Es.: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

rapporto $a_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Secondo metodo

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{n}{n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-2}}_{>1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{>1}} \cdot n > n$$

>1

$\to +\infty$

Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Se $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ allora

1) se $0 \leq l < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) se $l > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Oss: Se $l = 1$ il criterio non si applica.

---

dim del criterio della radice.

1) $0 \leq l < 1$. Posso trovare $m \in \mathbb{R}$: $l < m < 1$.

dato che $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

$\exists \bar{n}$: se $n \geq \bar{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < m$

basta scegliere $\varepsilon = m - \ell$
nella definizione di limite.

$$\Rightarrow 0 \le a_n < m^n$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} m^n = 0$$

perché $0 < m < 1$.

Caso 2) se $\ell > 1 \Rightarrow$ posso trovare

$m: \quad 1 < m < \ell$

$\Rightarrow \exists\, \bar{n}: \text{ se } n \geq \bar{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > m$

$\Rightarrow \quad a_n > m^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} m^n = +\infty$

perché $m > 1$. $\square$

Teorema: Se $a_n > 0$ definiti

e se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Oss: Il viceversa è falso

cioè potrebbe esistere

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e non esistere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

nov 18-09:27

Es: se $a>0$ fissato

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

infatti $a_n = a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

applico il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow l = 1$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Es: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

pari $\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{1} \longrightarrow 1$

dispari $\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{2} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$.

oppure

$$1 \leq a_n \leq 2$$

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

nov 18-09:35

applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \nexists$$

nov 18-09:36

Oss.: Se $\{a_n\}$ è limitata in questo modo

$$0 < a \le a_n \le b$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

dim:

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{b}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

Es: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2 + \sin n} = 1$

$$0 < 1 \leq 2 + \sin n \leq 3$$

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

$a_n = n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

nov 18-09:42

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k}$

$k \in \mathbb{N}$ fissato.

$a_n = n^k$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b^n} = b$

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty$$

nov 18-09:45

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n-1}}$

$a_n = 3^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$$

$$\sqrt[n]{3^{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{3}} = \frac{3}{\sqrt[n]{3}} \to \frac{3}{1}$$

$$\sqrt[n]{3^{n-1}} = \left(3^{n-1}\right)^{1/n} = 3^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= e^{\log\left(3^{\frac{n-1}{n}}\right)} = e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)\log 3} \quad \to 1$$

$$\to e^{\log 3} = 3$$

Caso critico $\ell = 1$.

Se $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ cosa potrebbe succedere?

Es: $a_n = n$ $\quad \sqrt[n]{a_n} \to 1$

$a_n \to \infty$

Es: $a_n = \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$$

ma $a_n \to 0$.

Es: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$ ma $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

nov 18-09:53

Casi critici del criterio del rapporto $l = 1$

Es: $a_n = n$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$

ma $a_n \to +\infty$.

Es: $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$

ma $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

nov 18-09:55

Trovare una successione t.c.

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 .$$

$$a_n = 2 + \sin\left(\cancel{\frac{\pi}{2}} \log n\right)$$

Vediamo che $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

se $\log n$ è pari cioè

$$\log n = 2k \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$n = e^{2k}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\log n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{2k}\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2k\right) = \sin(k\pi) = 0$$

se $\log n$ è dispari

cioè $n = e^{2k+1}$

non è intero.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\log n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\log e^{(2k+1)}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) =$$

$$= \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

posso estrarre sottosuccessioni che tendono a limiti diversi.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ ?$$

$$a_{n+1} = \sin\left(\log(n+1)\right) + 2$$

$$= 2 + \sin\left(\log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= 2 + \sin\left(\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= 2 + \underbrace{\sin(\log n)}_{b_n} \underbrace{\cos\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}_{c_n} +$$

$$+ \underbrace{\cos(\log n) \sin\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}_{d_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \cos(\log(1+0)) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \text{limitata} \cdot \sin(\log(1+0)) = 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_n c_n + d_n + 2}{b_n + 2} =$$

