$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} .$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = \infty \cdot \sin 0 =$$

$$= \infty \cdot 0 \quad ?$$

ott 28-08:47

$$\sin t = t + o(t^2) \qquad t \to 0$$

$$t = \frac{1}{x} \qquad x \to \infty \Rightarrow t \to 0^+$$

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^2 \sin \frac{1}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x + o(1) \longrightarrow +\infty + 0 = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzont.

asintoto obliquo ?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1 = m$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

ott 28-09:23

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} - 1 \cdot x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \left[x \sin \frac{1}{x} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[x \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[\cancel{1} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = q$$

$\Rightarrow \quad y = x$ è asintoto obliquo

$m = 1, \quad q = 0.$

$y = mx + q = x$

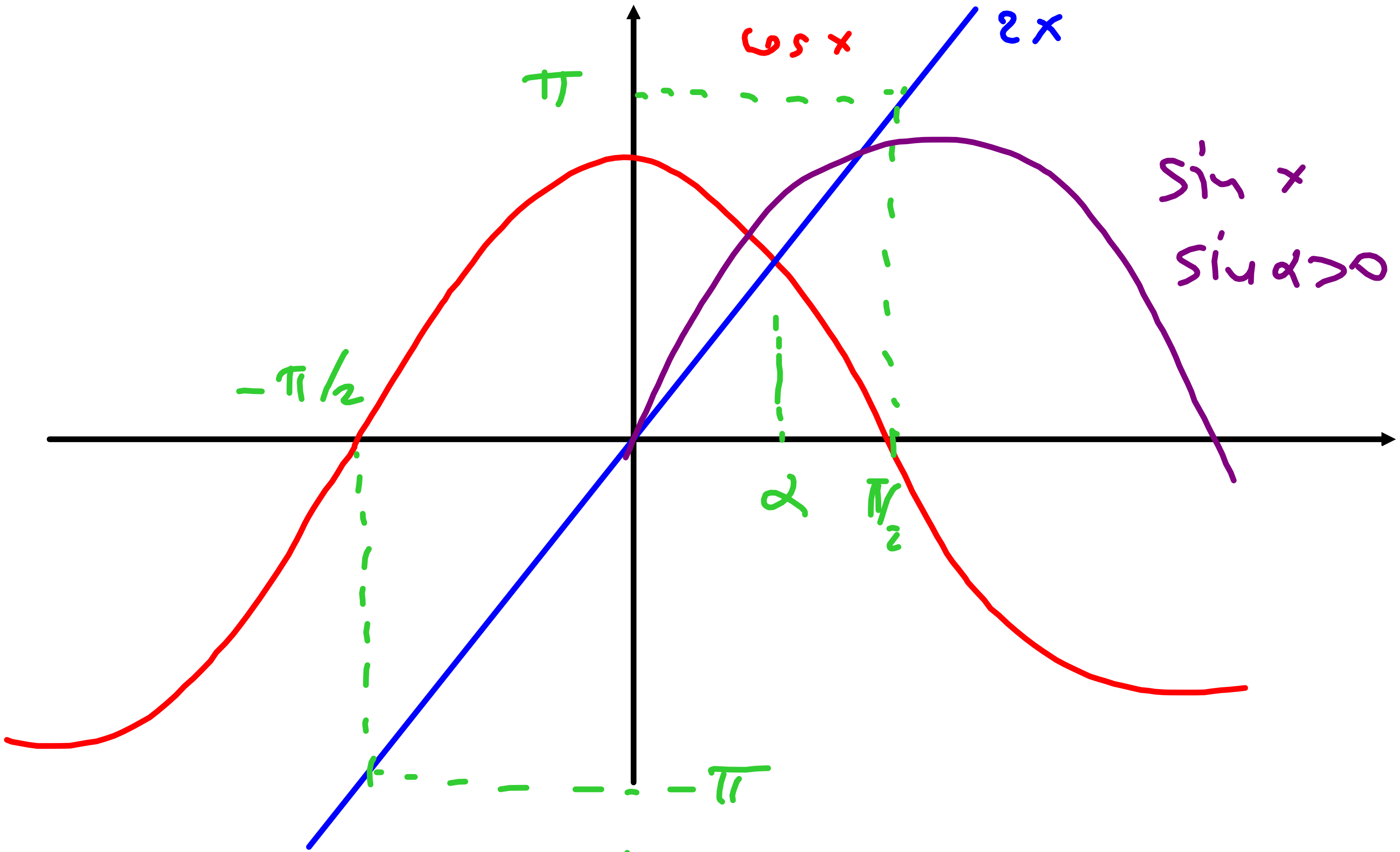
ott 28-09:29

$$f(x) = \frac{3x + \sin x}{2x - \cos x}$$ asintoti?

verticali?

