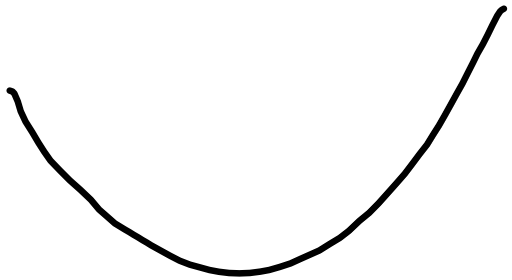
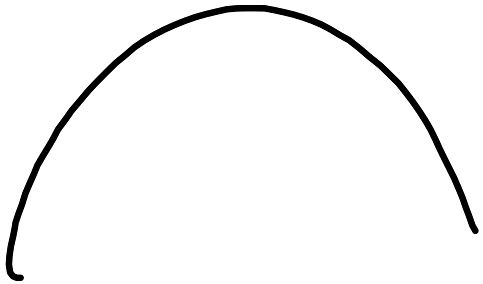
Convessità



convessa

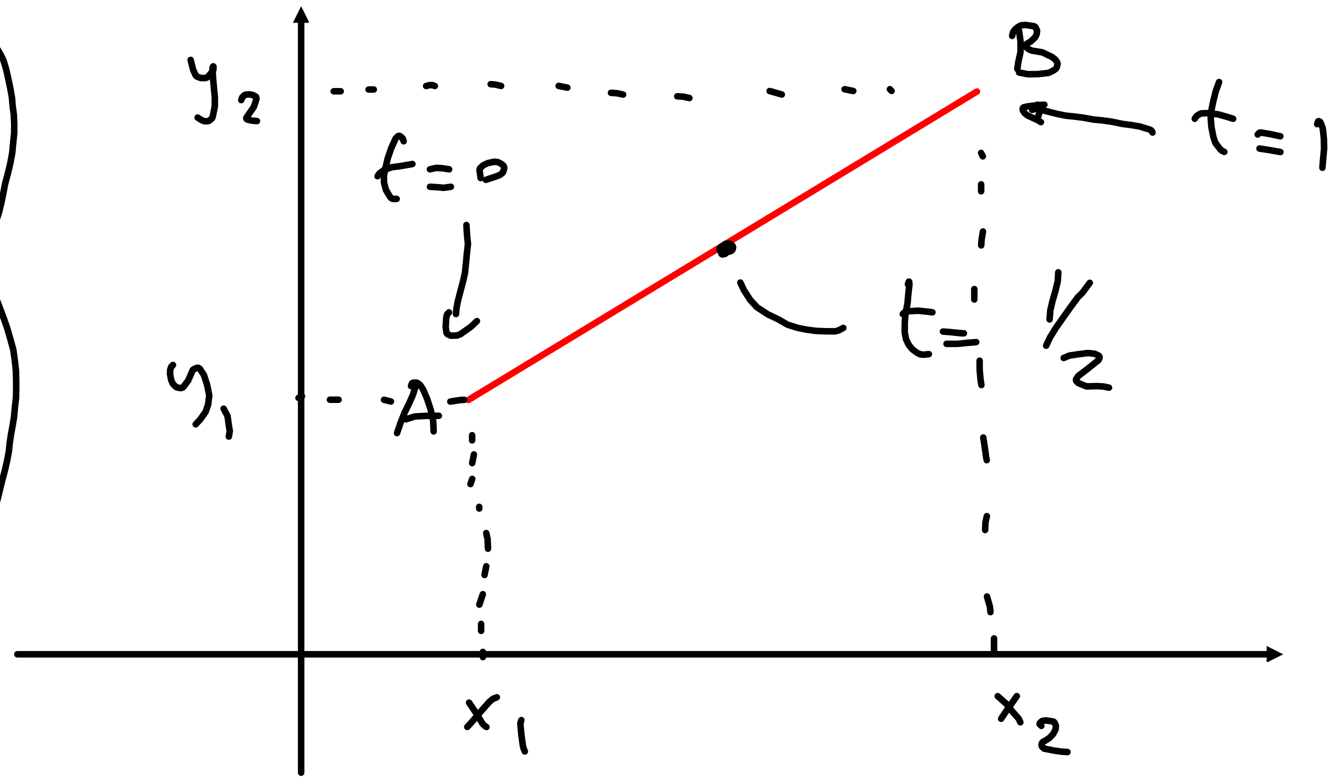


concava

Segmento per due punti

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



$t \in \mathbb{R}$ $\quad t \in [0,1]$

cioè $\quad 0 \leq t \leq 1.$

$$Q(t) = A + t(B-A)$$

punto del segmento AB

se $t=0 \quad Q(0) = A$

se $t=1 \quad Q(1) = B$

se $t = \frac{1}{2} \quad A + \frac{1}{2}(B-A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

punto medio del segmento AB

nov 9-11:21

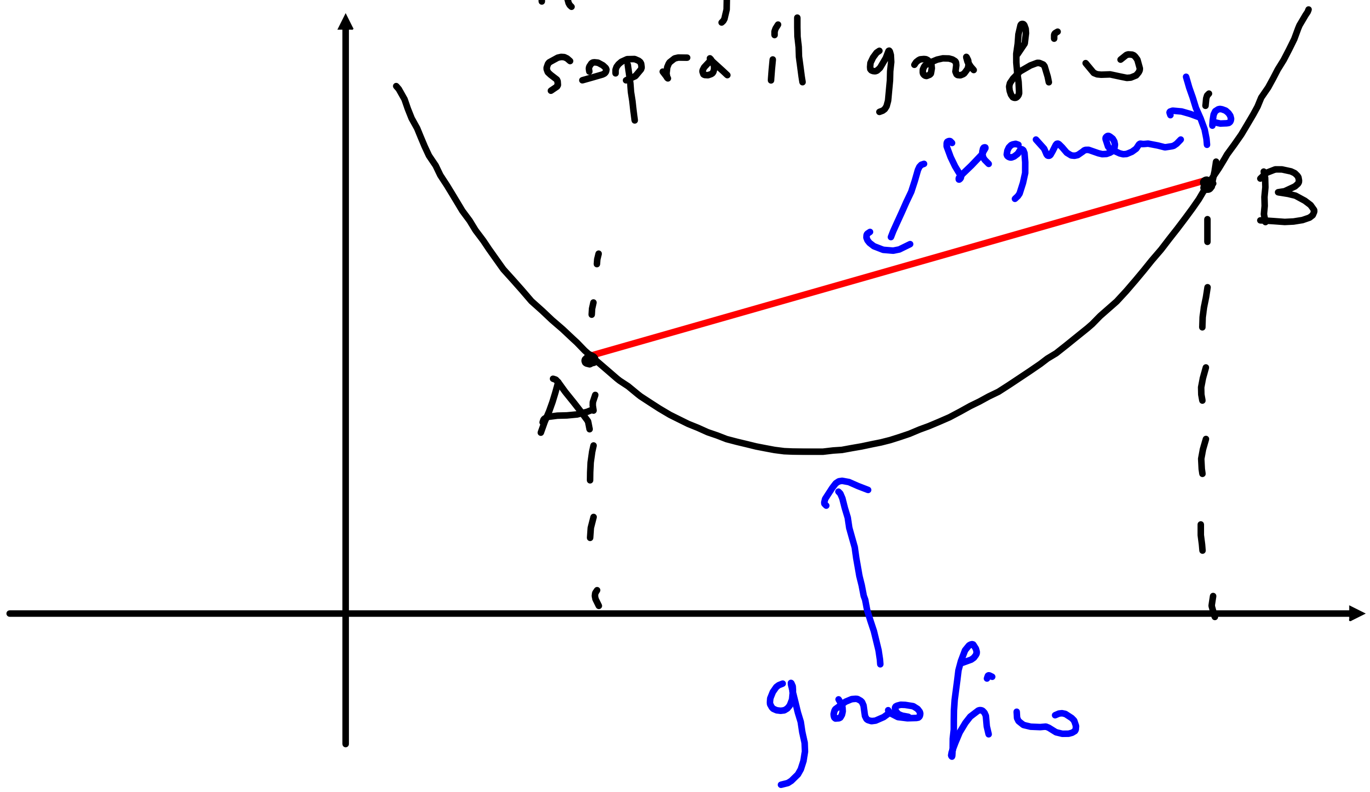
<u>Def</u>: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f si dice convessa in I se presi due punti qualsiasi sul grafico di f il segmento che li unisce è sopra il grafico.

