Punto di flesso

Def: Se f è continua in x_0,
se esiste $f'(x_0)$ e
f è convessa in un intorno sinis.
di x_0 e concava in un intorno
destro di x_0 (o viceversa)
allora x_0 si dice punto di
flesso.

Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

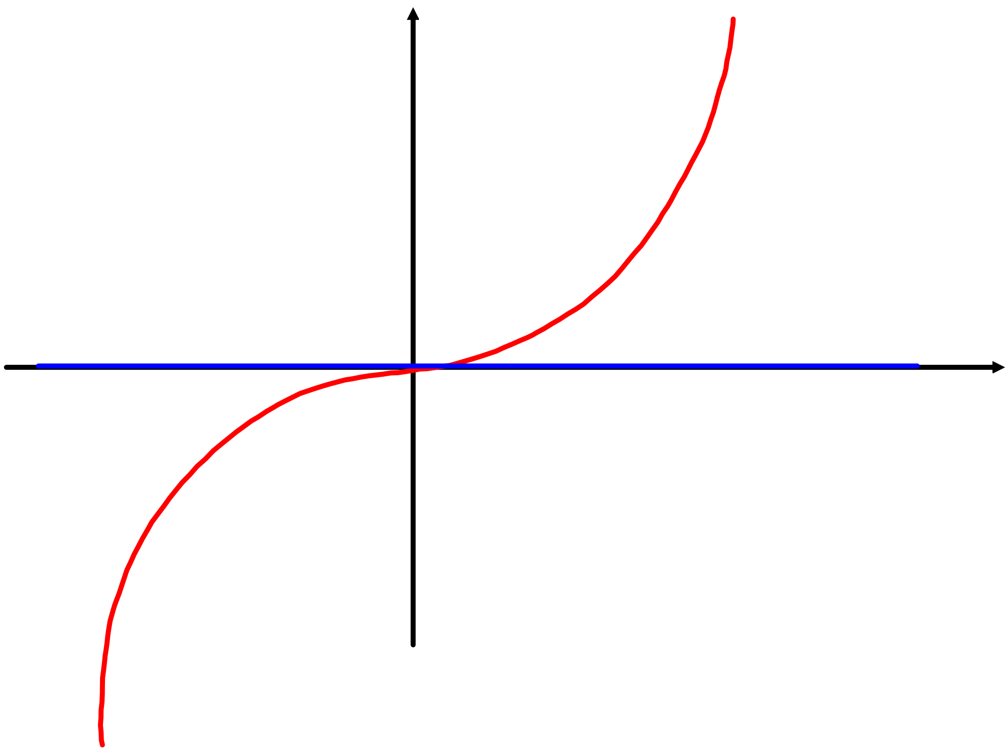
$f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$

$f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$

f è concava in $(-\infty, 0]$

f è convessa in $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è punto di flesso.



