Studiare

$$f(x) = e^{1/x}$$

insieme di definizione

$x \neq 0$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0} = 1$$

asintoto orizzontale $y = 1$

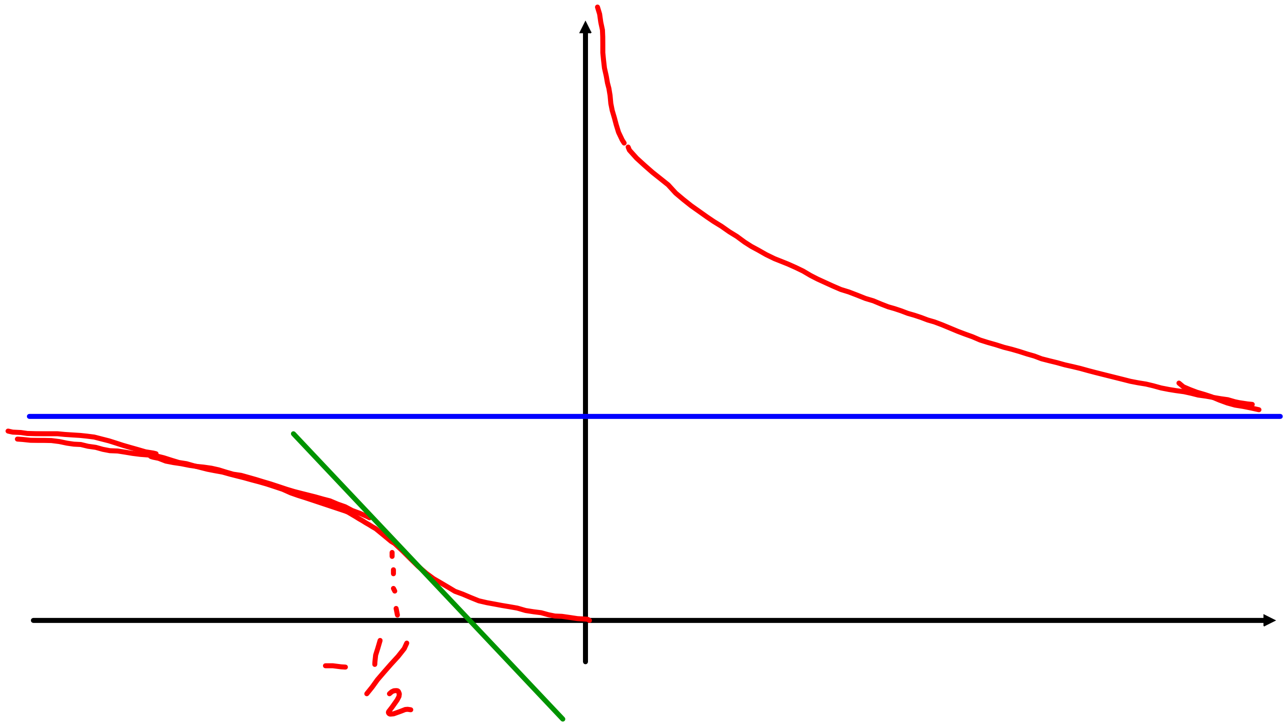
$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

asintoto verticale $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0} = 1$$

asintoto orizz. $y = 1$


$-\frac{1}{2}$

$\sup f = +\infty$

$\inf f = 0$ perché $f(x) > 0 \ \forall x$

e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

f non ha minimo perché se lo avesse dovrebbe essere

$\min f = \inf f = 0$

ma non è mai $e^{1/x} = 0$.

monotonia

$$f'(x) = e^{1/x}\,(-x)^{-2} = \frac{-e^{1/x}}{x^2} < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

quindi f è strett. decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

non ci sono max e min locali perchè il dominio è aperto f è derivabile in tutto il dominio e $f'(x) \neq 0$ sempre.

