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua allora f è integrabile.



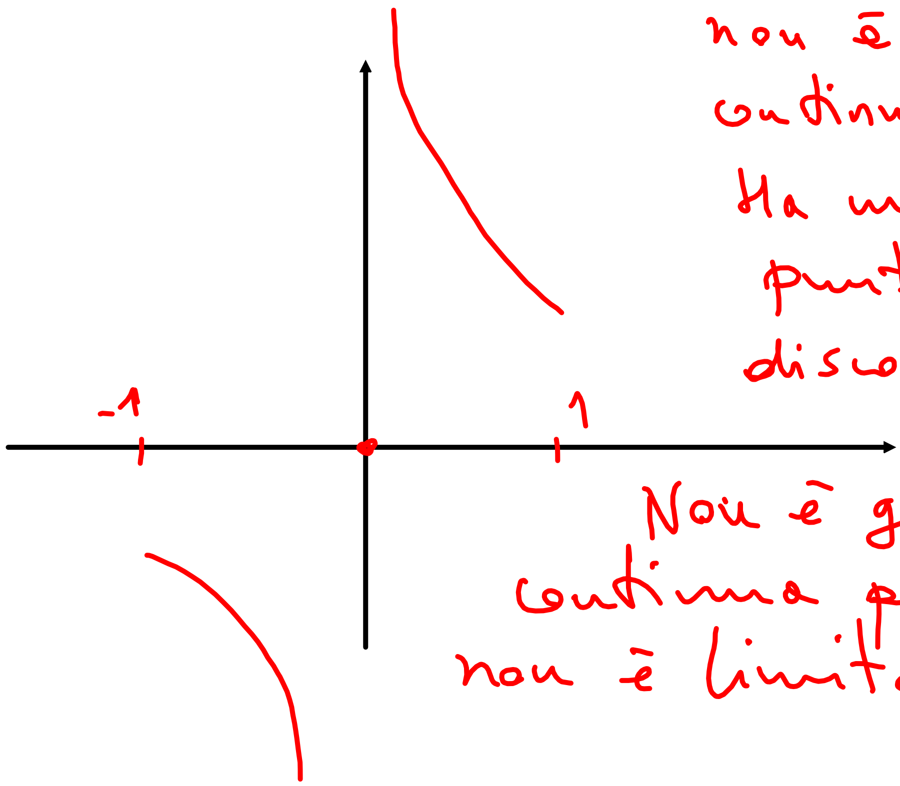
è integrabile?

Sì

Def: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
si dice generalmente continua
se è limitata e ha al massimo
un numero finito di punti
di discontinuità.

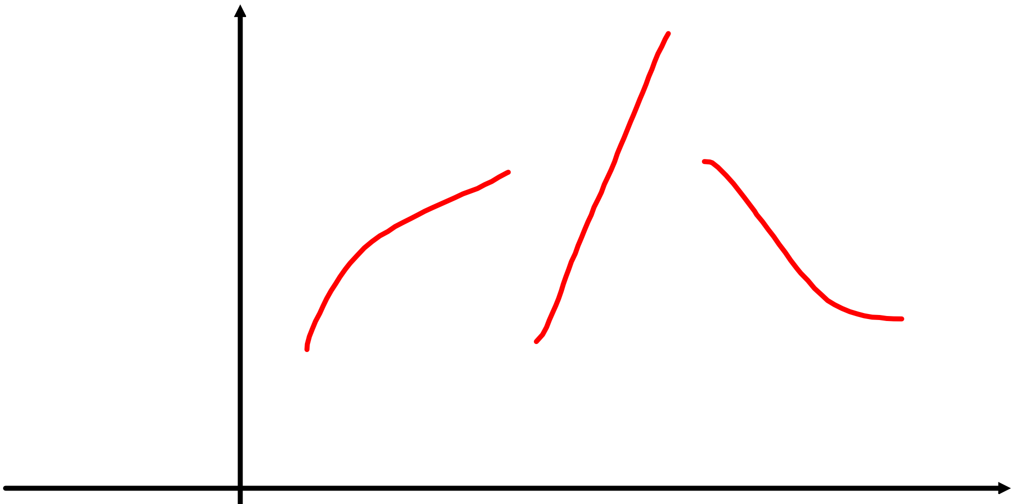
Es: $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