$0 = 2x - \cos x$ ha soluzione?

$$2x = \cos x$$



∃ unico α t.c. $2\alpha - \cos\alpha = 0$

ott 28-09:32

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{3x + \sin x}{7x - \cos x} = \frac{3\alpha + \sin\alpha}{0^+} =$$

$$= \frac{>0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \alpha^-} \frac{3x + \sin x}{7x - \cos x} = \frac{>0}{0^-} = -\infty$$

c'è un asintoto verticale

asintoto orizzontale?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+\sin x}{2x-\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\cancel{\frac{\sin x}{x}}^{\to 0}}{2-\cancel{\frac{\cos x}{x}}^{\to 0}} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+\sin x}{2x-\cos x} = \frac{3}{2}$$

c'è asintoto orizzont.

ott 28-09:39

$$f(x) = \log(\log(\operatorname{tg} x))$$

$$f : \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

f è strett. crescente

composizione di 3 funzioni

strett. crescenti

$\Rightarrow$ f è iniettiva

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \log(\log(tg\,x)) =$$

$$= \log(\log(1^+)) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \log(\log(tg\,x)) =$$

$$\log(\log(+\infty)) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\inf(f) = -\infty$$
$$\sup(f) = +\infty$$
$\Rightarrow$ f è surgettiva.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3-2\alpha x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$x \to 1^-$

per quali α è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

ott 28-09:46

è ovviamente derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 1$.

Per quali α è continua?

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3-2\alpha x^2 = 3-2\alpha$$

$$f(1) = 1+1 = 2$$

devono essere uguali

ott 28-09:47

deve essere $3-2\alpha=2$

$1=2\alpha \quad \alpha=\frac{1}{2}$.

se $\alpha=\frac{1}{2}$ f è continua.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\le 1 \\ 3-x^2 & \text{se } x>1. \end{cases}$$

$$f'_-(x)=D(x+1)=1$$

$$f'_+(x)=D(3-x^2)=-2x$$

ott 28-09:51

$f'_+(1) = -2 \qquad f'_-(1) = 1.$

$\Rightarrow$ f non è derivabile.

$\Rightarrow$ f non è derivabile per nessun valore di α.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