nov 9-11:25

il segmento è sopra il grafico

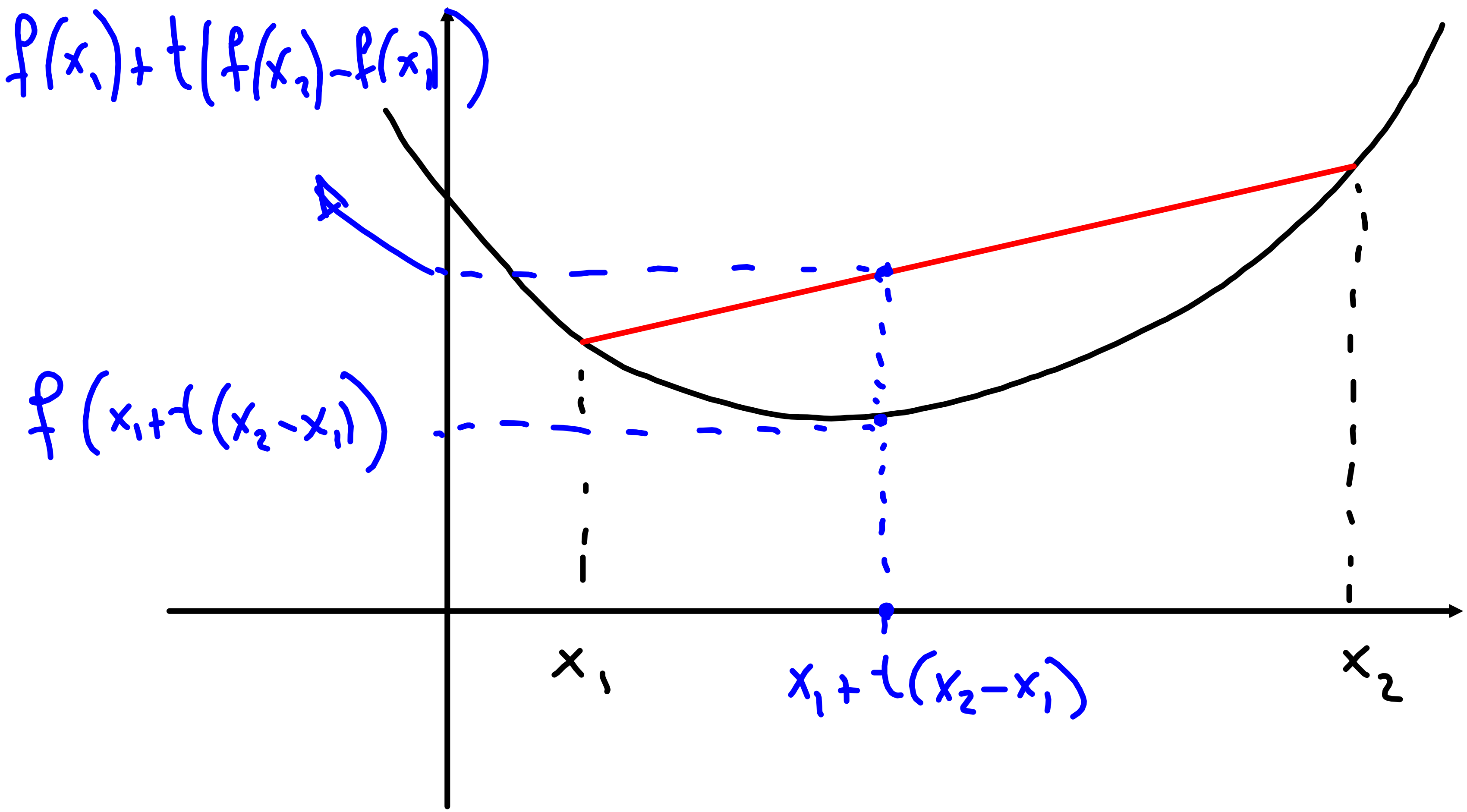


In formule f si dice convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in (0,1)$ risulta

$$f\left(x_1 + t(x_2 - x_1)\right) \leq f(x_1) + t\left(f(x_2) - f(x_1)\right)$$

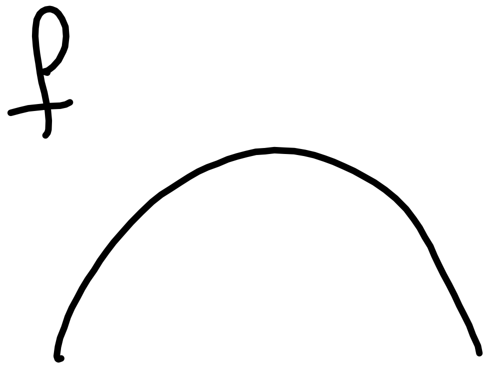
ordinata del grafico

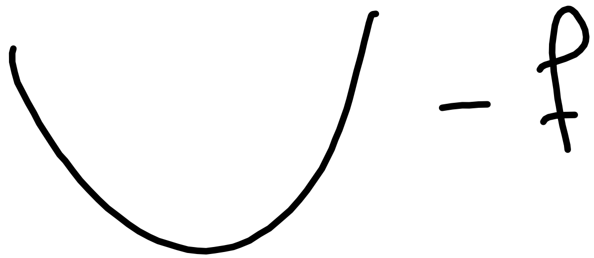
ordinata del segmento



nov 9-11:31

Def: f si dice concava se $-f$ è convessa.





nov 9-11:34

Oss: Una retta è sia concava che convessa.