<u>Convessità</u>

$$f'(x) = -x^{-2} e^{1/x}$$

$$f''(x) = -\cdot(-2)\, x^{-3} \cdot e^{1/x} + x^{-2} x^{-2} e^{1/x}$$

$$= 2x^{-3} e^{1/x} + x^{-4} e^{1/x} =$$

$$= e^{1/x} x^{-4} (2x+1) = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

nov 11-09:22

$f''(x) \geq 0 \iff 2x+1 \geq 0$

$2x \geq -1 \qquad x \geq -\frac{1}{2}$

f è concava in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

è convessa in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

è convessa in $(0, +\infty)$

$x = -\frac{1}{2}$ è punto di flesso.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x^2} =$$

$$= \frac{-e^{1/0^-}}{0^+} = -\frac{e^{-\infty}}{0^+} = -\frac{0}{0} \quad ?$$

sostituiamo $\frac{1}{x} = y$

se $x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{-e^{y}}{1/y^2} = \lim_{y \to -\infty} -y^2 e^{y}$$

sostituisco $y = -z$

se $y \to -\infty \Rightarrow z \to +\infty$

$$\lim_{z \to \infty} -z^2 e^{-z} = \lim_{z \to \infty} \frac{-z^2}{e^z} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Def: Se f è continua in x_0
e esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$
ma $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$
e sono entrambe finite
$\Rightarrow$ x_0 si dice punto angoloso.