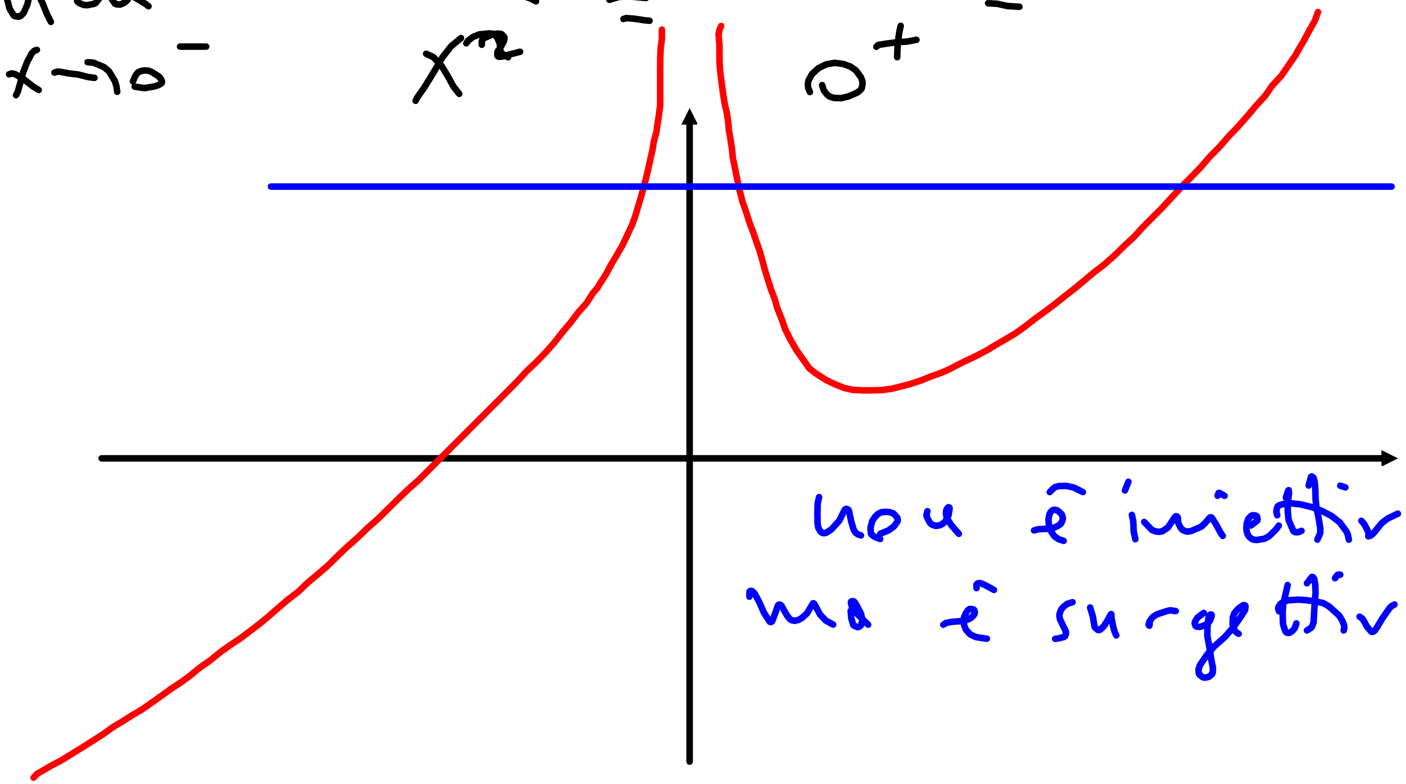
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{x^3 + \dots}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{x^3 + \dots}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

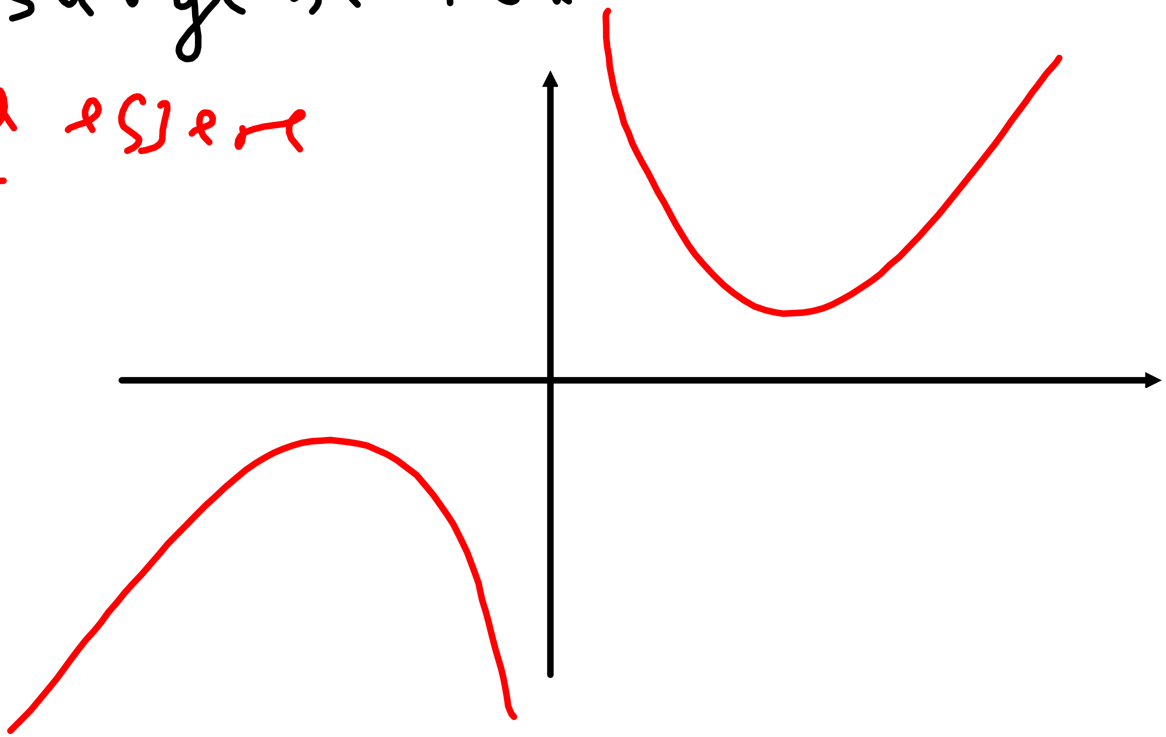


non è iniettiva
ma è surgettiva

ott 28-09:58

senza fare i limiti in 0
non potevo decidere della
surgettività

poteva essere
così



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{tg^3 x} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})} =$$