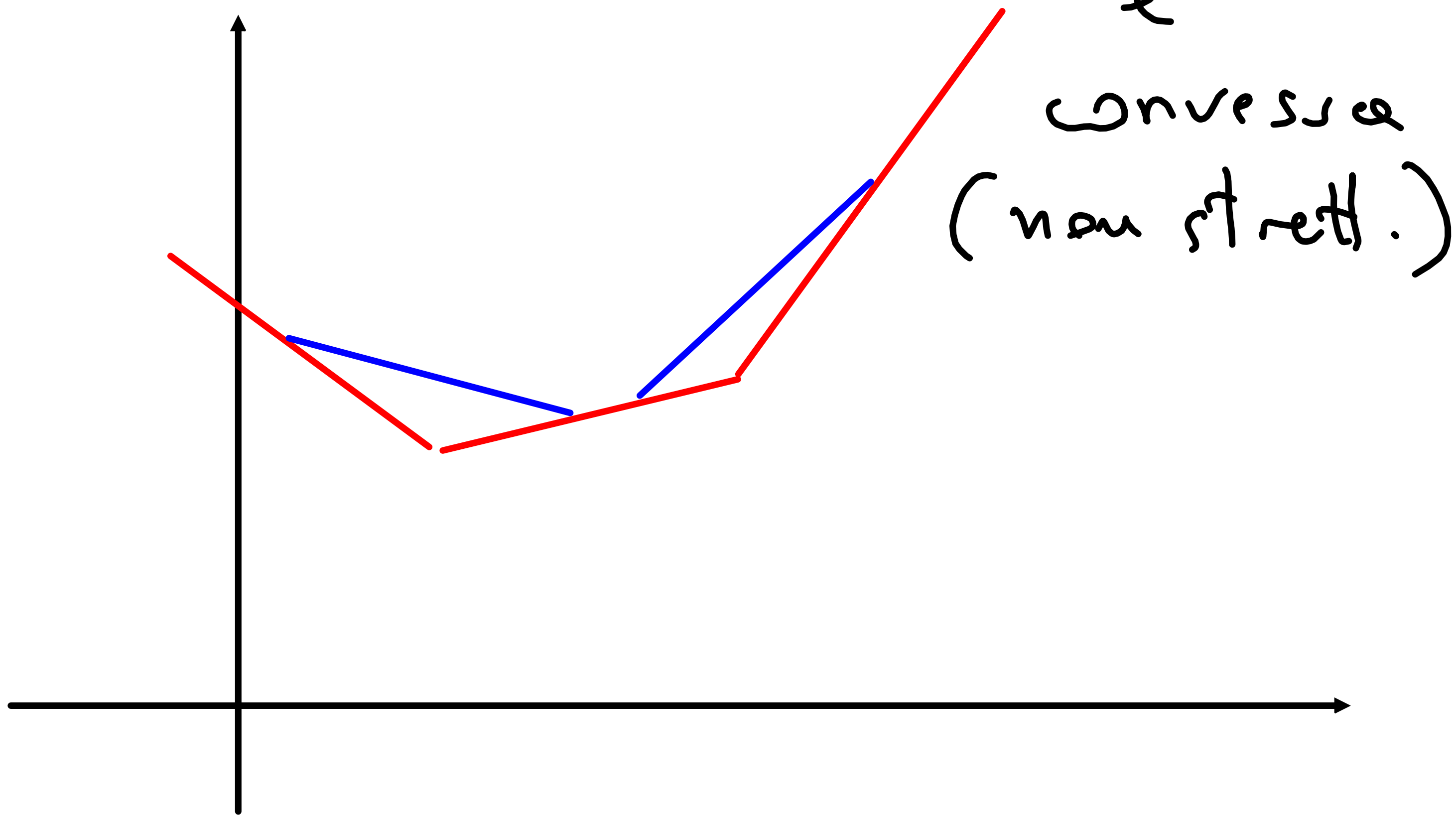
Def: f si dice strettamente convessa se $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1)$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

disuguaglianza stretta.

Il segmento tocca il grafico solo negli estremi.

Oss: la retta non è strettam. convessa.



nov 9-11:38

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte.

Sono equivalenti:

1) f è convessa

2) f' è debolmente crescente

3) $f'' \geq 0$.

Es: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow f$ è convessa.

Es: $f(x) = e^x$

$f' = e^x \qquad f'' = e^x > 0$

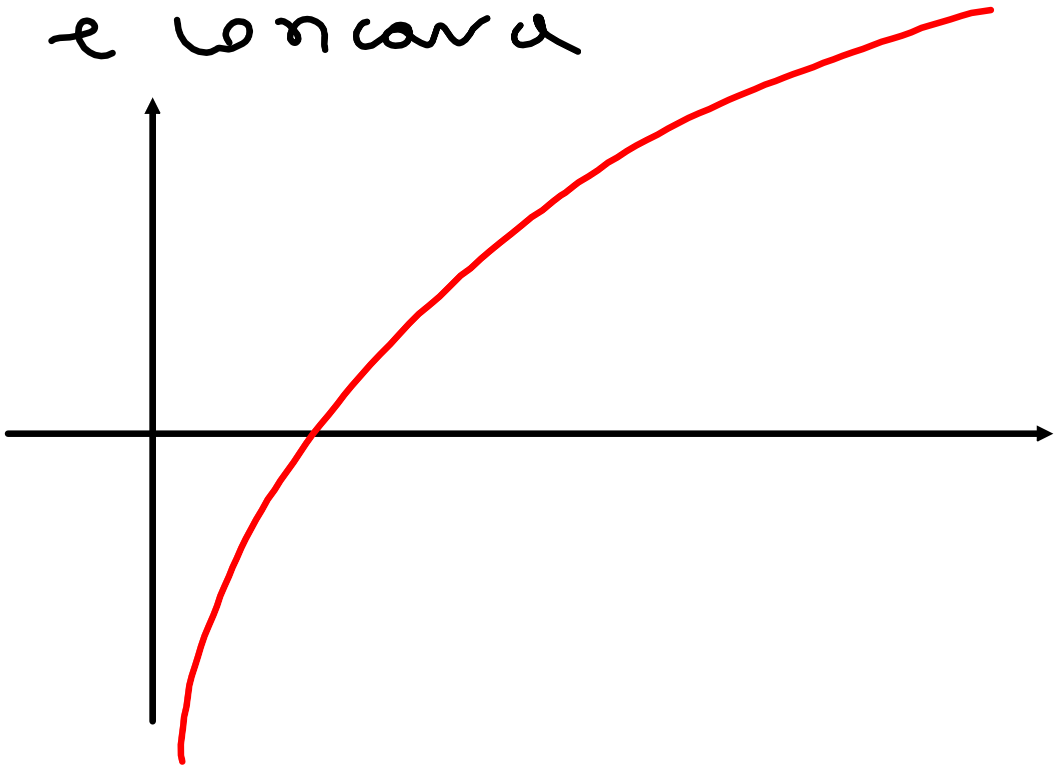
$\Rightarrow f$ è convessa.