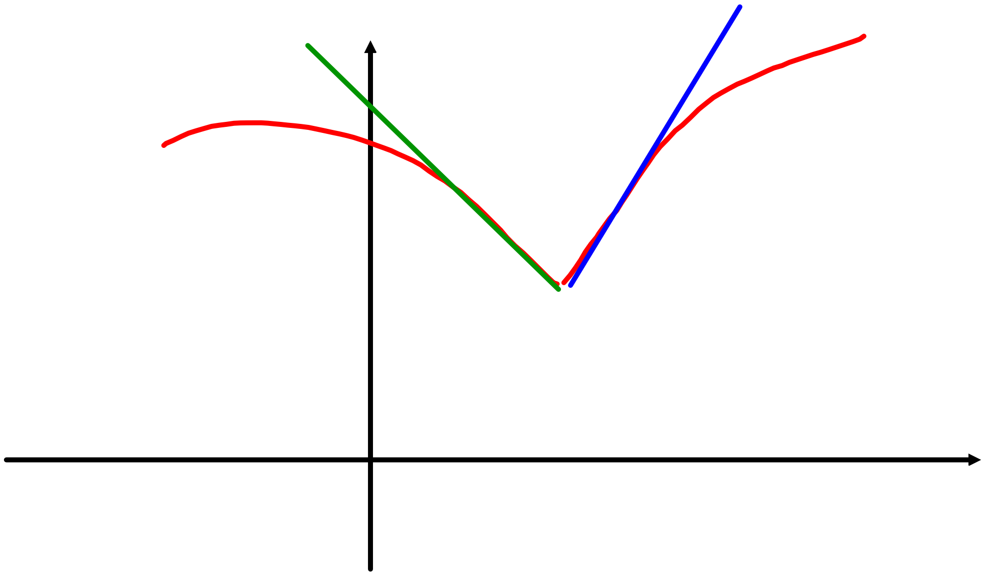
nov 11-09:36

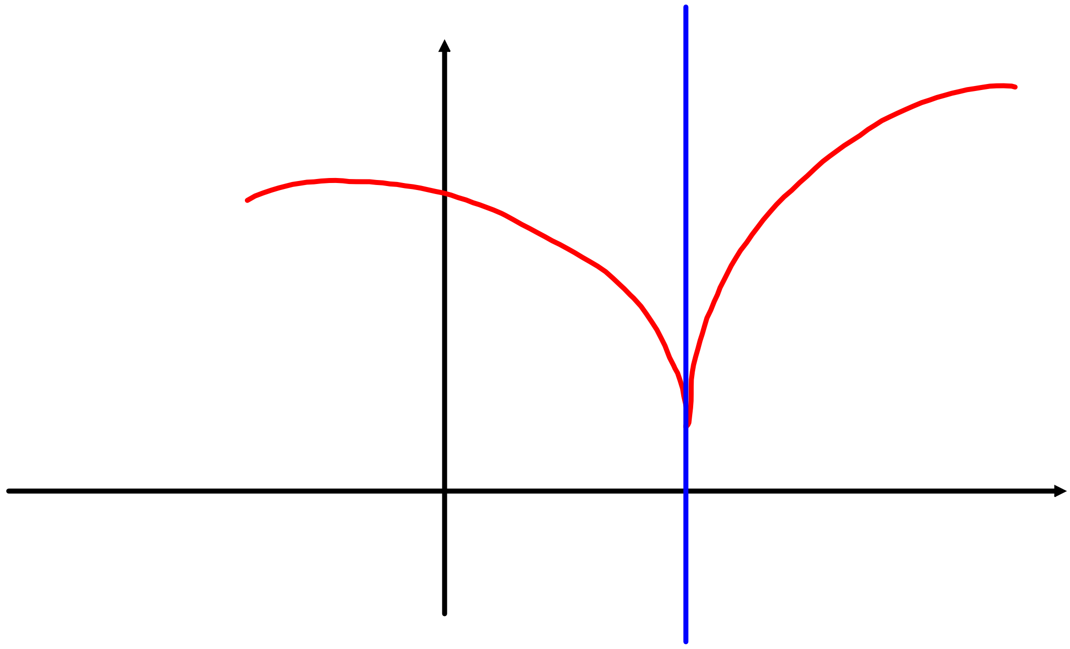
Def: Se f è continua in x_0

e $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$

o viceversa allora x_0 si

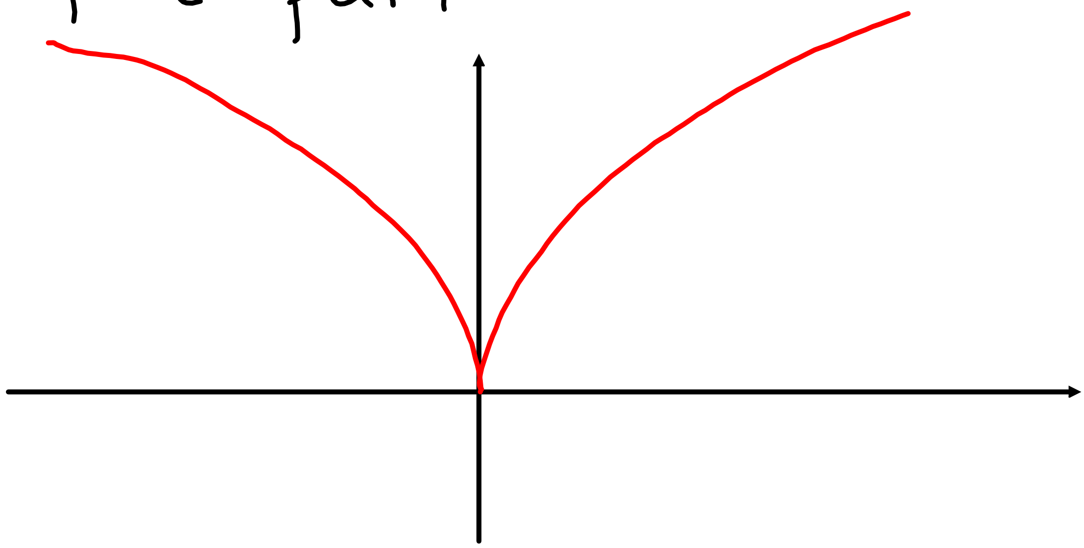
dice punto di cuspide.





Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$

f è pari



Es: $f(x) = \sqrt{1 - \log(1-x)}$

insieme di definizione

$1 - x > 0 \qquad x < 1$

$1 - \log(1-x) \geq 0$

$1 \geq \log(1-x)$

$e \geq 1 - x \Rightarrow x \geq 1 - e$

nov 11-09:44

dominio $[1-e, 1)$

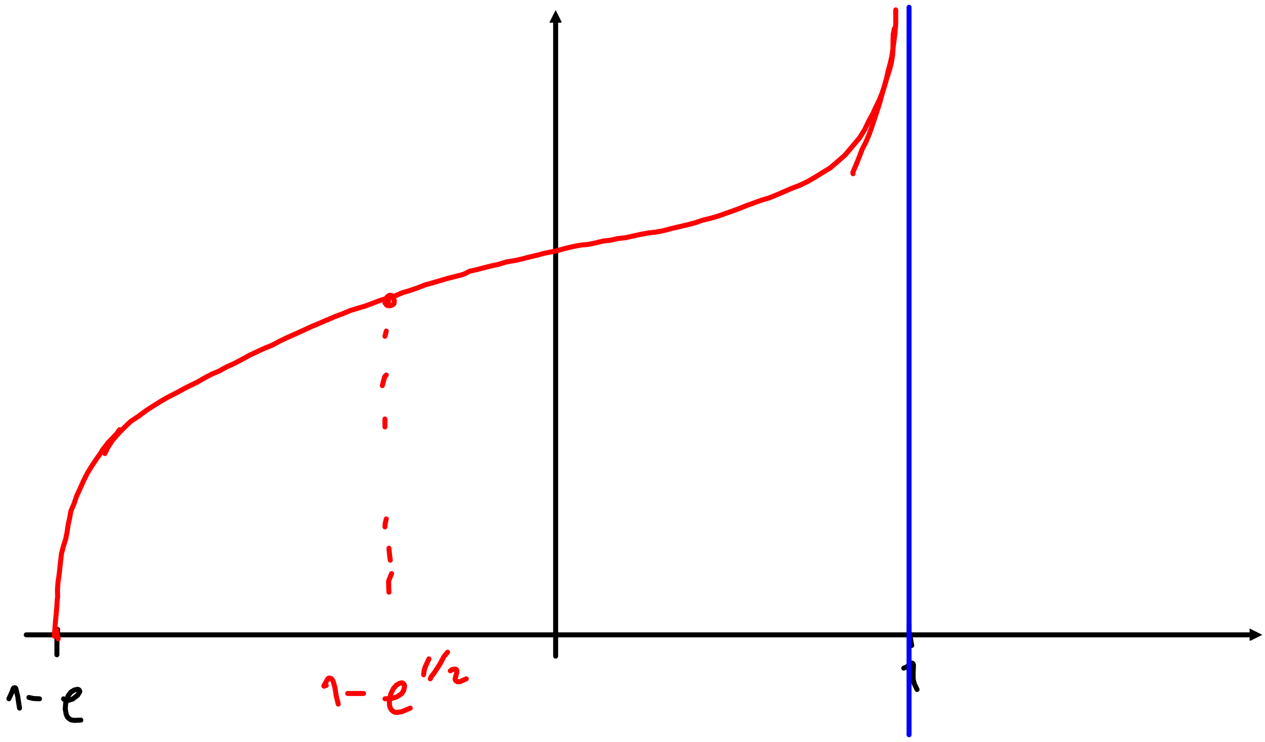
$$f(1-e) = \sqrt{1 - \log(1-(1-e))} =$$

$$= \sqrt{1 - \log e} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - \log(1-x)} =$$

$$= \sqrt{1 - \log(0^+)} = \sqrt{1 + \infty} = +\infty$$

asintoto verticale $x = 1.$



$\sup f = +\infty$

$\min f = 0$ perchè $f(x) \geq 0$

$\forall x \in$ dominio e $f(1-e) = 0$.

$1-e$ è punto di minimo.

$$f(x) = \left[1 - \log(1-x)\right]^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \log(1-x)\right]^{-1/2}\left(-\frac{1}{1-x}(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}\,\left[1-\log(1-x)\right]^{-1/2} > 0$$

segno

$$\frac{1}{1-x} > 0 \iff 1-x>0 \iff x<1$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ sempre.

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-\log(1-x)}}$$

nov 11-09:57

Se $x = 1-e$ non posso scrivere la derivata. Quindi f è derivabile in $(1-e, 1)$.
Controllo in $1-e$.
Dato che f è continua in $1-e$ calcolo

$$\lim_{x \to 1-e^+} f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(1-e)} \cdot \frac{1}{\sqrt{0^+}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

tangente verticale in $x = 1-e$

<u>convessità</u>.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \log(1-x)\right)^{-1/2} \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left\{ \left[1-\log(1-x)\right]^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-1(-1)}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} + \left[1-\log(1-x)\right]^{-1/2}\frac{-1(-1)}{(1-x)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\log(1-x)\right]^{-3/2}\frac{1}{(1-x)^2}\left\{-\frac{1}{2}+1-\log(1-x)\right\}$$

