Successioni

Def.: Una funzione che ha come dominio una semiretta di $\mathbb{N}$ si dice successione.

$$S = \text{semiretta di } \mathbb{N}$$

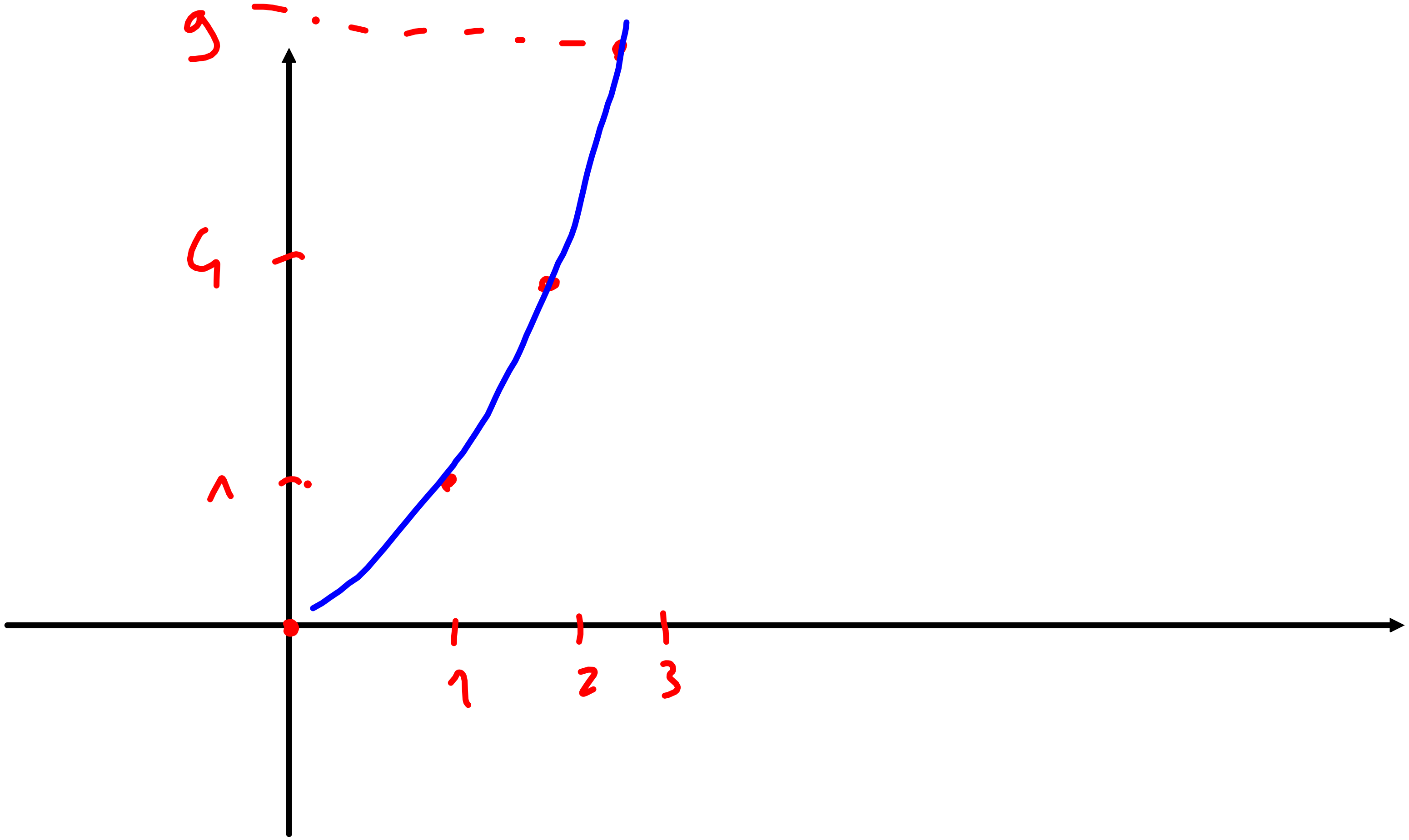
$$S = \{ n : \mathbb{N} : n \geq n_0 \}$$