nov 9-11:43

Es: $f(x) = \log x \qquad x > 0$

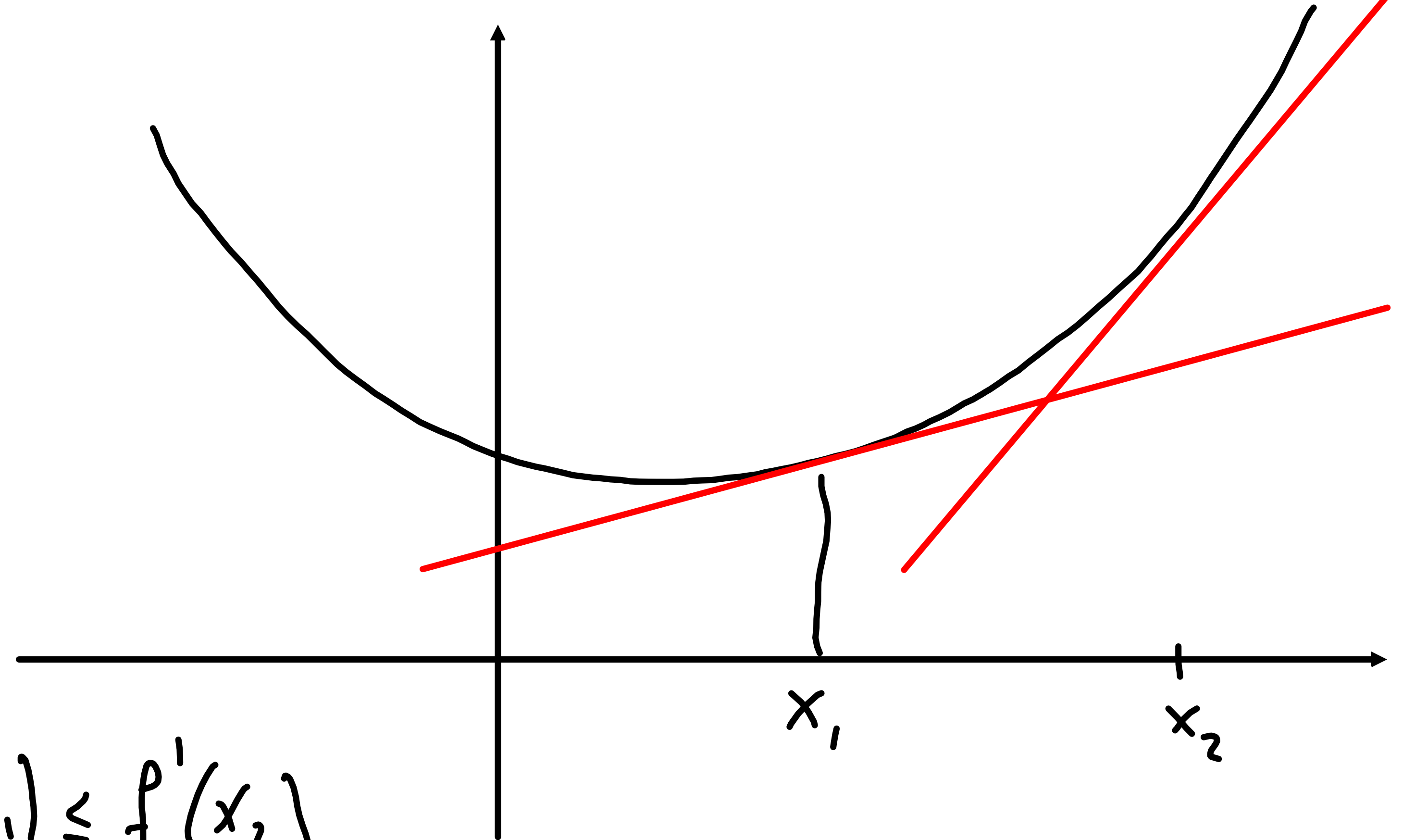
$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

f è concava



nov 9-11:46

Cosa vuol dire che f' è debolmente crescente



$$f'(x_1) \le f'(x_2)$$

$$x_1 < x_2$$

nov 9-11:49

Es di funzione né concava né convessa.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

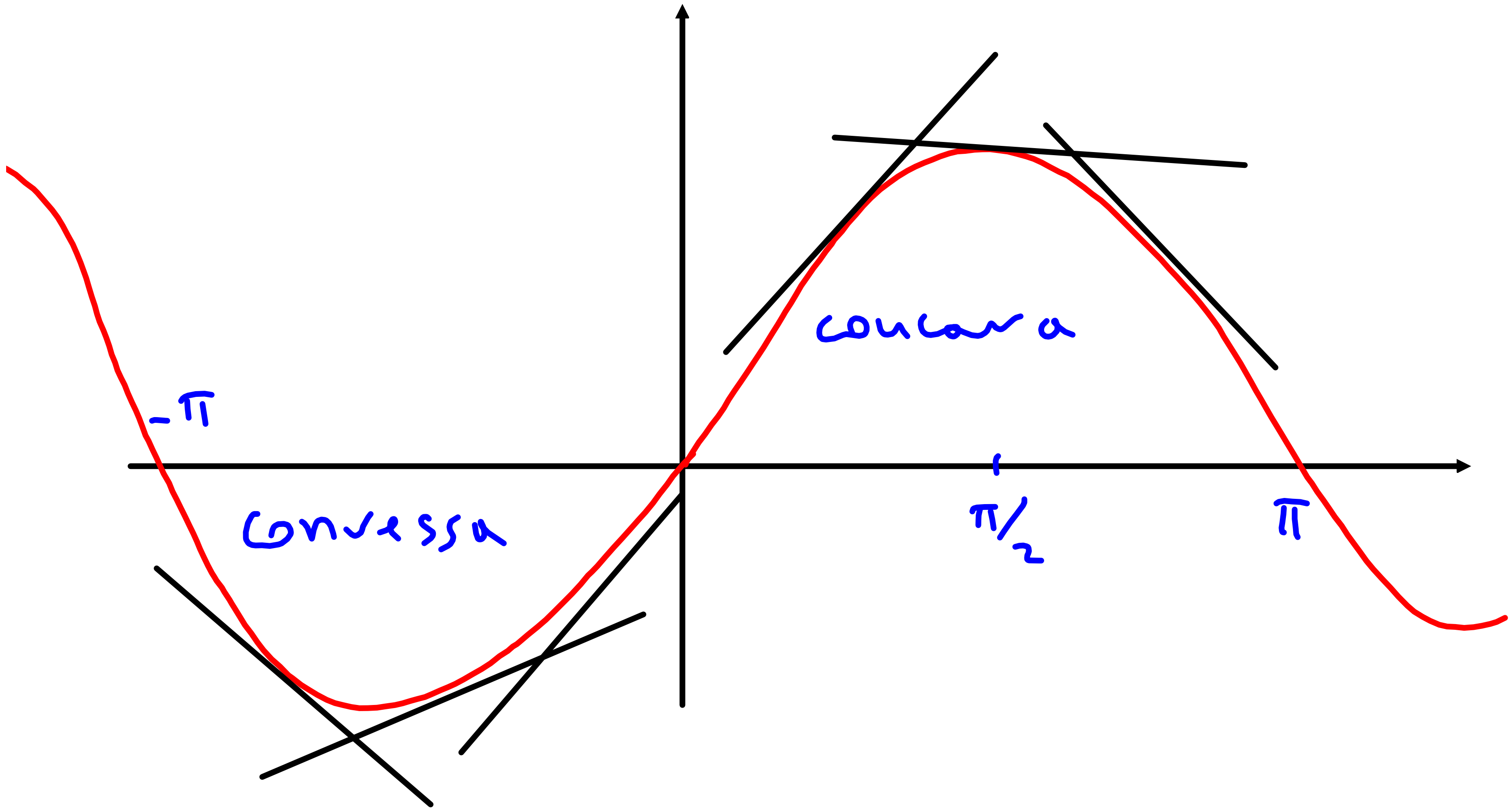
$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) \geq 0 \iff -\sin x \geq 0$$

$$\sin x \leq 0 \qquad x \in [\pi, 2\pi]$$

e si ripete periodic.