nov 10-16:19

Es: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

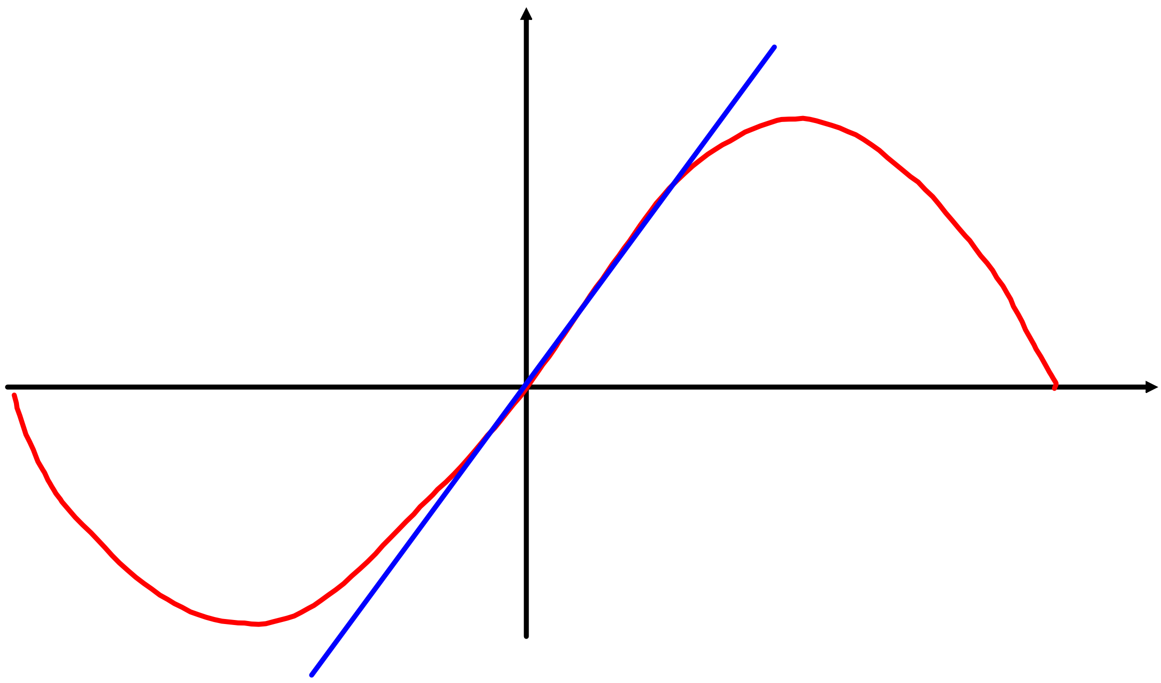
$-\sin x \geq 0 \qquad \sin x \leq 0$

$x \in [-\pi, 0]$

f è convessa in $[-\pi, 0]$

concava in $[0, \pi]$

$x_0 = 0$ è punto di flesso.



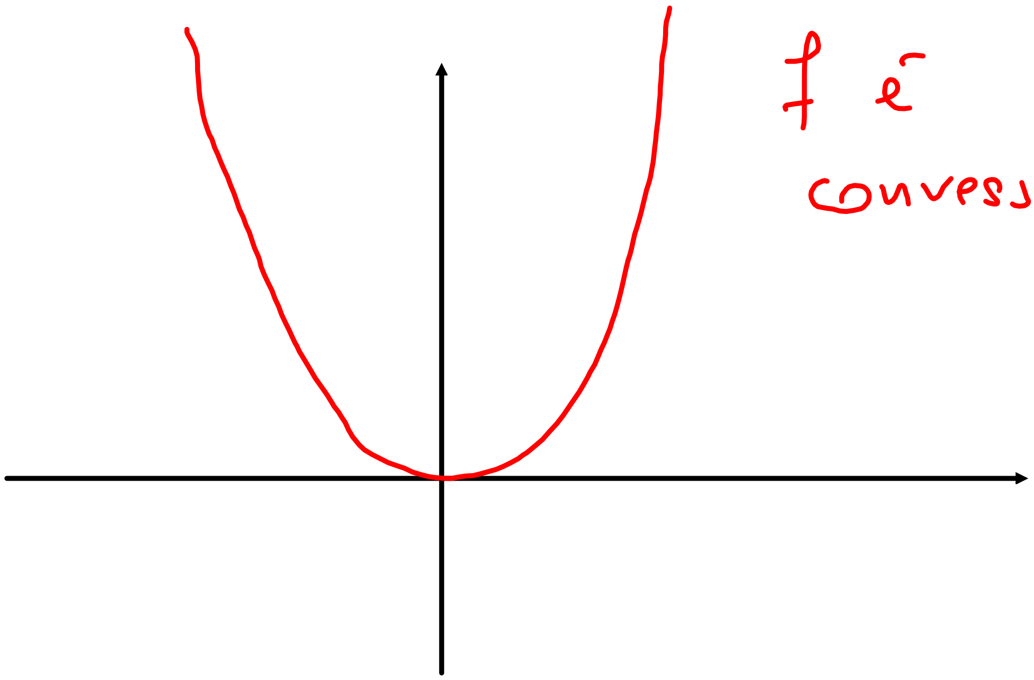
nov 10-16:22

Oss: Se f è derivabile 2 volte
e x_0 è punto di flesso
allora $f''(x_0) = 0$.
È condizione solo necessaria.