Es.: $S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 5 \} =$

$= \{ 5, 6, 7, 8, \ldots \}$

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

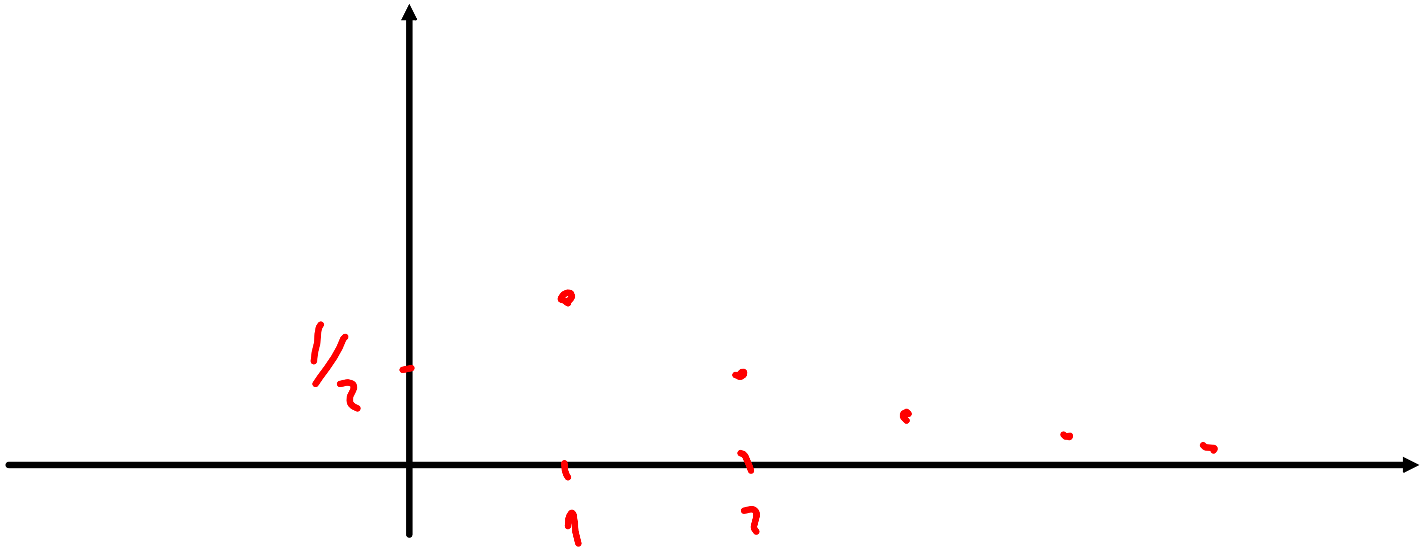
$f(n) = n^2$ $\qquad S = \mathbb{N}$



nov 16-11:19

Es: $S = \{ n \geq 1 \}$

$f(n) = \frac{1}{n}$



nov 16-11:20

Notazione

$$a : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a(n)$

invece di scrivere $a(n)$

scriviamo a_n

Es: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{7}$

nov 16-11:22

Per indicare tutta la successione
si usa il simbolo

$\{a_n\}_n$ oppure $\{a_n\}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{a_n\}_{n\in S}$

intendendo

$\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$, $\{a_n : n\in S\}$

nov 16-11:23

Es:

$$a_n = \frac{1}{n-5}$$

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 6 \}$$

non è ammesso un dominio del tipo $S = \{ n \in \mathbb{N} : n \neq 5 \}$ perché S non è una semiretta

Limite di una successione.

L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Ha senso fare il limite solo a $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

Se $\forall\, \mathcal{U}$ intorno di ℓ

$\exists\, V$ intorno di $+\infty$ t.c.

se $n \in V \cap S \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}$.

V intorno di $+\infty$ è del

tipo $V = (a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

nov 16-11:29

quindi $V \cap S$ è una semiretta di $\mathbb{N}$, cioè un insieme del tipo

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$$

allora la definizione di limite diventa

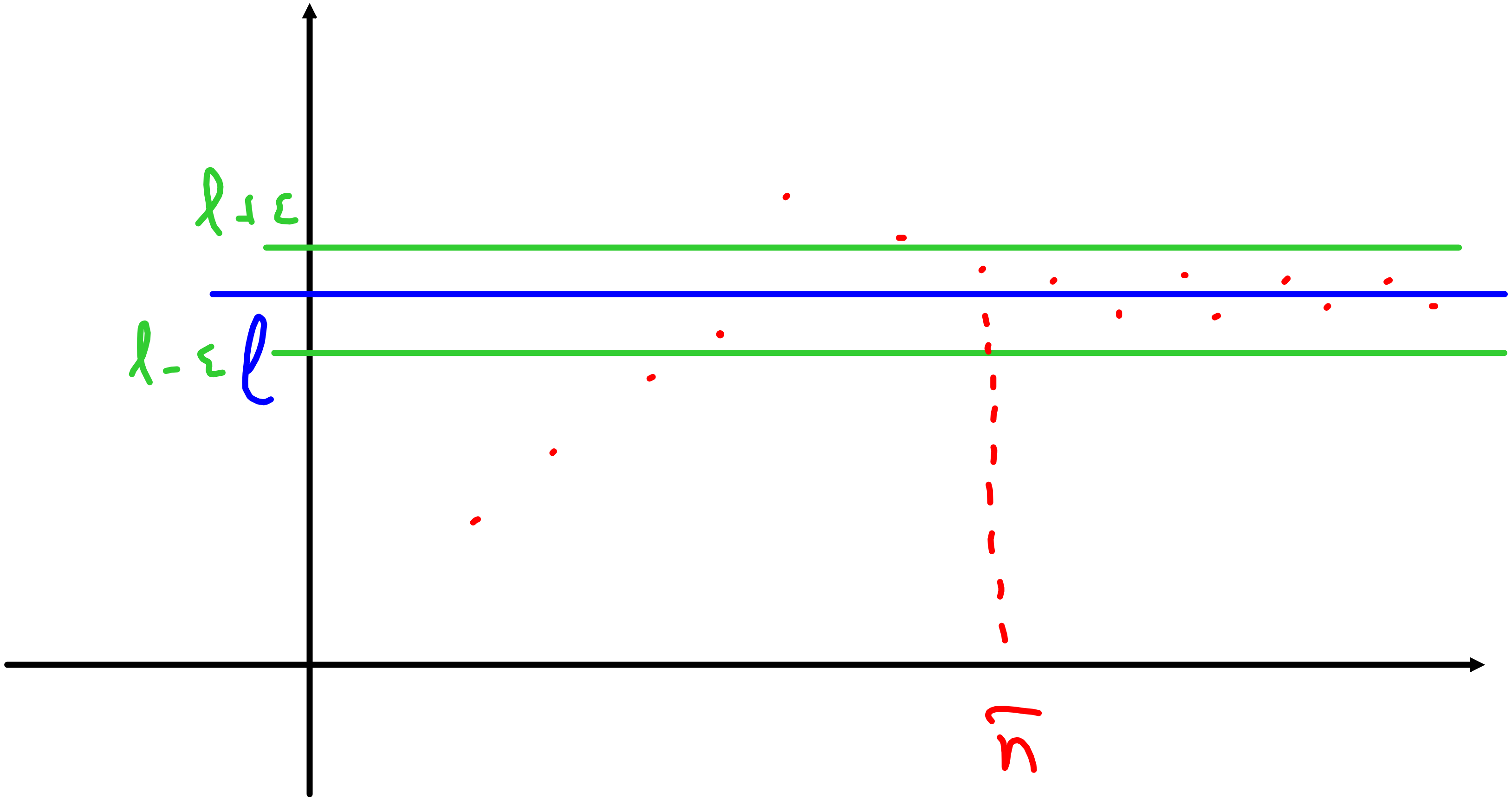
$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se

$\forall\, U$ intorno di l $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$

t.c. se $n \geq \bar{n}$ allora

$a_n \in U$.

nov 16-11:42



nov 16-11:43

Se un predicato $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$ è vero $\forall\, n \geq \bar{n}$ si dice che

$P(n)$ è vero <u>definitivamente</u>

nov 16-11:45

Quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ se

$\forall\, V$ intorno di l,

$a_n \in V$ definitivamente.