nov 9-11:53



nov 9-11:55

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I.

f è convessa in I se $\forall x_0 \in I$

il grafico di f è sopra la

tangente tracciata nel

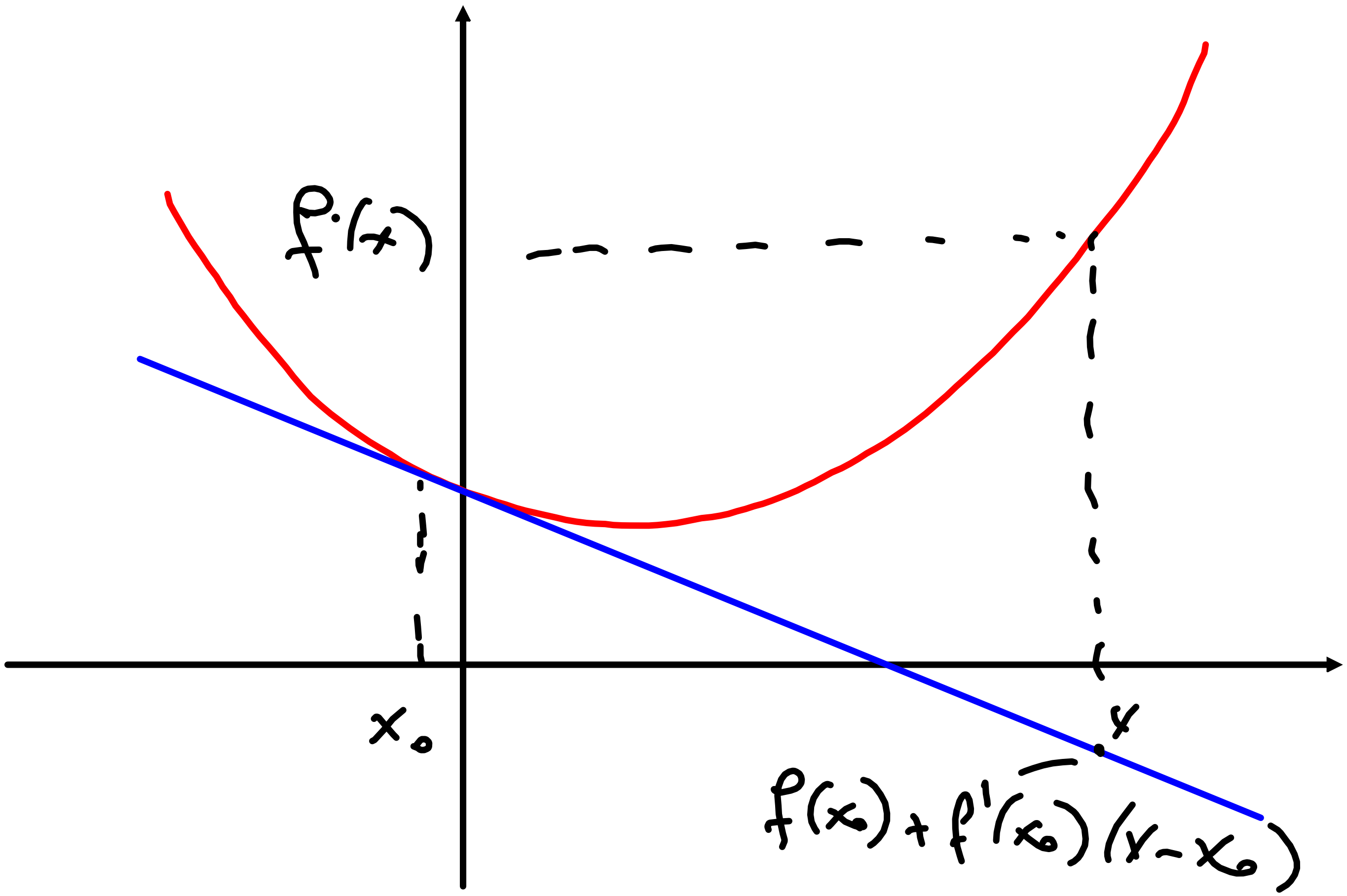
punto di ascissa x_0.

cioè

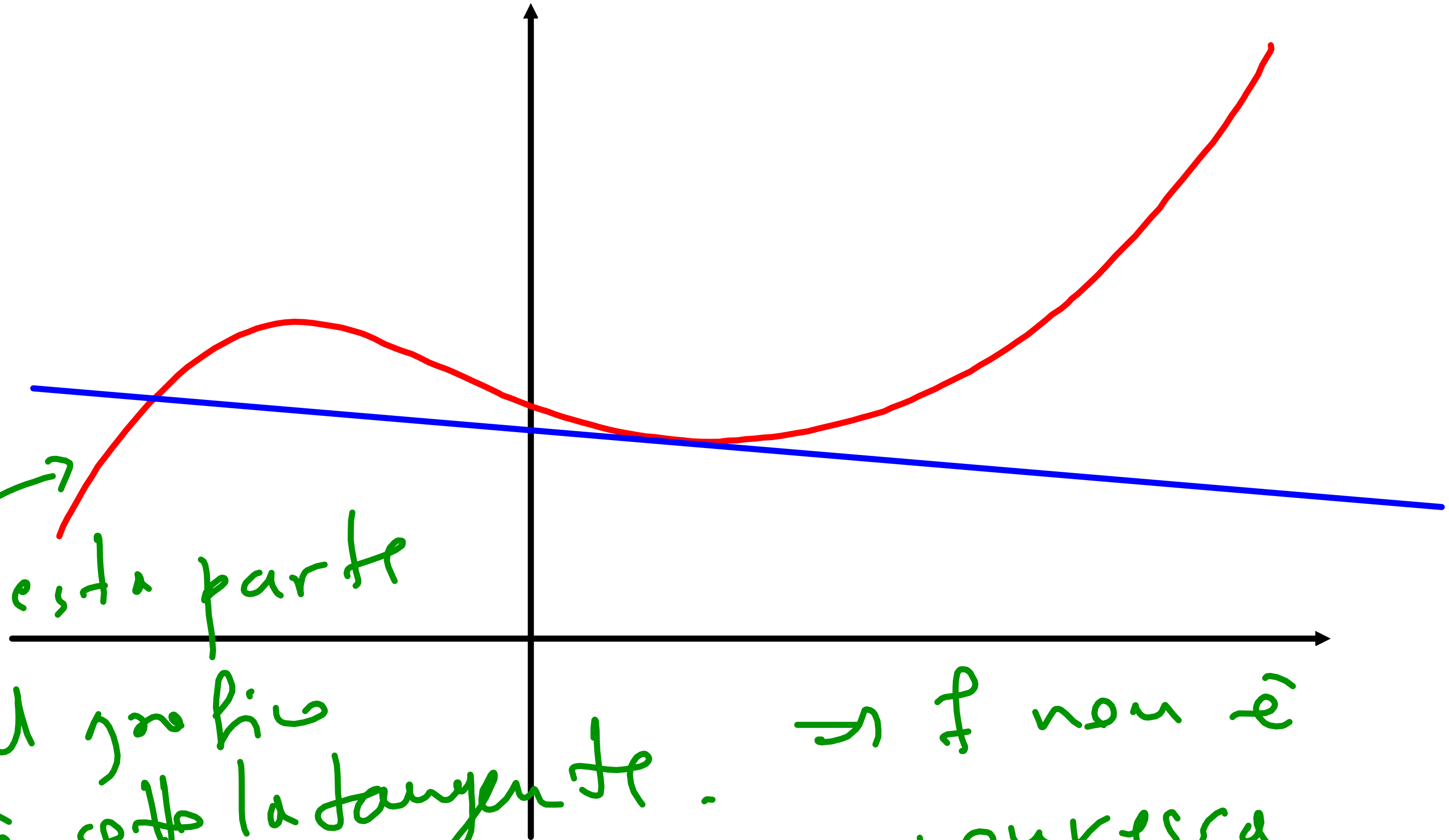
$$f(x) \geq \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$\forall\, x, x_0 \in I \quad .$$

retta tangente



nov 9-12:01



questa parte del grafico è sotto la tangente. ⇒ f non è convessa.