$$= \frac{b_n + 2 - b_n + b_n c_n + d_n}{b_n + 2} =$$

$$= 1 + \frac{b_n c_n - b_n + d_n}{b_n + 2} =$$

limitato

$$= 1 + \frac{b_n \boxed{(c_n - 1)} + d_n}{\boxed{b_n + 2}} \longrightarrow 1$$

$(c_n - 1) \to 0$

$d_n \to 0$

$b_n + 2 \to$ limitata ≥ 1

dimostriamo correttamente

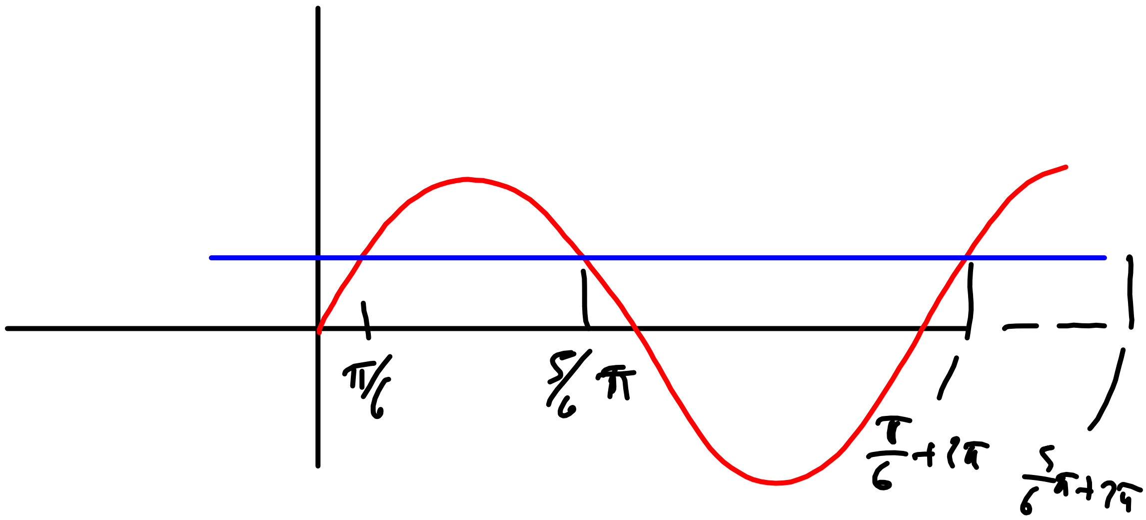
che $\nexists \lim_{n\to\infty} \sin(\log n)$

risolvo la disequazione

$$\sin(\log n) > \frac{1}{2}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < \log n < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

nov 18-10:20



π/6
5/6 π
π/6 + 2π
5/6 π + 2π

quindi

$$e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi} < n < e^{\frac{5}{6}\pi+2k\pi}$$