Sottosuccessioni estratte.

Data $a_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$

se prendo una successione

nov 16-11:46

$k_n : \mathbb{N} \longrightarrow S$

posso considerare la composizione

$a \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

se k_n è strettamente crescente

$a \circ k$ si dice sottosuccess. estratta da $\{a_n\}$.

nov 16-11:48

Es:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

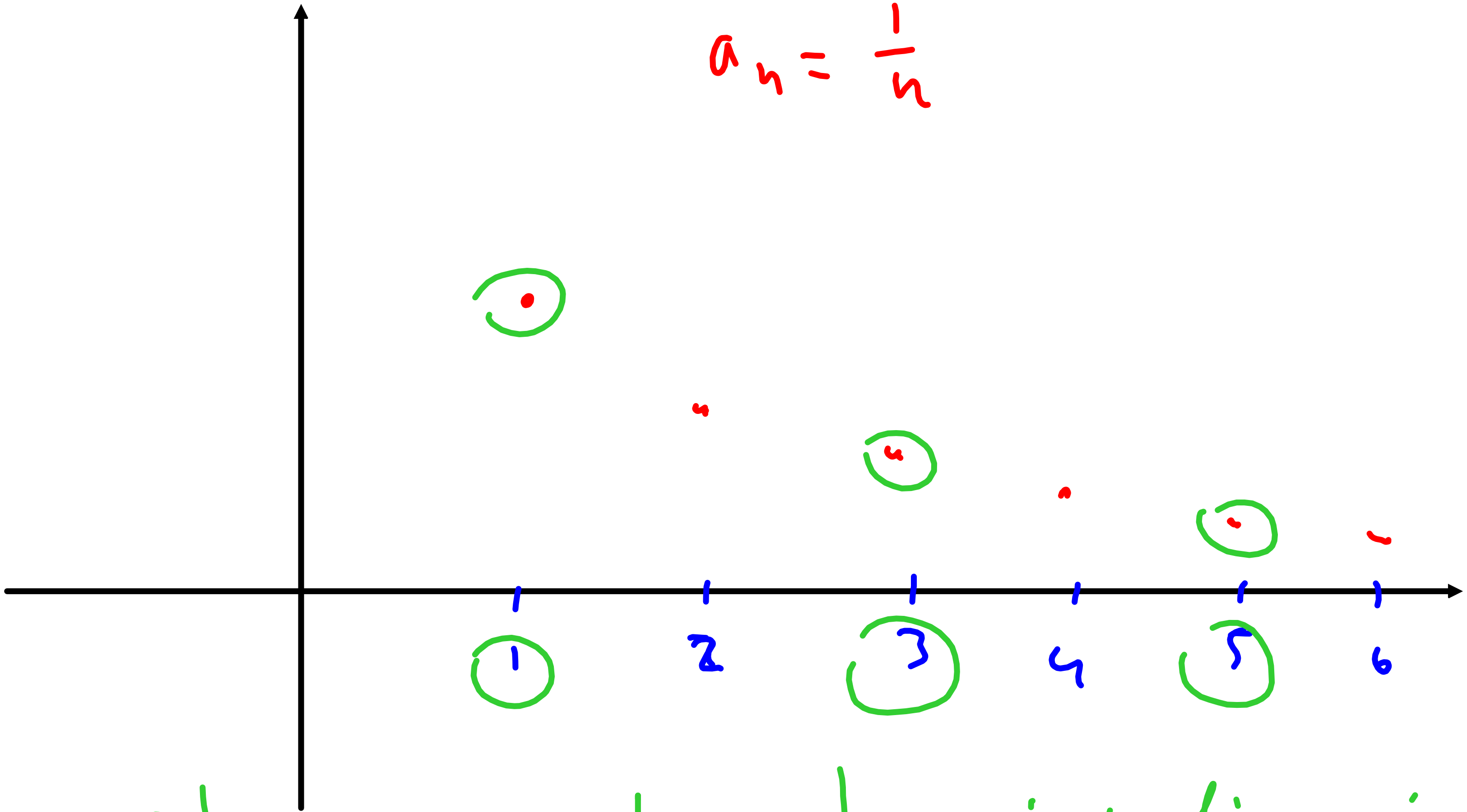
$$k_n = 2n+1$$

$$(a \circ k)(n) = a_{k_n} = a_{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

nov 16-11:49

$a_n = \frac{1}{n}$



seleziono solo i termini dispari

Teorema: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

se e solo se

$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = l$ per ogni

sottosuccessione estratta da

$\{a_n\}$.

È utile per dimostrare che il limite non esiste.