Prop: $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

supponiamo che in ogni punto di I esistano derivata destra e sinistra (non necessariamente uguali).

f è convessa in I se in ogni punto di I il grafico di f è sopra le due semi-tangenti

nov 9-12:05

cioè

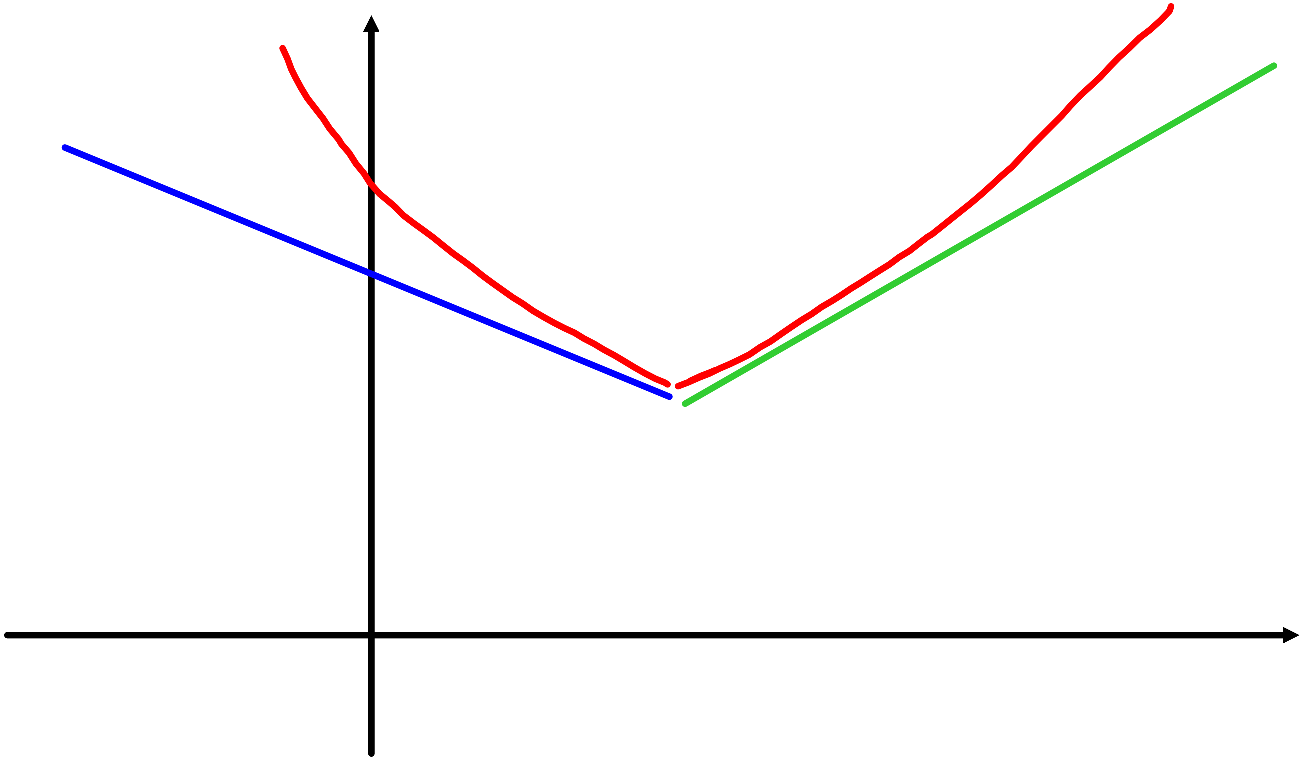
semi-tangente destra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$$

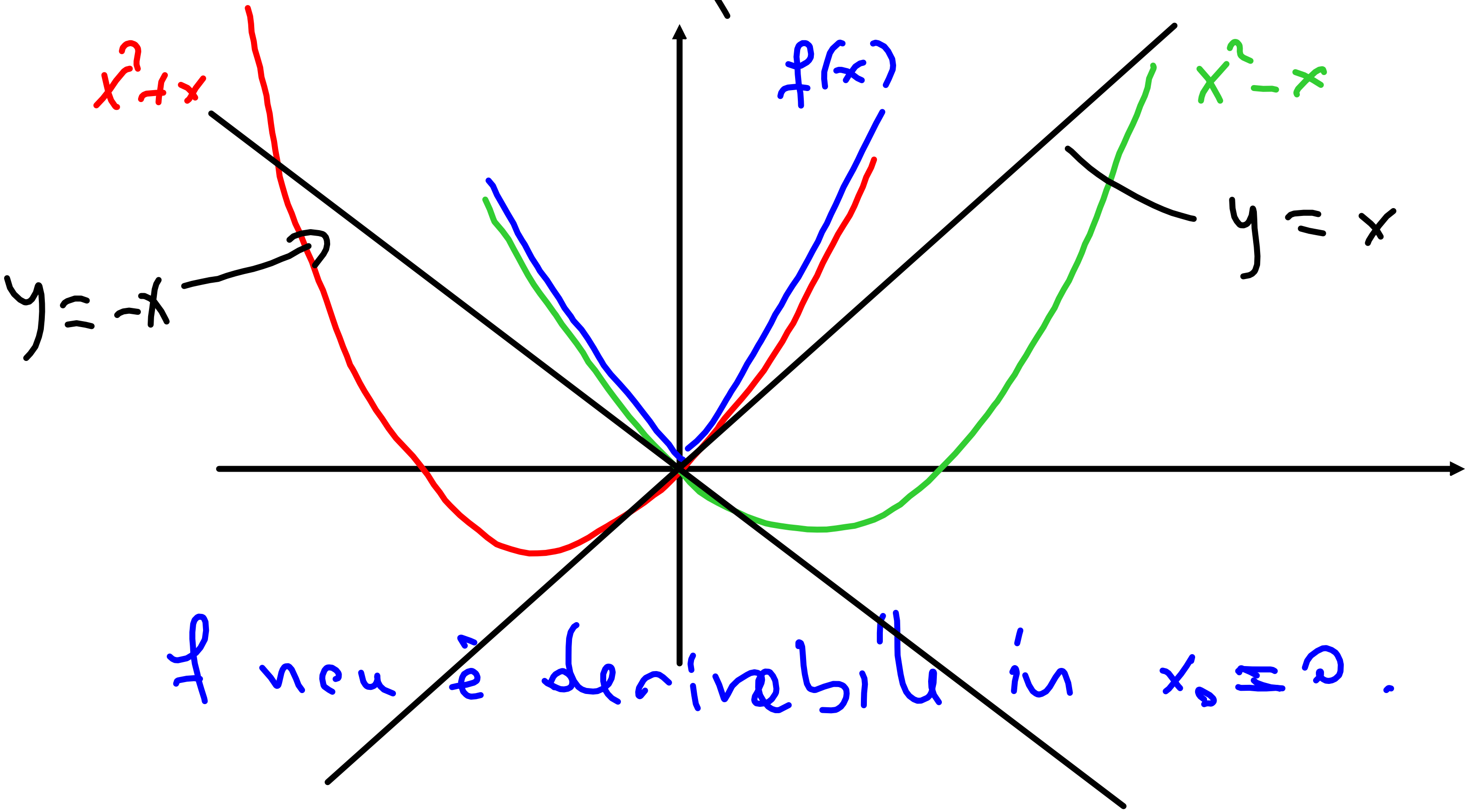
semi-tangente sinistra.