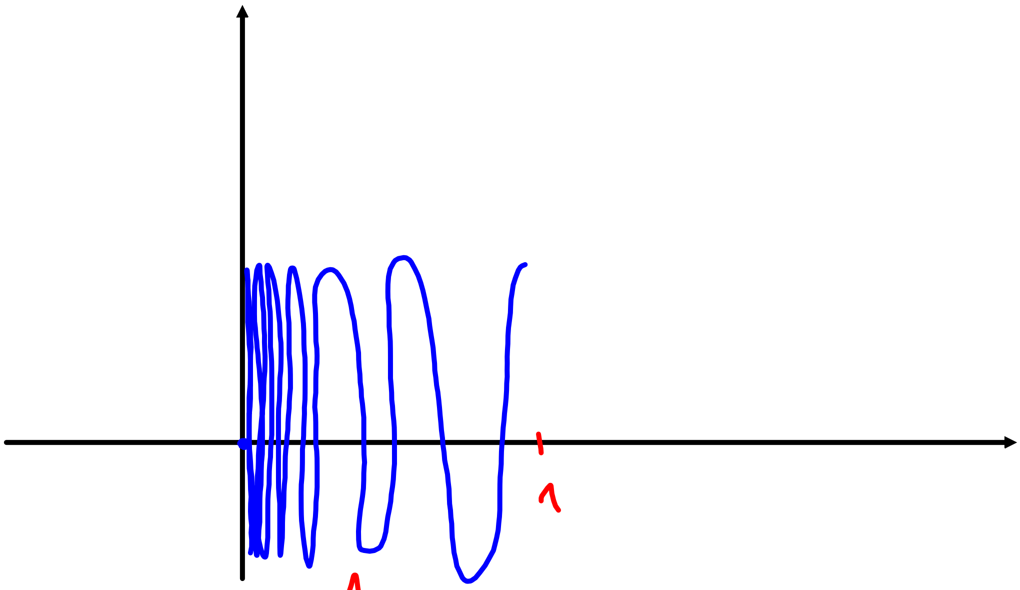


non è continua in 0.
Ha un solo punto di discontinuità.

Non è generalm. continua perché non è limitata.



è generalmente
ottima.



$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

f è generalmente continua
perché è discontinua solo in 0
ed è limitata.

<u>Teorema</u>: Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è generalmente continua allora f è integrabile.

Se f è integrabile il valore comune $S'(f) = S''(f)$ si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica con

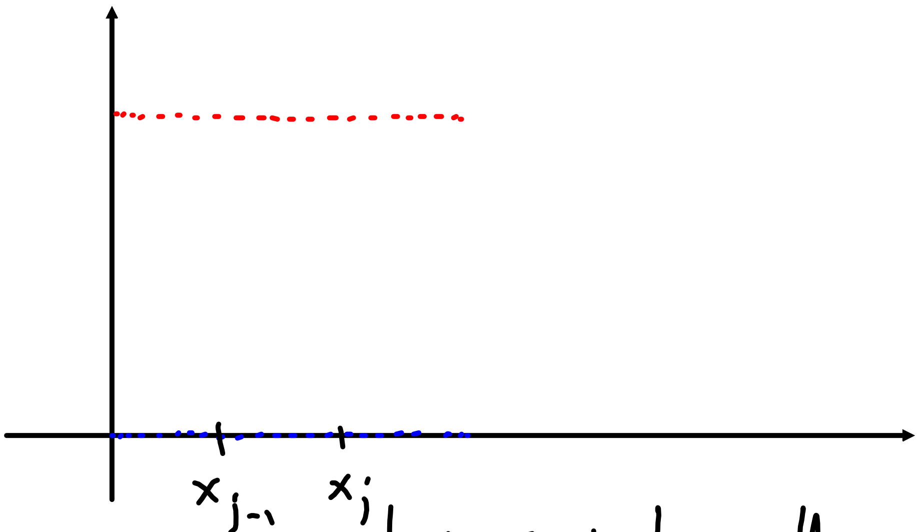
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Esempio di funzione non integrabile.

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

funzione di Dirichlet.



Preso un qualsiasi intervallo

$[x_{j-1}, x_j]$

$$\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) = 1$$

$$\inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) = 0$$

data una qualsiasi suddivisione $\mathcal{A}$, risulta

$$S''(f, \mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{n} \overset{1}{\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f} \cdot (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot (x_j - x_{j-1}) = \underset{b-a}{1-0} = 1$$

$$\Rightarrow S''(f) = \inf \{ S''(f,A) : A \text{ suddi.} \}$$

$$= 1$$

$$S'(f,A) = \sum_{j=1}^{n} \overset{0}{\inf_{[x_{j-1},x_j)} f} \, (x_j - x_{j-1}) = 0$$

$$\Rightarrow S'(f) = 0$$

nov 23-12:09

$S''(f) \neq S'(f)$

allora f non è integrabile.