$k \in \mathbb{N}$ qualsiasi

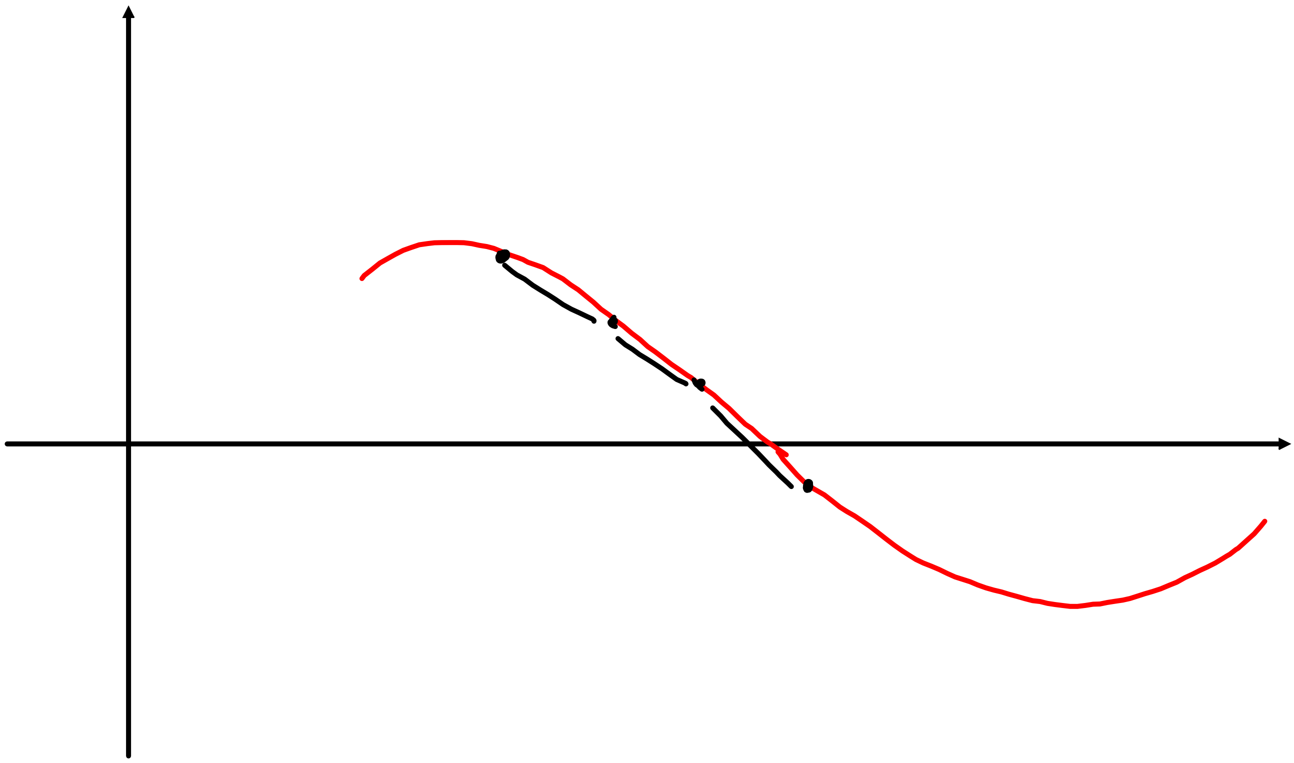
L'intervallo $\left(e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi}, e^{\frac{5}{6}\pi+2k\pi}\right)$

contiene sempre almeno 1 intero.

posso estrarre una sottosuccessione $\geq \frac{1}{2}$.

Allo stesso modo posso estrarre una sottosuccessione $\leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to \infty} a_n$.



nov 18-10:26

$$f(x) = \sin(\log x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos(\log x)}{x} \longrightarrow 0$$

per $x \to \infty$.

nov 18-10:28

Es:

$$a_n = \frac{3^n}{n!\, n^{1/n}} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

$$n^{1/n} = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

$$\frac{3^n}{n!} \quad \text{rapporto} \quad \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0$$

Es: $a_n = \left[\frac{\cos(n\pi)}{n} - (-1)^n \sin\frac{1}{n} \right] n^3$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$a_n = \left[\frac{(-1)^n}{n} - (-1)^n \sin\frac{1}{n} \right] n^3 =$

$= (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right] n^3 =$

nov 18-10:34

$$= (-1)^n n^3 \left[\cancel{\frac{1}{n}} - \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right]$$

$$= (-1)^n n^3 \left[\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{6}}_{\nexists} + \boxed{(-1)^n o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

nov 18-10:37

Es: $a_n = 3n + \sin n$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty +$ limitata $= +\infty$.

verificare che è strett. crescente.

$a_{n+1} > a_n$?

$3(n+1) + \sin(n+1) > 3n + \sin n$

$\cancel{3n} + 3 + \sin(n+1) - \cancel{3n} - \sin n > 0$

$$3+\sin(n+1)-\sin(n)\geq 3-1-1=1>0$$

<u>vera</u>.

Secondo metodo

$$f(x)=3x+\sin x$$

$$f'(x)=3+\cos x\geq 2>0$$

f è strett. crescente

$\Rightarrow a_n=f(n)$ è strett. crescente.