Es: $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

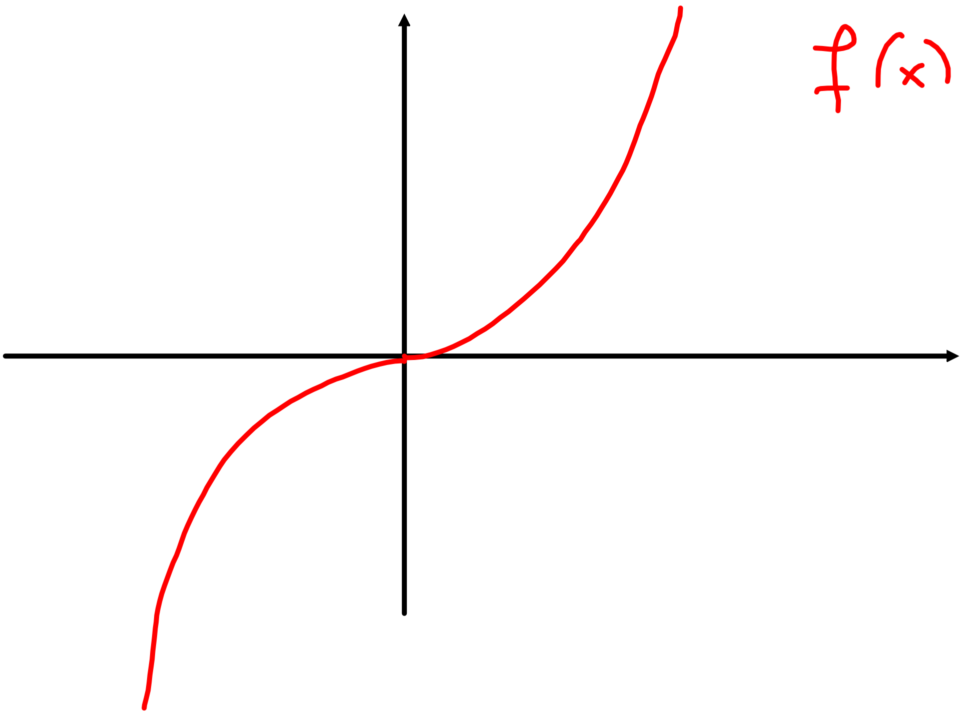


f è convessa

Possono esistere flessi dove la funzione non ha derivata seconda.

Es: $f(x) = x\,|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



nov 10-16:29

se $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x \ , \ f''(x) = 2$

se $x < 0$ $\quad f'(x) = -2x \ , \ f''(x) = -2$

f è convessa in $(0, +\infty)$

f è concava in $(-\infty, 0)$

$\exists \ f'(0)$?

f è continua in 0

$f'_+(0) = 2 \cdot 0 = 0$

nov 10-16:29

$$f'_-(0) = -2 \cdot 0 = 0$$

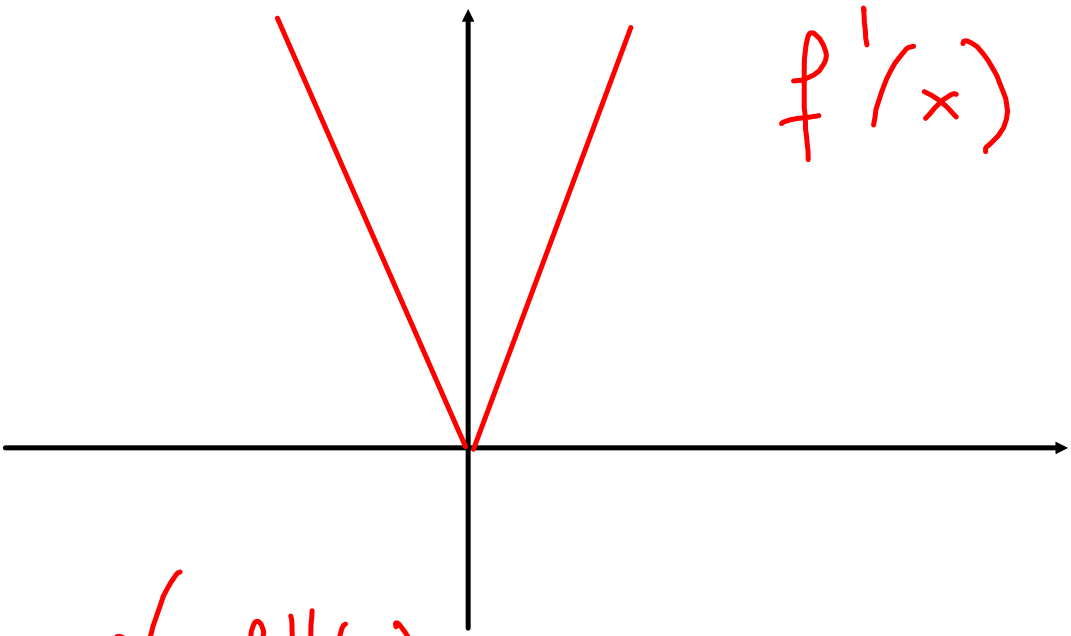
$$\Rightarrow \quad f'_+(0) = f'_-(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists \; f'(0) = 0.$$