nov 9-12:07



nov 9-12:09

Es.: $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2-x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$



f non è derivabile in $x_0 = 0$.

nov 9-12:11

f è continua in 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

se $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x + 1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

se $x < 0$ $\quad f'(x) = 2x - 1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

nov 9-12:15

f non è derivabile in 0.

semitangente destra

$f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ $x_0 = 0$

$0 + 1 \cdot x = x$

semitangente sinistra

$f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

$0 + (-1) \cdot x = -x$

nov 9-12:18

devo verificare che

$$f(x) \geq x \quad \forall x$$

e che $f(x) \geq -x \quad \forall x$

dovete verificare che

$$\begin{cases} x^2 + x \geq x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x \geq x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

ovvie

grafico è sopra la semitangente destra.

nov 9-12:20

$$\begin{cases} x^2 + x \geq -x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x \geq -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

verifica per la semitangente sinistra.

nov 9-12:24

Ej: $f(x) = e^{-|x|}$

è convessa?

Se $x>0$ $f(x) = e^{-x}$

Se $x<0$ $f(x) = e^{x}$

se $x > 0$ $f'(x) = -e^{-x}$

se $x < 0$ $f'(x) = e^{x}$

---

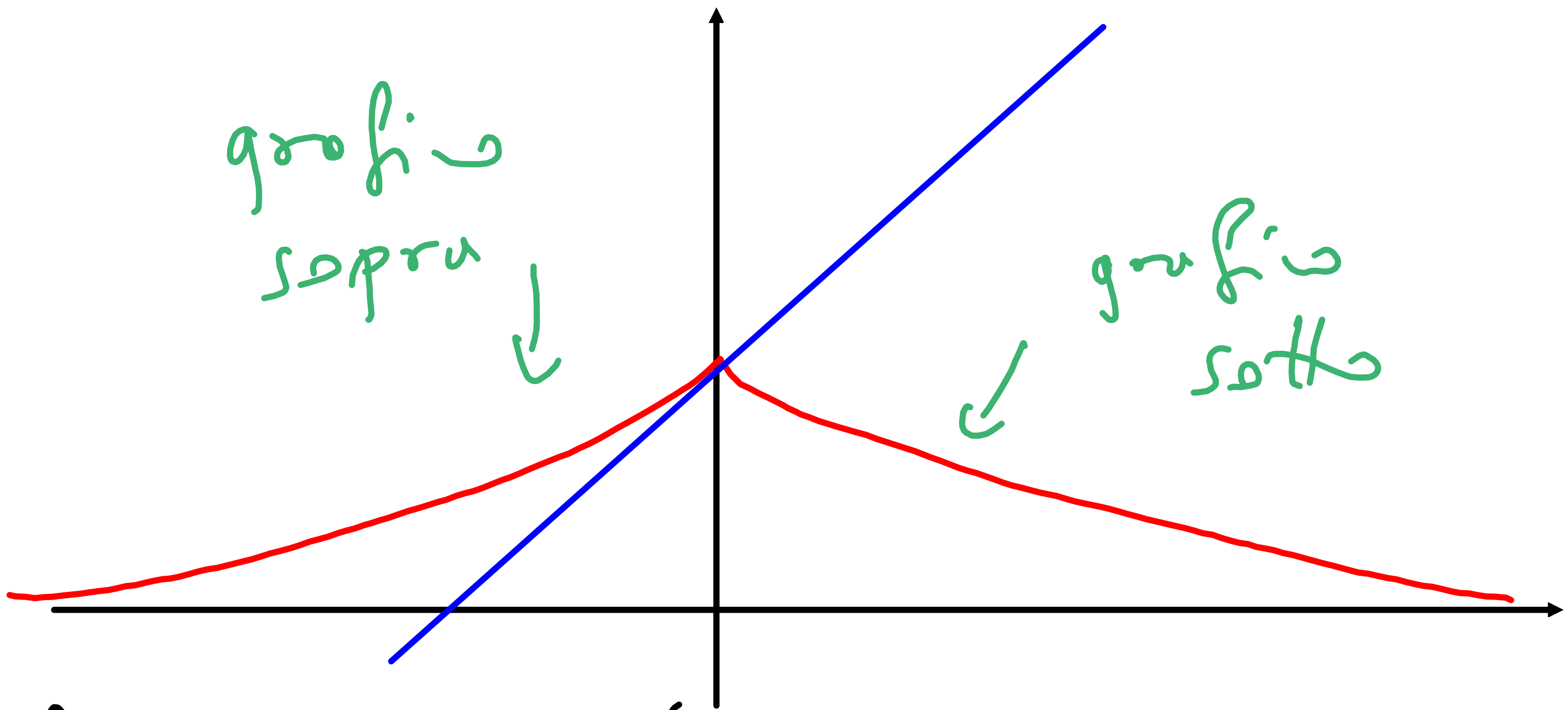
se $x > 0$ $f''(x) = e^{-x}$

se $x < 0$ $f''(x) = e^{x}$

segno di f'' ?

$f''(x) > 0$ $\forall x > 0$
e $\forall x < 0$.