Es: $a_n = (-1)^n$

consideriamo l'estratto pari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

nov 16-11:55

Se invece prendo

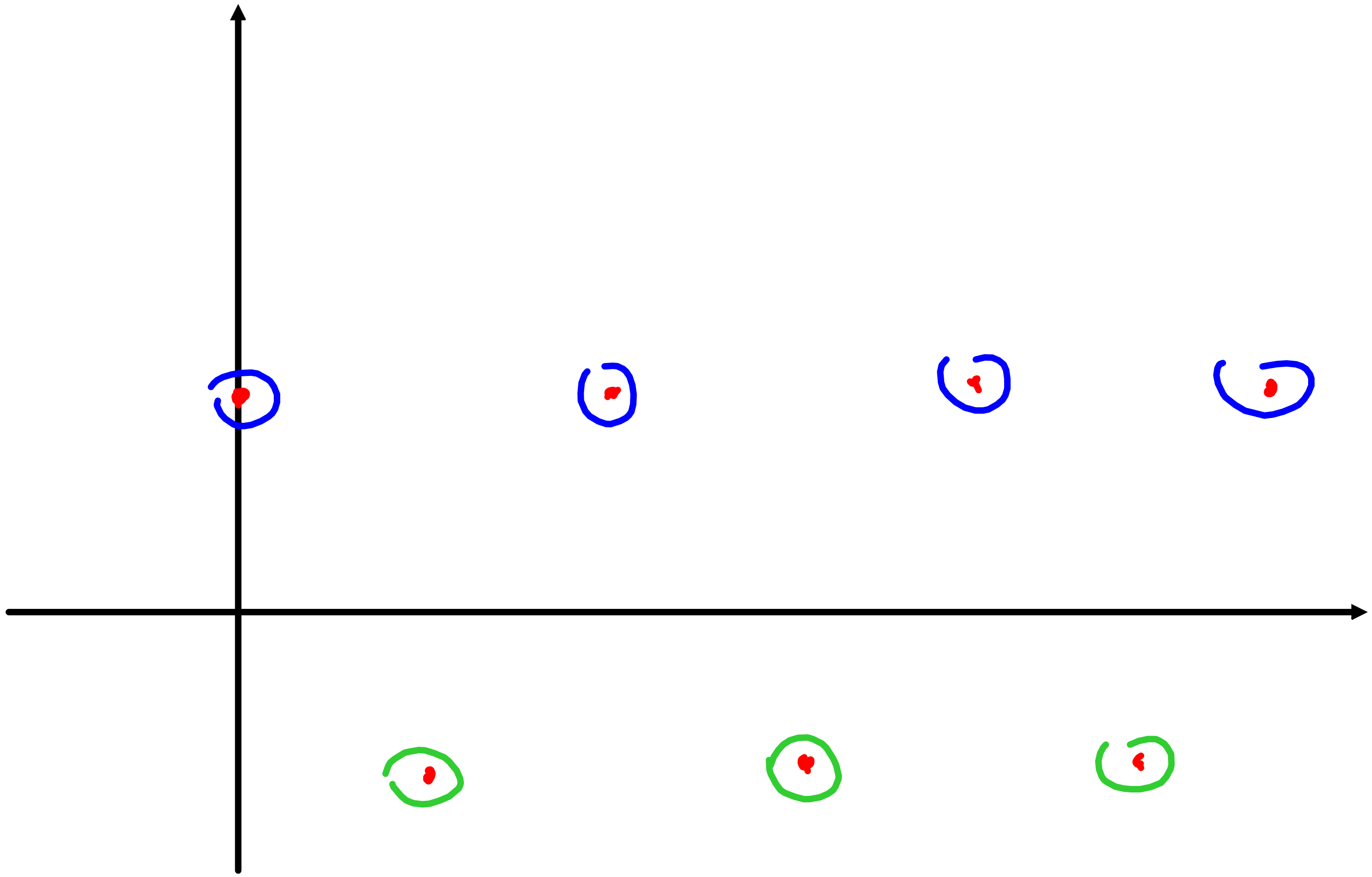
$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)(-1)^{2n} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

i due limiti sono diversi

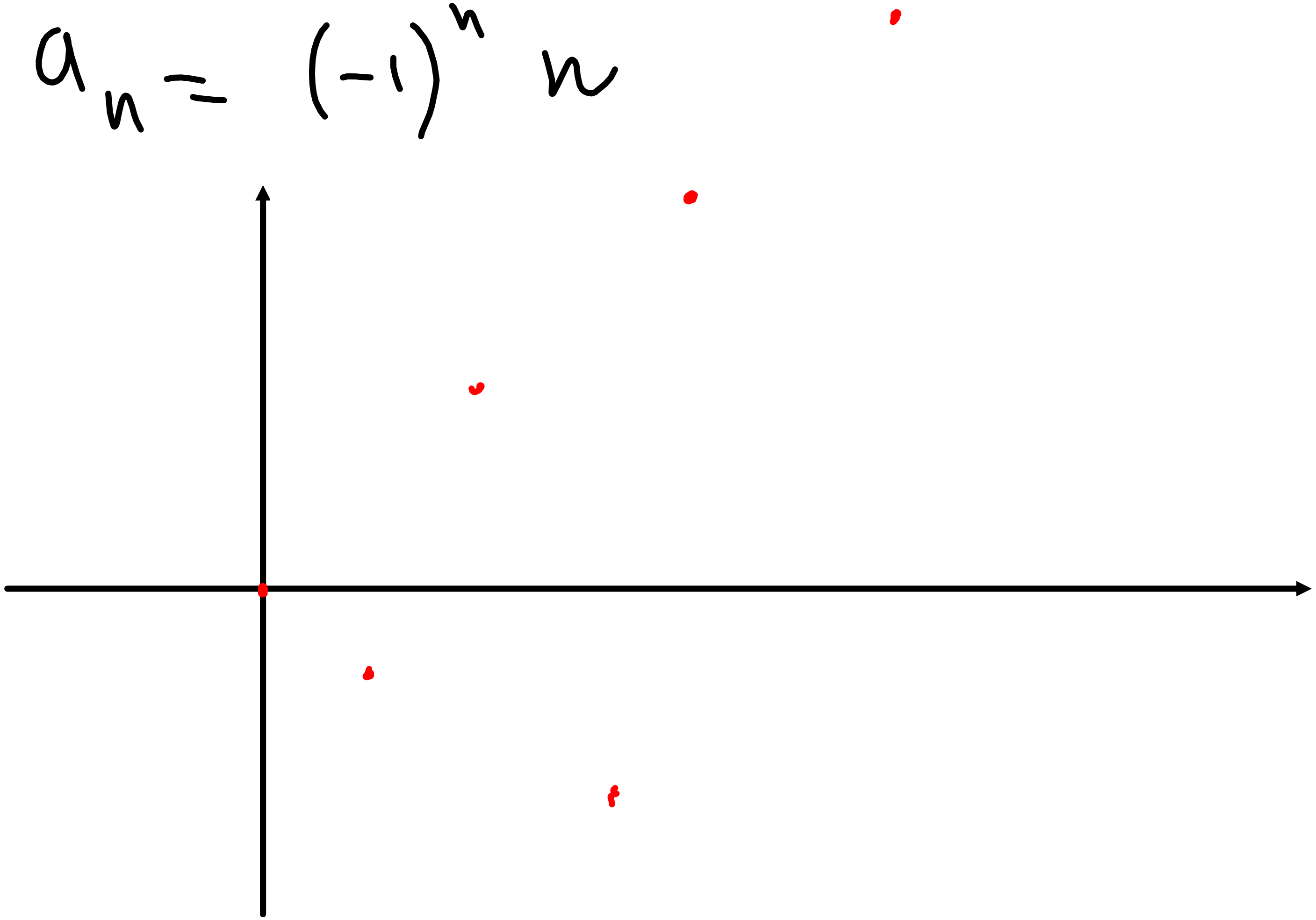
quindi $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