$x_0 = 0$ è punto di flesso.

$$\exists \; f''(0) \; ?$$

nov 10-16:32



$\Rightarrow \nexists f''(0).$

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3} = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

$f'(0) = +\infty$ perché?

f è continua in 0

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} x^{-2/3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f''(x) \geq 0$ cioè

$-\frac{2}{9} x^{-5/3} \geq 0 \quad x^{-5/3} \leq 0$

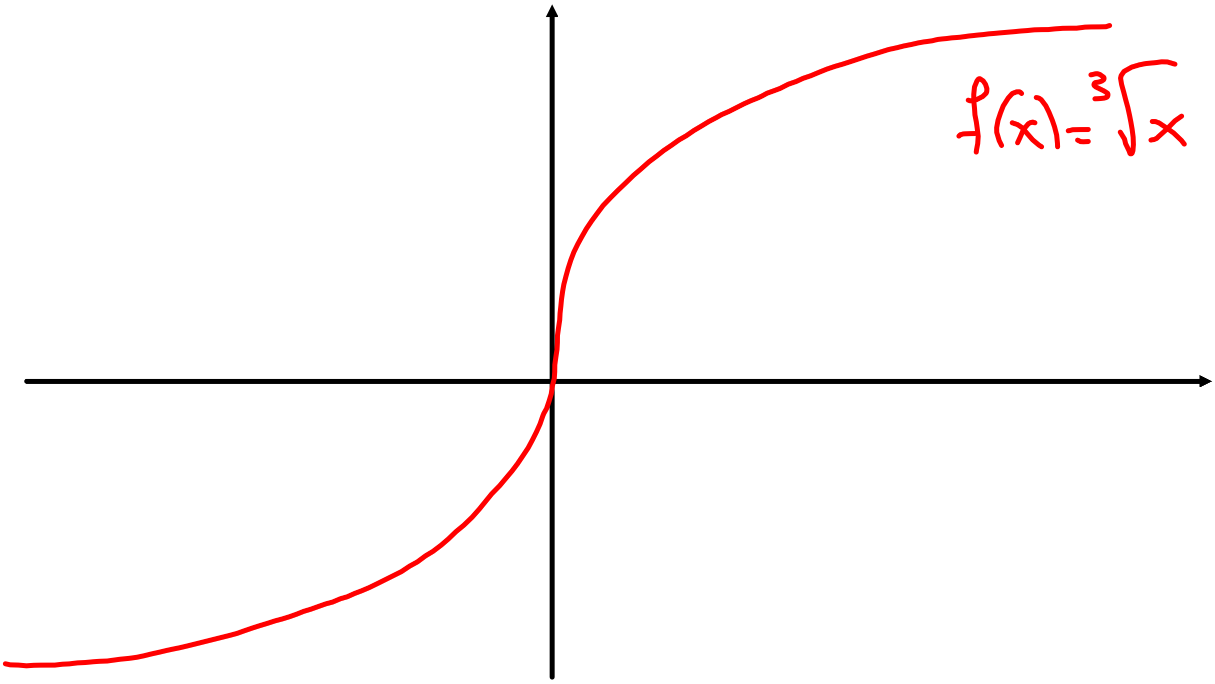
$x < 0$

f è convessa in $(-\infty, 0)$

concava in $(0, +\infty)$

$x_0 = 0$ è punto di flesso

con tangente verticale.