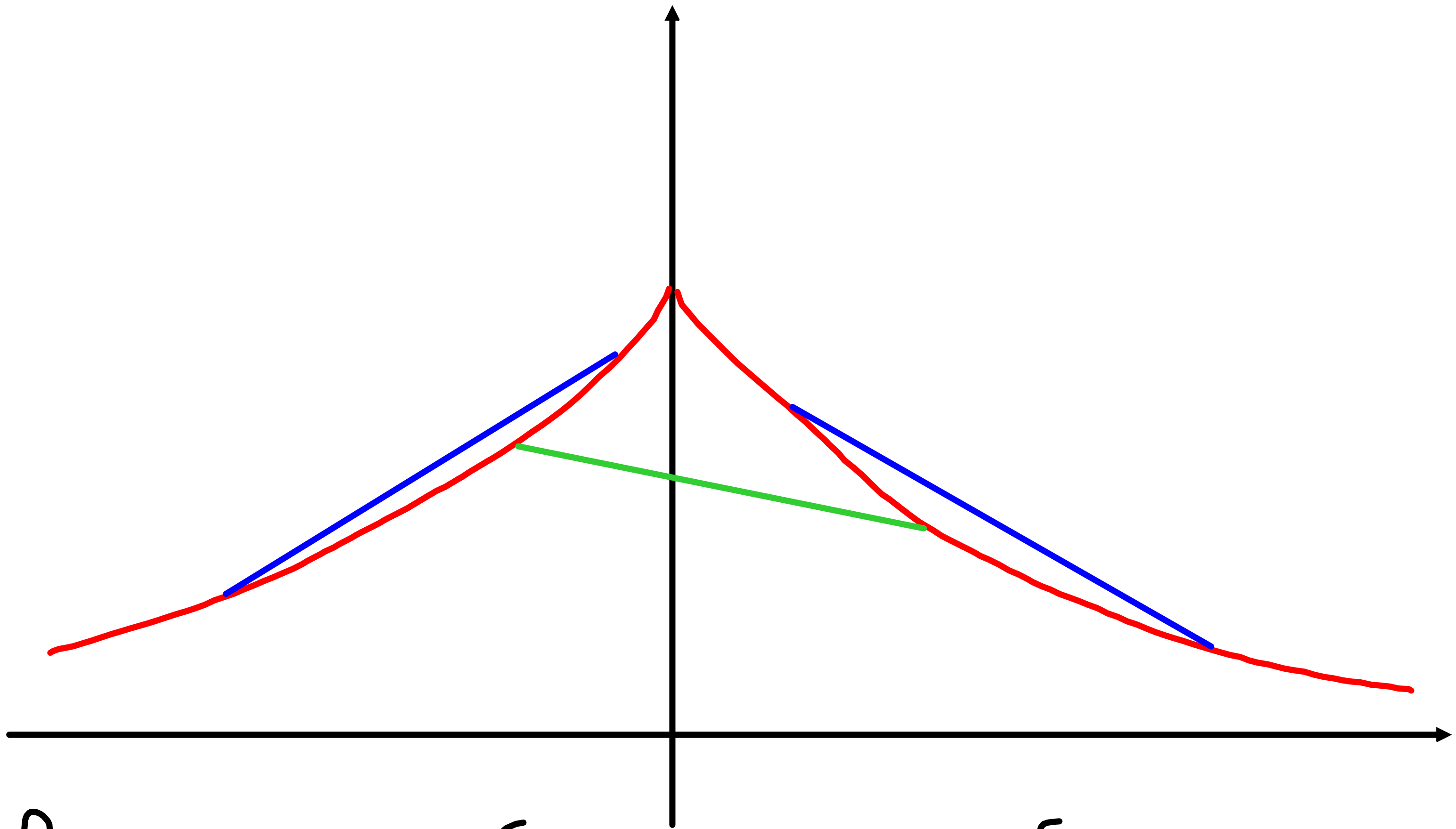
nov 9-12:27



f non è derivabile in 0

$f'_-(0) = 1$ $\qquad$ $f'_+(0) = -1$

nov 9-12:31



f non è né concava né convessa nel suo dominio $\mathbb{R}$

Potete dire che f
è convessa in $(-\infty, 0]$
e convessa in $[0, +\infty)$.
ma non in $\mathbb{R}$.

Es: $f(x) = x^4$

è convessa?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$

$12x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è convessa

nov 9-12:39

Es: $f(x) = x^3 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

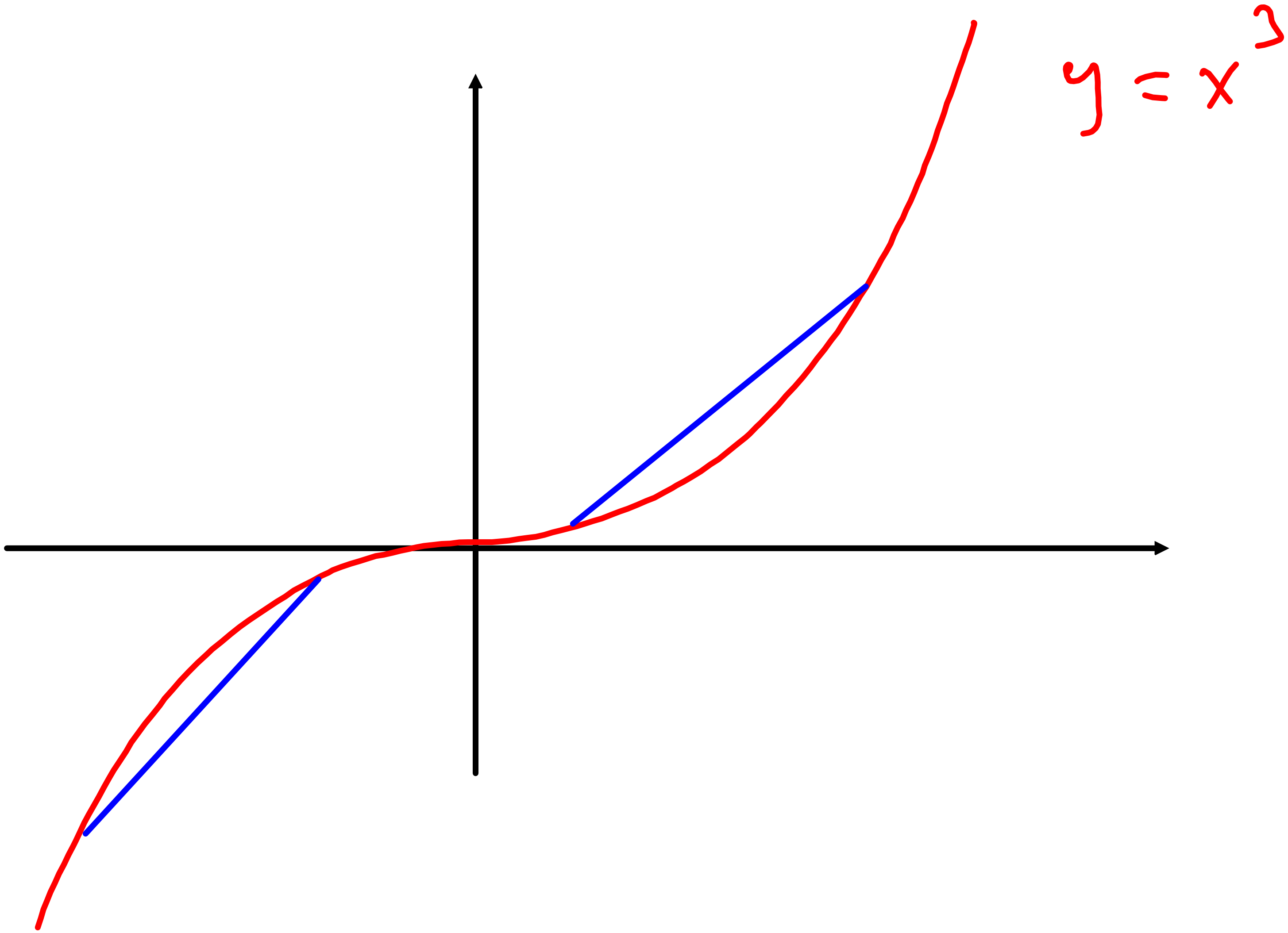
$f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

$6x \geq 0 \iff x \geq 0$

f è convessa in $[0, +\infty)$

concava in $(-\infty, 0]$

nov 9-12:41



nov 9-12:42