nov 16-11:57



nov 16-11:58

$$a_n = (-1)^n n$$



$$\{a_n\} = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots\}$$

nov 16-12:01

$$a_{2n} = (-1)^{2n} 2n = 2n \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2n+1) = -(2n+1) \to -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n .$$

nov 16-12:03

Valgono gli stessi teoremi che valgono per i limiti di funzioni.

Es: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m$.

se $l+m$ ha senso.

valgono permanenza del segno
teorema dei Carabinieri,
teorema del confronto.

Es: Teorema di confronto:

se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l$

e $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = m$

e se $a_n \leq b_n$ definitivamente

allora $l \leq m$.

Monotonia.

$\{a_n\}$ si dice debolmente crescente se $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ risulta

$a_n \leq a_m$.

Oss: $\{a_n\}$ è debolmente crescente se e solo se

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n .$$

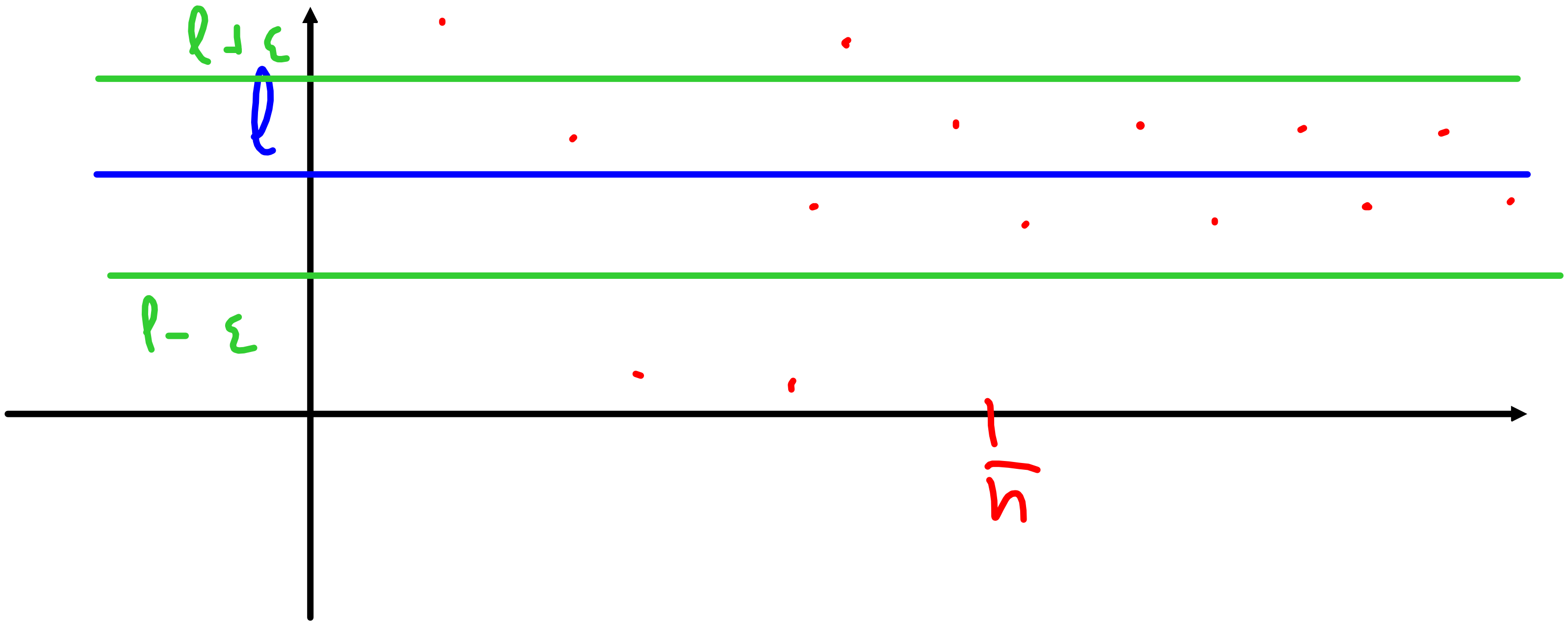
dim: se $n < m$ allora

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots a_{m-1} \leq a_m .$$

nov 16-12:11

Oss: Ogni successione $\underbrace{\text{convergente}}$ è limitata.

che ha limite finito.



nov 16-12:13

<u>dim</u>: Scelgo $\varepsilon > 0$ qualsiasi.