$f(x)=\sqrt[3]{x}$

Es: Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} \right|$$

insieme di definizione
il denominatore si annulla
se $x^2 - 2 = 0$ cioè $x = \pm\sqrt{2}$

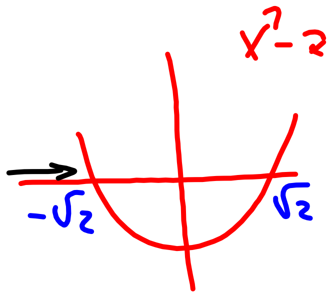
la f è definita in

$$\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

studiamo prima

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 1$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 1$$

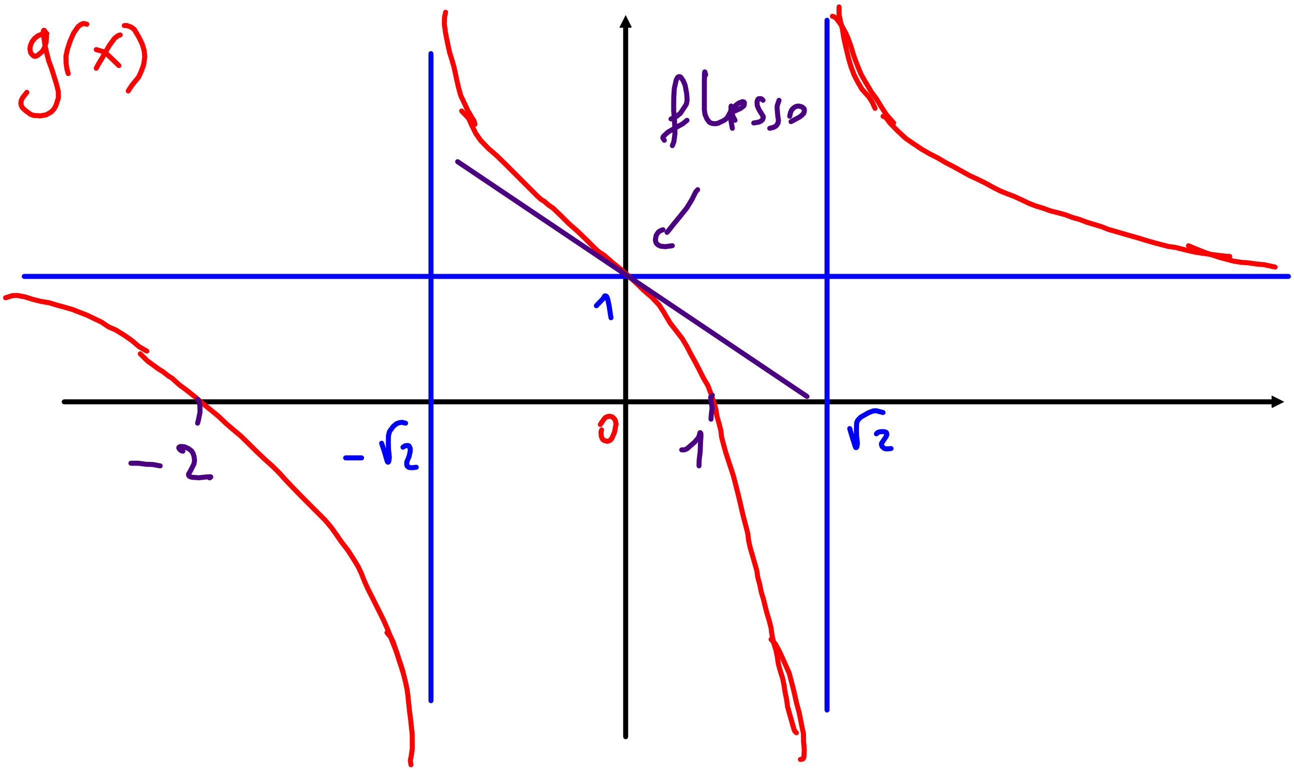
$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = \frac{\cancel{2} - \sqrt{2} - \cancel{2}}{0^+} =$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = \frac{\cancel{2} - \sqrt{2} - \cancel{2}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = \frac{\cancel{2} + \sqrt{2} - \cancel{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = \frac{\cancel{2} + \sqrt{2} - \cancel{2}}{0^+} = +\infty$$



nov 10-16:52

g è continua in tutto il dominio
quindi anche f lo è
$f = |g|$.
g è derivabile in tutto il
dominio
f lo è? NO