>0 >0

segno di f''

$f''(x) > 0 \iff$

$\frac{1}{2} - \log(1-x) > 0$

$\frac{1}{2} > \log(1-x) \qquad e^{1/2} > 1-x$

$x > 1 - e^{1/2}$

f è concava in $[1-e, 1-e^{1/2}]$

convessa in $[1-e^{1/2}, 1)$

$1-e^{1/2}$ è punto di flesso

Studiare $f(x) = \begin{cases} x^4 \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

definita in $\mathbb{R}$.

f è pari.

$$f(-x) = (-x)^4 \log|-x| = x^4 \log|x| = f(x)$$

la studiamo per $x \geq 0$.

nov 11-10:17

$$\lim_{x \to 0^+} x^4 \log|x| = \lim_{x \to 0^+} x^4 \log x = 0$$

f è continua a destra in 0

è continua anche a sinistra

perchè è pari.

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 \log|x| = +\infty$$

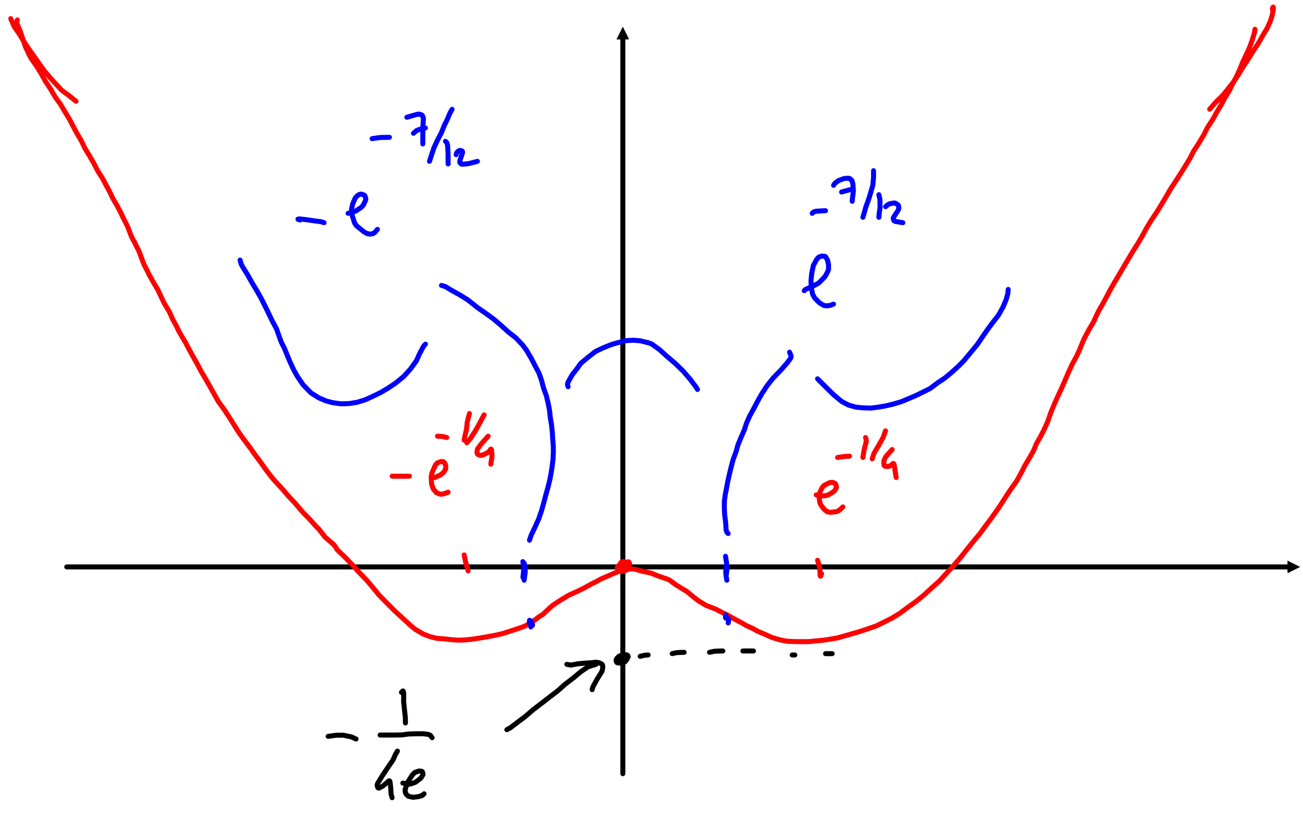
$\sup f = +\infty$

f ha minimo.

potrebbe avere un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\cancel{4}\,3} \log|x|}{\cancel{x}} = +\infty$$

non c'è asintoto obliquo.