$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \bar{n}$

$|a_n - l| < \varepsilon$ cioè

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

risulta che $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \max\{a_0, a_1, \dots, a_{\bar{n}-1}, \ell + \varepsilon\}$$

$$a_n \geq \min\{a_0, a_1, \dots, a_{\bar{n}-1}, \ell - \varepsilon\}$$

$\square$

Differenza con le funzioni

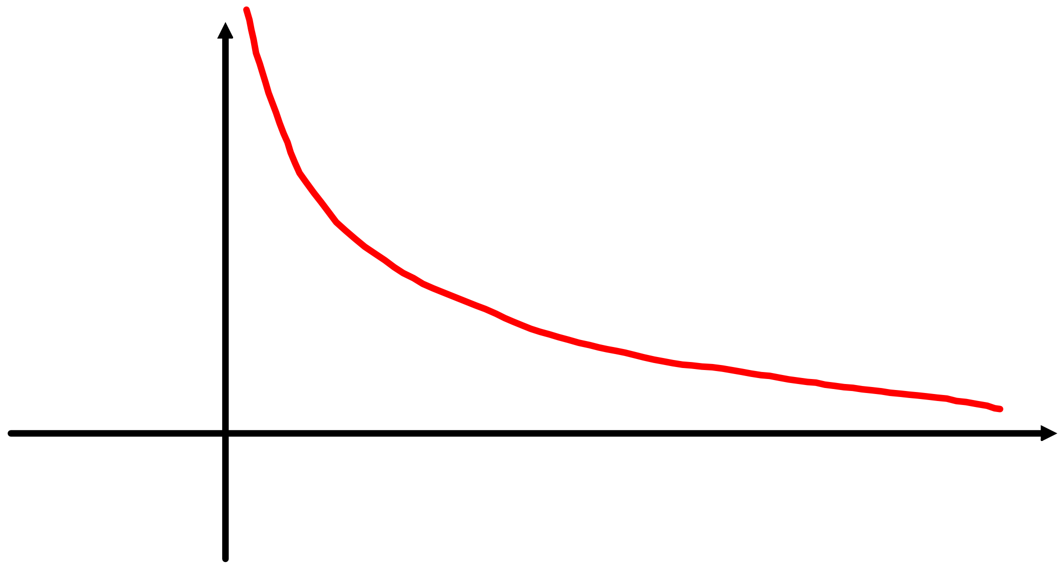
$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

nov 16-12:17

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$ è convergente all'∞

ma f non è limitata

perché $\sup f = +\infty$



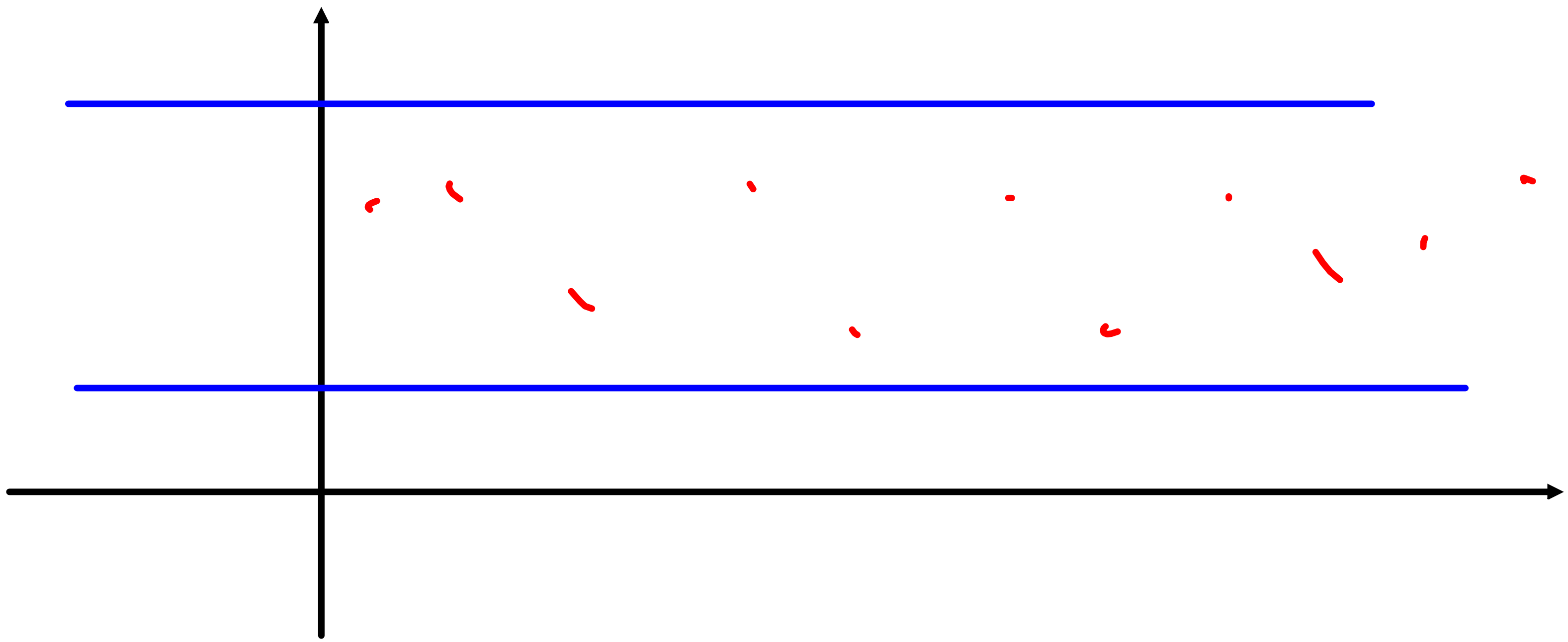
nov 16-12:19

<u>Teorema</u>: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora $\{a_n\}$ ha minimo