Teorema: Siano f, g integrabili su $[a,b]$ e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora $f+g$, kf e $|f|$ sono integrabili e valgono:

1) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

nov 23-12:14

2) $$\int_a^b (k\,f)(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

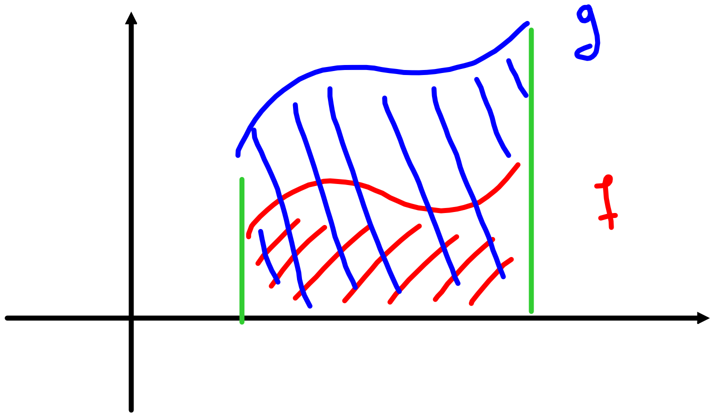
3) Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

4) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

5) Se $a < c < b$ allora

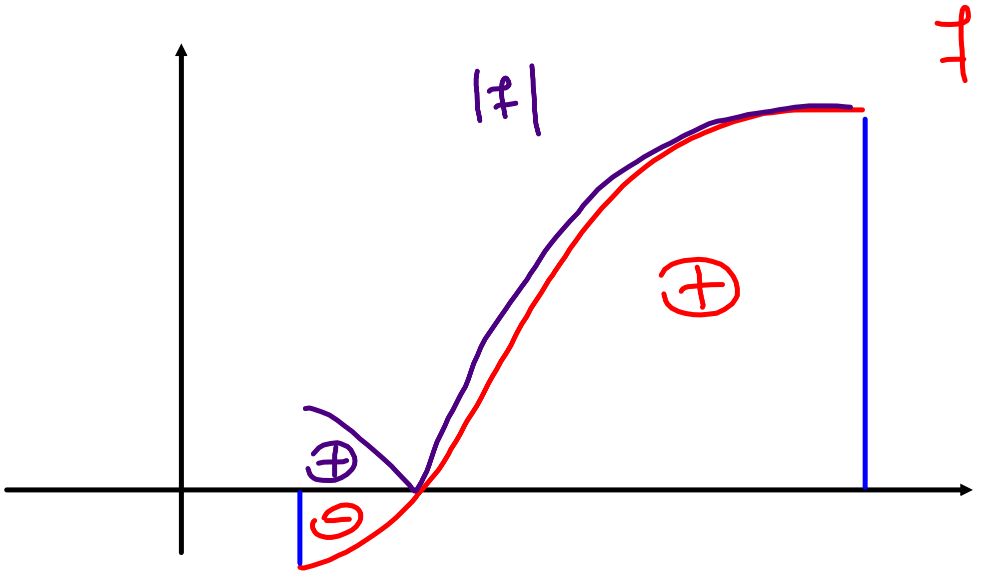
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



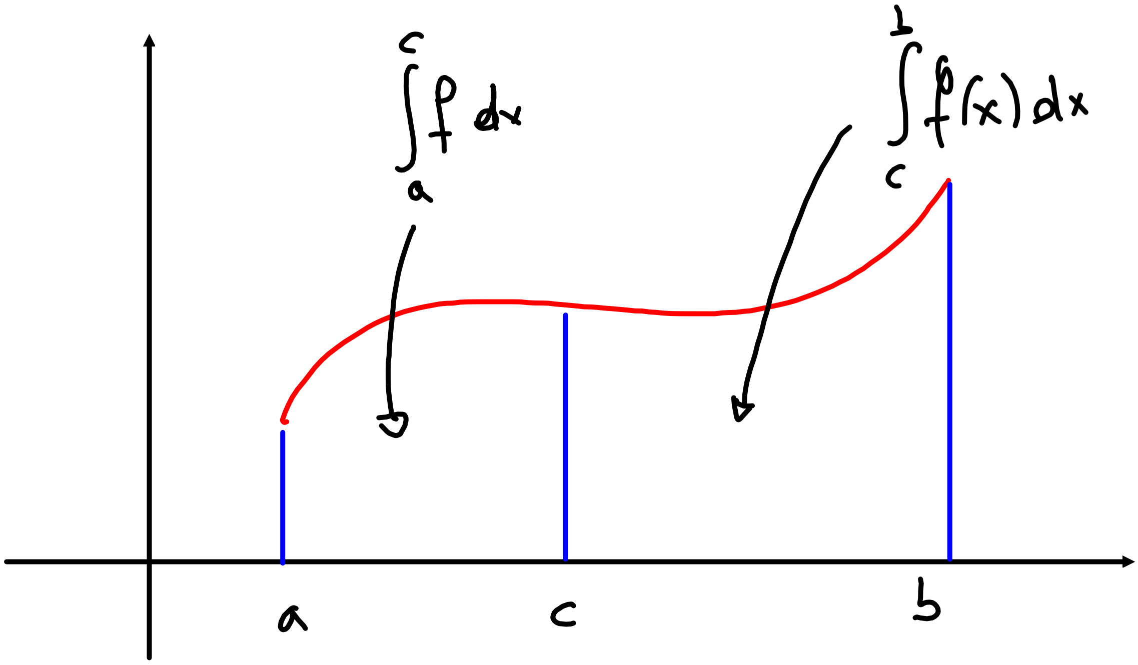
3)

nov 23-12:18

4)