$-e^{-7/12}$
$e^{-7/12}$
$-e^{-1/4}$
$e^{-1/4}$
$-\frac{1}{4e}$

$f'(x)$ per $x > 0$.

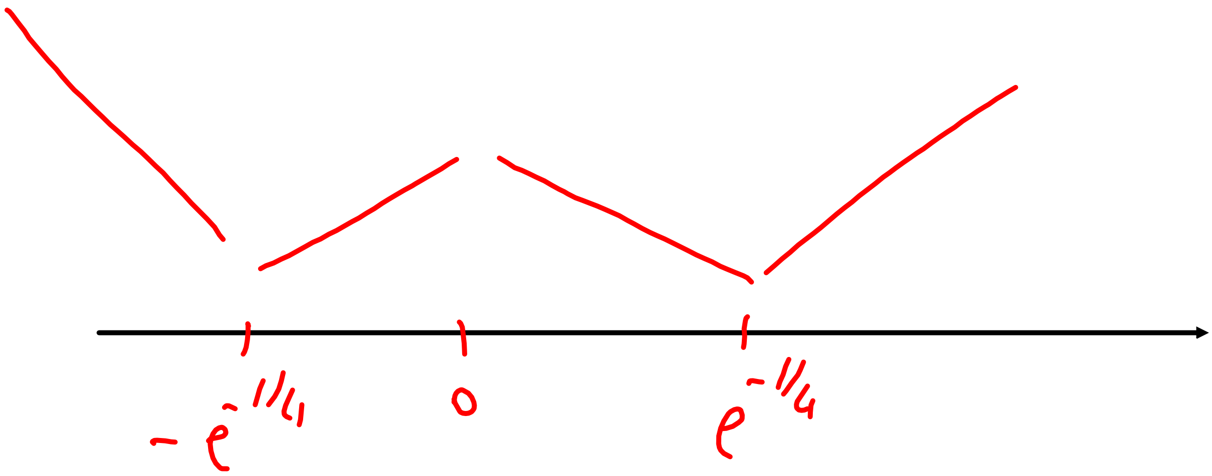
$f(x) = x^4 \log x$

$f'(x) = 4x^3 \log x + x^{\cancel{4}\,3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$

$= x^3 (4 \log x + 1)$

$f'(x) \geq 0 \iff 4 \log x + 1 \geq 0$

$\log x \geq -\frac{1}{4}$ $\quad x \geq e^{-1/4}$



$-e^{-1/4}$, $e^{-1/4}$ sono punti di minimo assoluto, 0 è punto di max locale

$$\min(f) = f\left(e^{-1/4}\right) =$$

$$= \left(e^{-1/4}\right)^4 \log e^{-1/4} = e^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4e} \leftarrow \min(f)$$

è derivabile in $x=0$?

f è continua in 0 quindi

posso calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3\left[4\log x + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{4x^3\log x} + \cancel{x^3} \to 0 \quad = 0$$

$\Rightarrow \quad \exists\ f'(0) = 0.$

convessità :

$$f''(x) = 3x^2\left[4\log x + 1\right] + x^{\overset{2}{\cancel{3}}}\,\frac{4}{\cancel{x}} =$$

$$= 3x^2\left[4\log x + 1\right] + 4x^2 =$$

$$= x^2\left[12\log x + 7\right]$$

$$f'' \geq 0 \iff 12\log x + 7 \geq 0$$

$$\log x \geq -\frac{7}{12}$$

$$x \geq e^{-7/12}$$

f è convessa in $\left[e^{-7/12}, +\infty\right)$

f è concava in $\left[-e^{-7/12}, e^{-7/12}\right]$

f è convessa in $\left(-\infty, e^{-7/12}\right]$