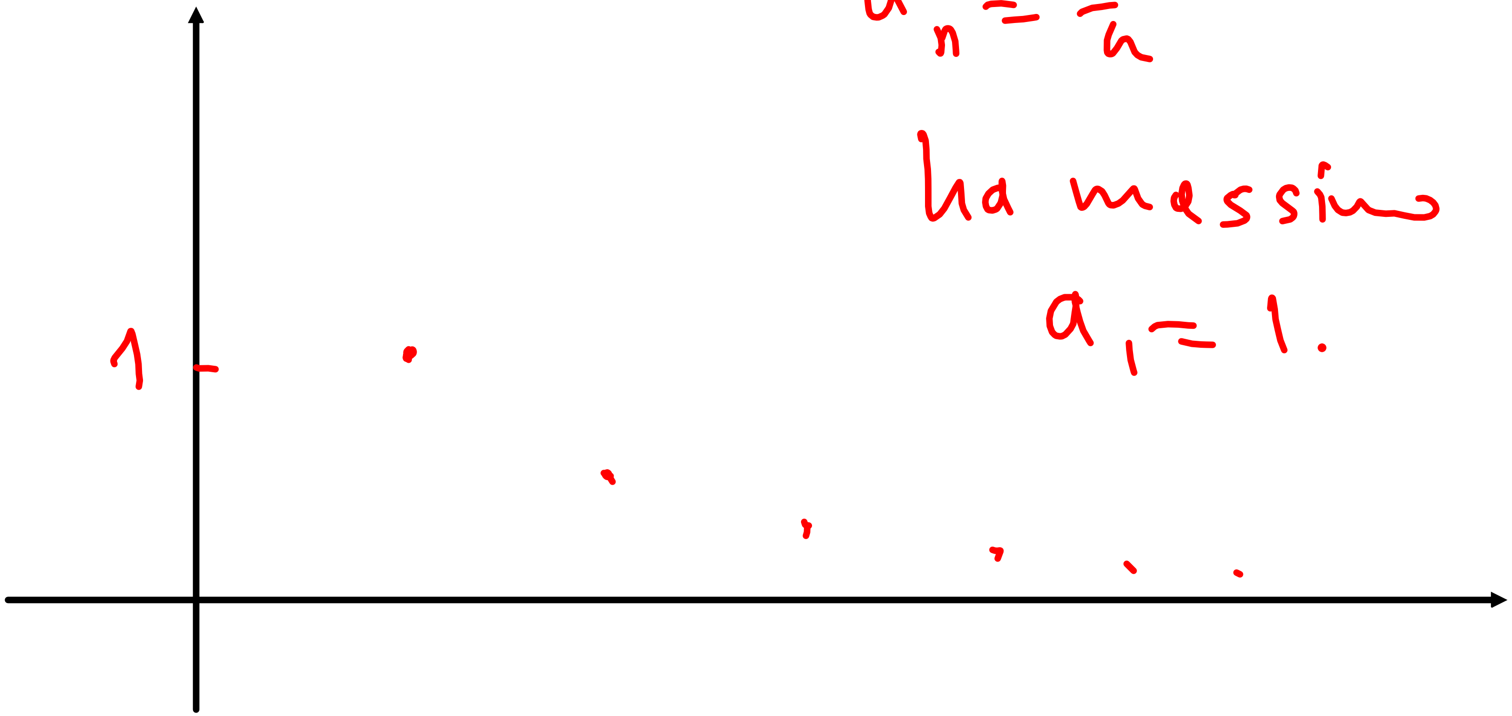
Se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ allora $\{a_n\}$ ha massimo.

nov 16-12:22

Domanda: Se $\{a_n\}$ è limitata $\Rightarrow$ ha massimo e minimo?