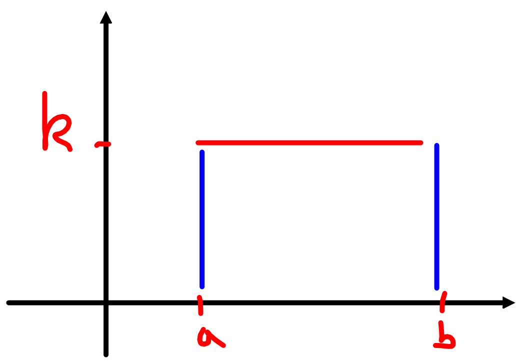
5)



Oss: Se $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ è costante, cioè $f(x)=k$ $\forall x\in[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= k\,(b-a).$$



Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile.
La quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ si dice

media integrale di f
su $[a,b]$.

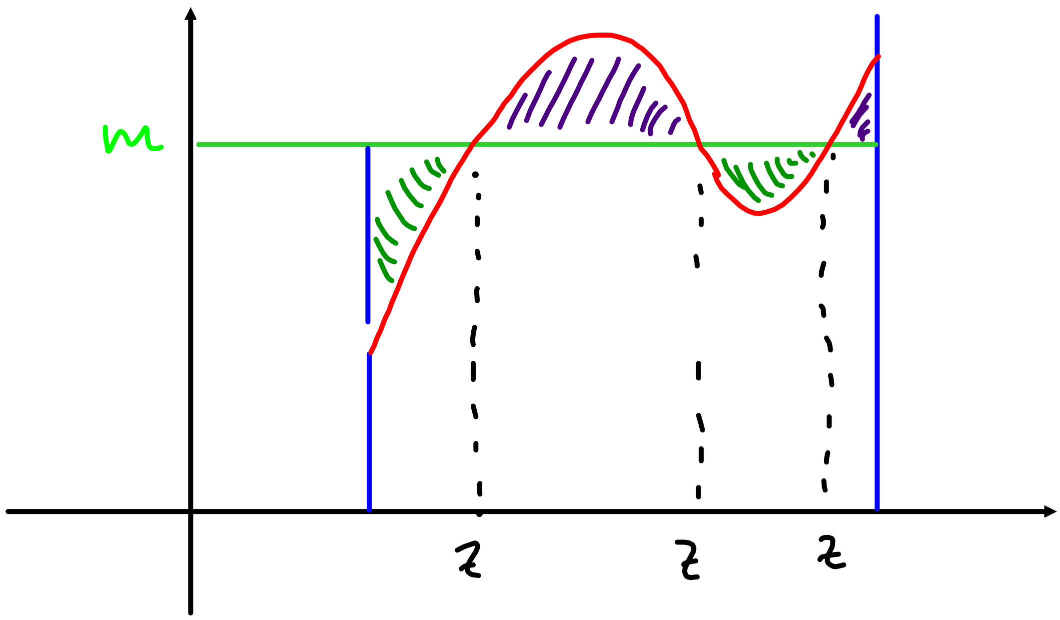
Poniamo

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underbrace{m(b-a)}_{} = \int_a^b f(x)\,dx$$

area di un
rettangolo di base [a,b]
e altezza [0, m]

nov 23-12:30


m
z
z
z

Teorema della media integrale

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Allora

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]}(f).$$

Se f è anche continua allora

$\exists\ z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

dim: $\forall\ x \in [a,b]$ risulta

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]}(f)$$

integro e uso 3)

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\inf(f)}_{\text{costante}}\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le$$

$$\le \int_a^b \underbrace{\sup(f)}_{\text{costante}}\,dx$$

$$\inf(f)\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le$$

$$\le \sup(f)\,(b-a)$$

dividiamo tutto per $b-a$.

Se f è continua allora

$$\inf_{[a,b]}(f) = \min_{[a,b]}(f) \quad \text{Weierstrass.}$$

$$\sup(f) = \max(f)$$

e per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori tra $\min(f)$ e $\max(f)$.

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è un valore intermedio, allora $\exists\, z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

$\square$