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-2)-(x^2+x-2)2x}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} \cancel{-4x} + x^2 - 2 \cancel{-2x^3} - 2x^2 \cancel{+4x}}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2} < 0 \quad \forall\, x \in \text{dominio}$$

g non ha né max né min locali
quindi neanche assoluti.

nov 10-16:57

g è strettamente decrescente
in $(-\infty, -\sqrt{2})$, in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
e in $(\sqrt{2}, +\infty)$
ma non è strettamente decresc.
in tutto il dominio.

Convessità.

$$g''(x) = \frac{-2x(x^2-2)^{\cancel{2}} + (x^2+2)\,2\cancel{(x^2-2)}\cdot 2x}{(x^2-2)^{\cancel{4}\,3}}$$

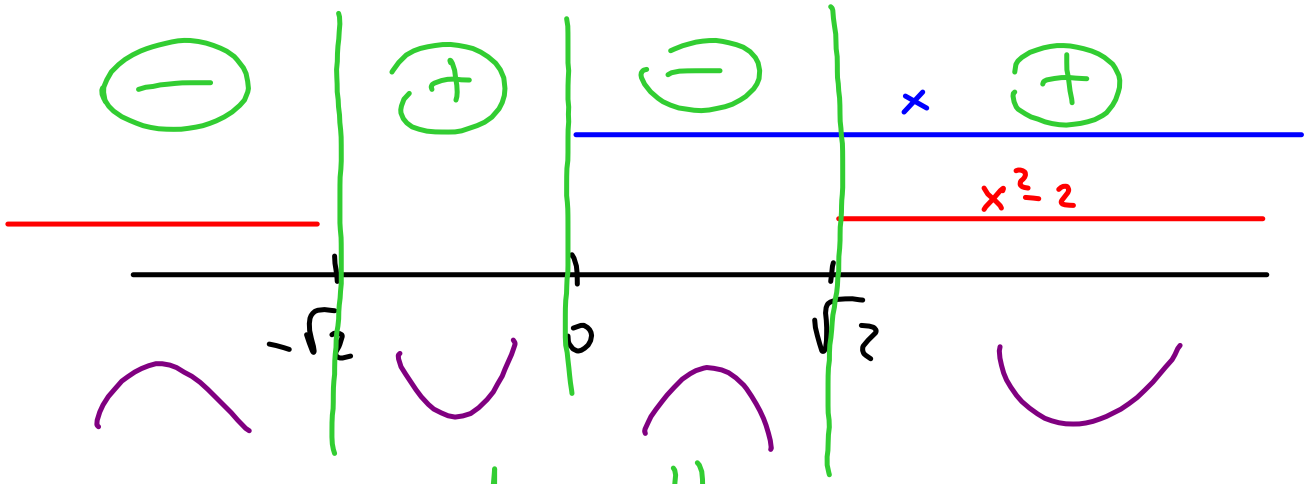
$$= \frac{-2x^3+4x+4x^3+8x}{(x^2-2)^3} = \frac{2x^3+12x}{(x^2-2)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$$