nov 16-12:24



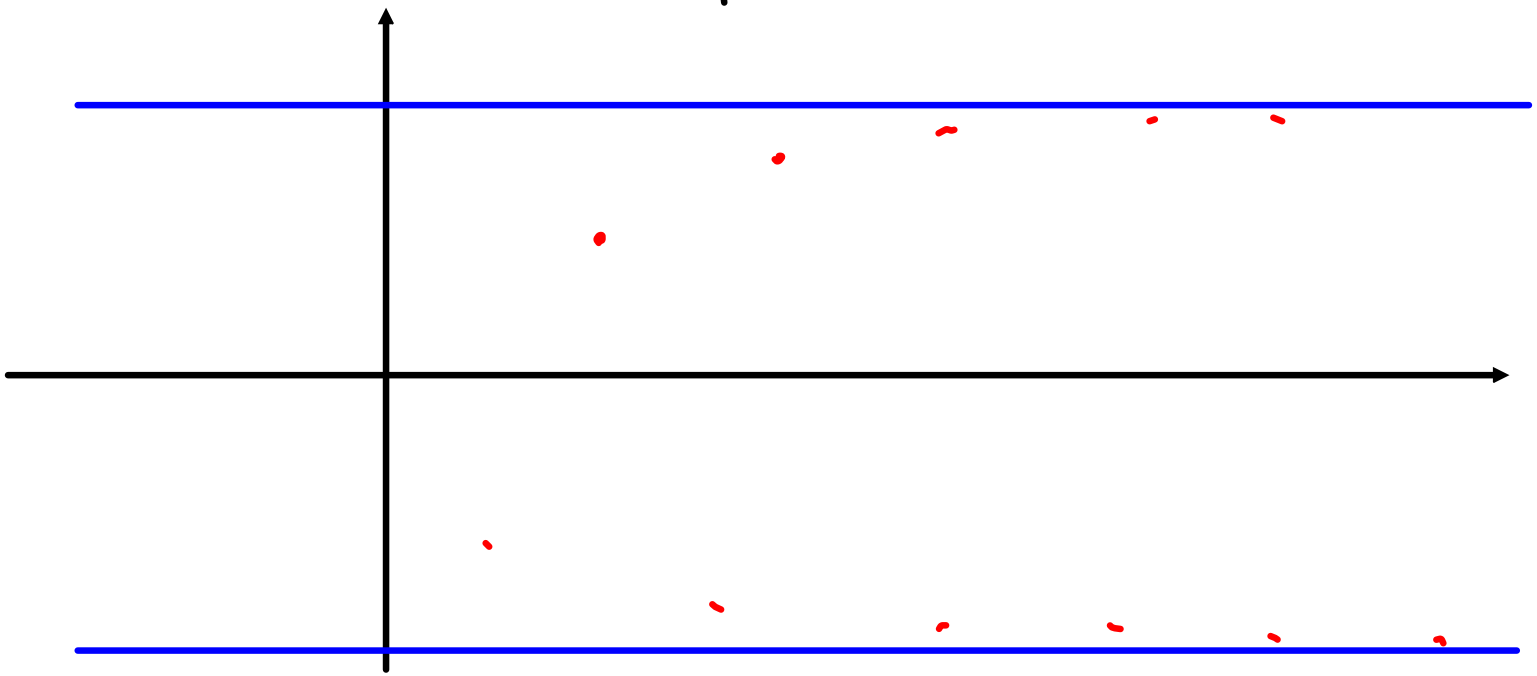
$a_n = \frac{1}{n}$

ha massimo

$a_1 = 1.$

nov 16-12:27

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n$$



nov 16-12:29

$\{a_n\}$ è limitata infatti

$$|a_n| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)(-1)^n\right| =$$

$$\left|1-\frac{1}{n}\right|\left|(-1)^n\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1 \leq 1$$

$$-1 \leq a_n \leq 1$$

nov 16-12:31

$\sup a_n = ? = 1$ perché?

$a_{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \longrightarrow 1$

$\Longrightarrow \sup a_n = 1.$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\downarrow$

-1

$\inf a_n = -1$

nov 16-12:32

Se esistesse max a_n allora

sarebbe $a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$

per un certo n

ma questo è falso.

$\{a_n\}$ non ha né max né

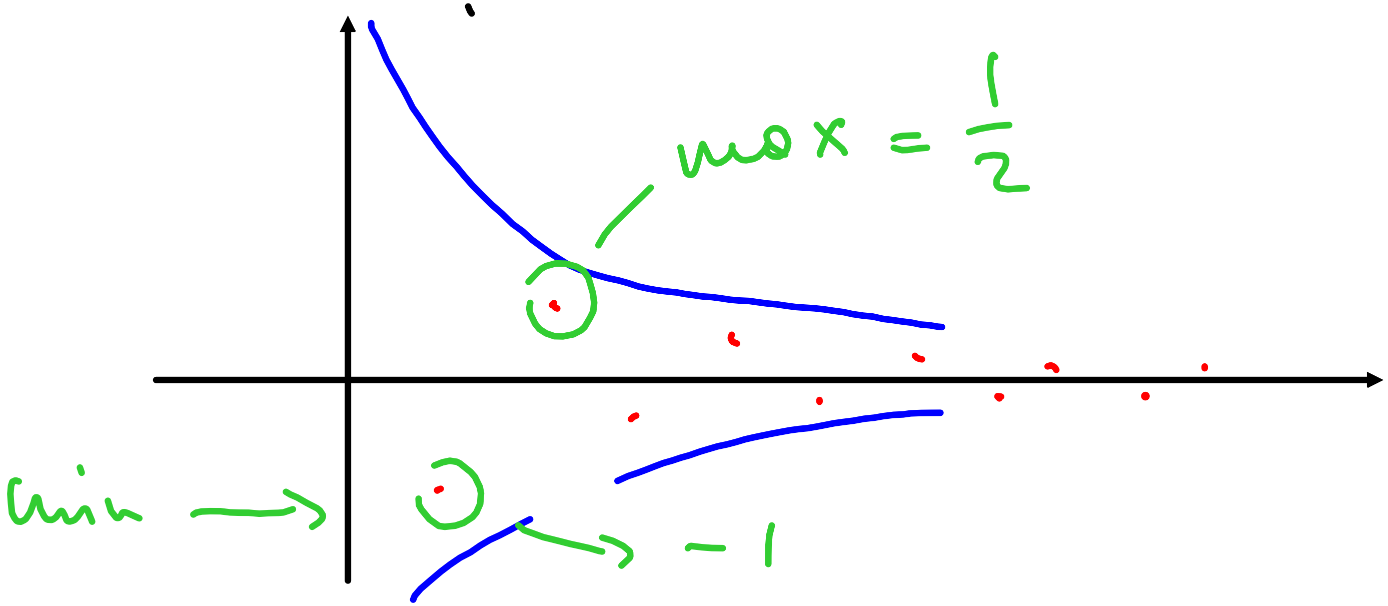
minimo.

Es: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\underbrace{(-1)^n}_{\text{limitato}} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

Es: $\frac{(-1)^n}{n} = a_n$ ha max e min?



Oss: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ finito e $\exists\, \bar{n}$: $a_{\bar{n}} \geq l$ allora $\{a_n\}$ ha massimo

Se $\exists\, \bar{n}$: $a_{\bar{n}} \leq l \Rightarrow \{a_n\}$ ha minimo.