segno di g'' è il segno di $\frac{2x}{(x^2-2)^3}$

nov 10-17:05

$$x^2 - 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

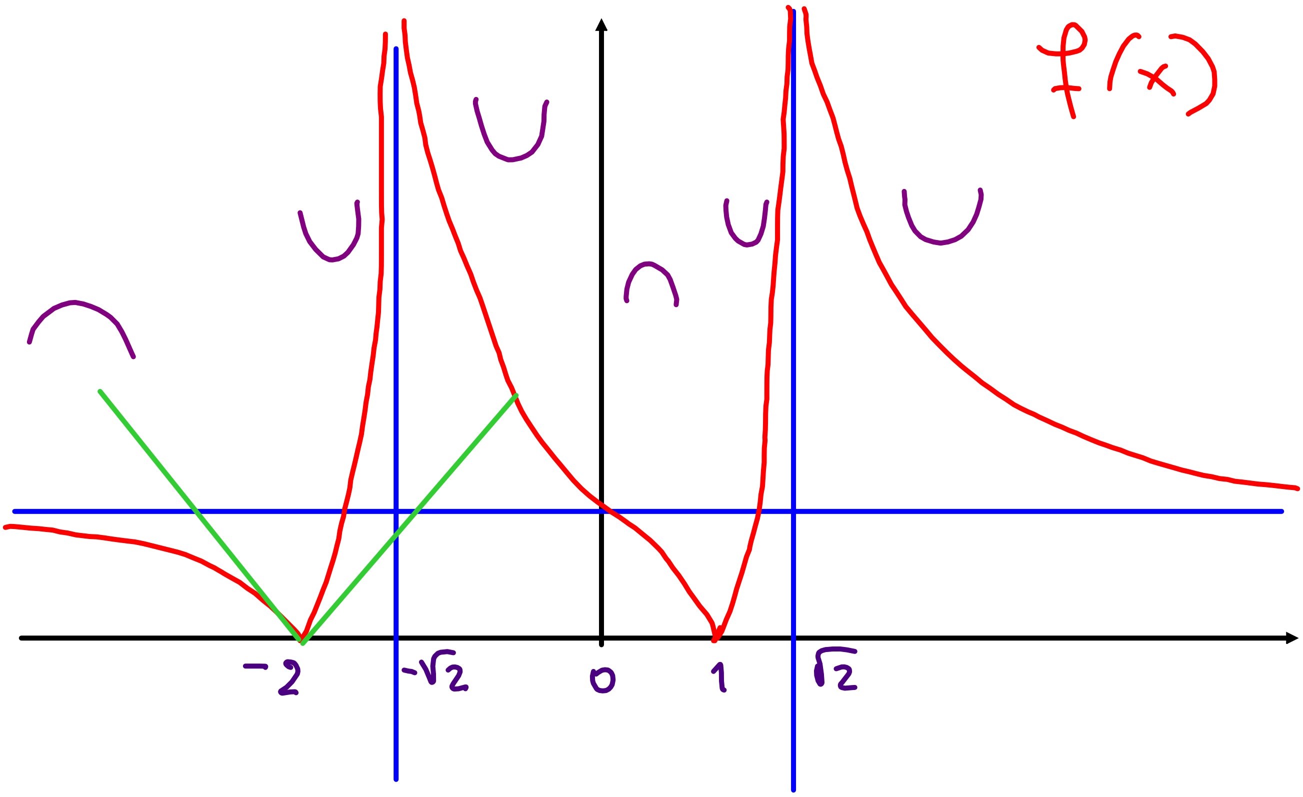


segno di g''

dato che $f = |g|$ devo trovare dove g cambia segno.

$$g = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$



f(x)
-2
-√2
0
1
√2

f ha gli asintoti verticali

$x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

l'asintoto orizzontale

$y = 1$

$\sup f = +\infty$

$\inf f = \min f = 0$

$x = -2$ e $x = 1$ sono punti di minimo assoluto (e locale).

nov 10-17:20

nei punti $x = -2$ e $x = 1$

f non è derivabile, perché

$f = |g|$ e $g'(-2) \neq 0$, $g'(1) \neq 0$

cioè:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < -2 \\ -g(x) & \text{se } -2 < x < -\sqrt{2} \end{cases}$$

allora $f'_-(-2) = g'(-2)$

invece $f'_+(-2) = -g'(-2)$

dato che $g'(-2) \neq 0$ risulta

$$f'_-(-2) \neq f'_+(-2)$$

Lo stesso succede in $x=1$.

f è derivabile in

$$\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 1\}$$

f ha un flesso in $x = 0$

f è concava in

$(-\infty, -2]$ in $[0, 1]$

f è convessa in

$[-2, -\sqrt{2})$, in $(-\sqrt{2}, 0]$ in $[1, \sqrt{2})$

e in $(\sqrt{2}, +\infty)$

$$f(x) = e^{1/x}$$

studiare .