$$tg\, t = t + o(t^2)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

ott 28-10:02

$$(\operatorname{tg} x)^3 = \left(x + o(x^2)\right)^3 =$$

$$= \boxed{x^3 + o(x^4)}$$

$$e^{(\operatorname{tg} x)^3} - 1 = e^{x^3 + o(x^4)} - 1$$

$$\left[x + o(x^2)\right]^3 = x^3 + 3x^2 o(x^2) + 3x\left(o(x^2)\right)^2 + \left(o(x^2)\right)^3$$

$$= x^3 + o(x^4) + o(x^5) + o(x^6)$$

$$= x^3 + o(x^4)$$

$$t = x^3 + o(x^4)$$

$$e^{x^3 + o(x^4)} - 1 =$$

$$= \cancel{1} + x^3 + o(x^4) + o\left(x^3 + o(x^4)\right) - \cancel{1}$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$\cos x - e^{x^2} =$$

$$= \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \left[\cancel{1} + x^2 + o(x^2)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

ott 28-10:09

$$\frac{e^{tg^3 x} - 1}{x\left(\cos x - e^{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{x^3 + o(x^3)}{x\left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)} =$$

$$= \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)} \to -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8+(x-1)^8}$$

$$(x+1)^9-(x-1)^9 = \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^9$$

$$-\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^9 =$$

$$x^9\left(1+\frac{1}{x}\right)^9 - x^9\left(1-\frac{1}{x}\right)^9$$

ott 28-10:13

$$= x^9 \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^9 - \left(1-\frac{1}{x}\right)^9 \right] =$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \qquad \alpha = 9$$

$$t \to 0 \qquad t = \frac{1}{x} \qquad x \to \infty \Rightarrow t \to 0.$$

$$= x^9 \left[\cancel{1} + 9 \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\cancel{1} + 9\left(-\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$t = -\frac{1}{x}$$

$$= x^9\left(\frac{18}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= 18x^8 + o(x^8)$$

$$\frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8+(x-1)^8} = \frac{18x^8+o(x^8)}{(x+1)^8+(x-1)^8}$$

$$\longrightarrow 9$$

ho diviso numer. e denom. per x^8

ott 28-10:18

$$\frac{\dfrac{18x^8}{x^8} + \dfrac{o(x^8)}{x^8}}{\dfrac{(x+1)^8}{x^8} + \dfrac{(x-1)^8}{x^8}} \longrightarrow \frac{18+0}{1+1} = 9$$

ott 28-10:20

$$f(x) = e^{\frac{x^5 + \sin x}{x^4 + (\cos x)^2}}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$f(x) > 0$ sempre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + \sin x}{x^4 + (\cos x)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 \left(1 + \cancel{\frac{\sin x}{x^5}}\right)}{x^4 \left(1 + \cancel{\frac{(\cos x)^2}{x^4}}\right)} = +\infty$$

$$\frac{\sin x}{x^5} \to 0 \qquad \frac{(\cos x)^2}{x^4} \to 0$$

ott 28-10:22

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + \sin x}{x^4 + (\cos x)^2} = -\infty .$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-\,\cdot\,-}{\cdot\,\cdot\,\cdot}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}} = e^{-\infty} = 0^{+}$$

f non è superiormente limitata $\sup(f) = +\infty$.

$\inf(f) = 0 \Rightarrow f$ è inf. limitata. Non ha minimo perché dovrebbe essere

$\min(f) = \inf(f) = 0$ ma

$f(x) \neq 0$.

ott 28-10:27

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$$

$$\boxed{\log(1+t)=t+o(t)}$$

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{3x\log\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$\boxed{t=-\frac{2}{x}}$$

$$= e^{3x\left[-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]} =$$

$$= e^{-6+o(1)} \to e^{-6} = \frac{1}{e^{6}}.$$

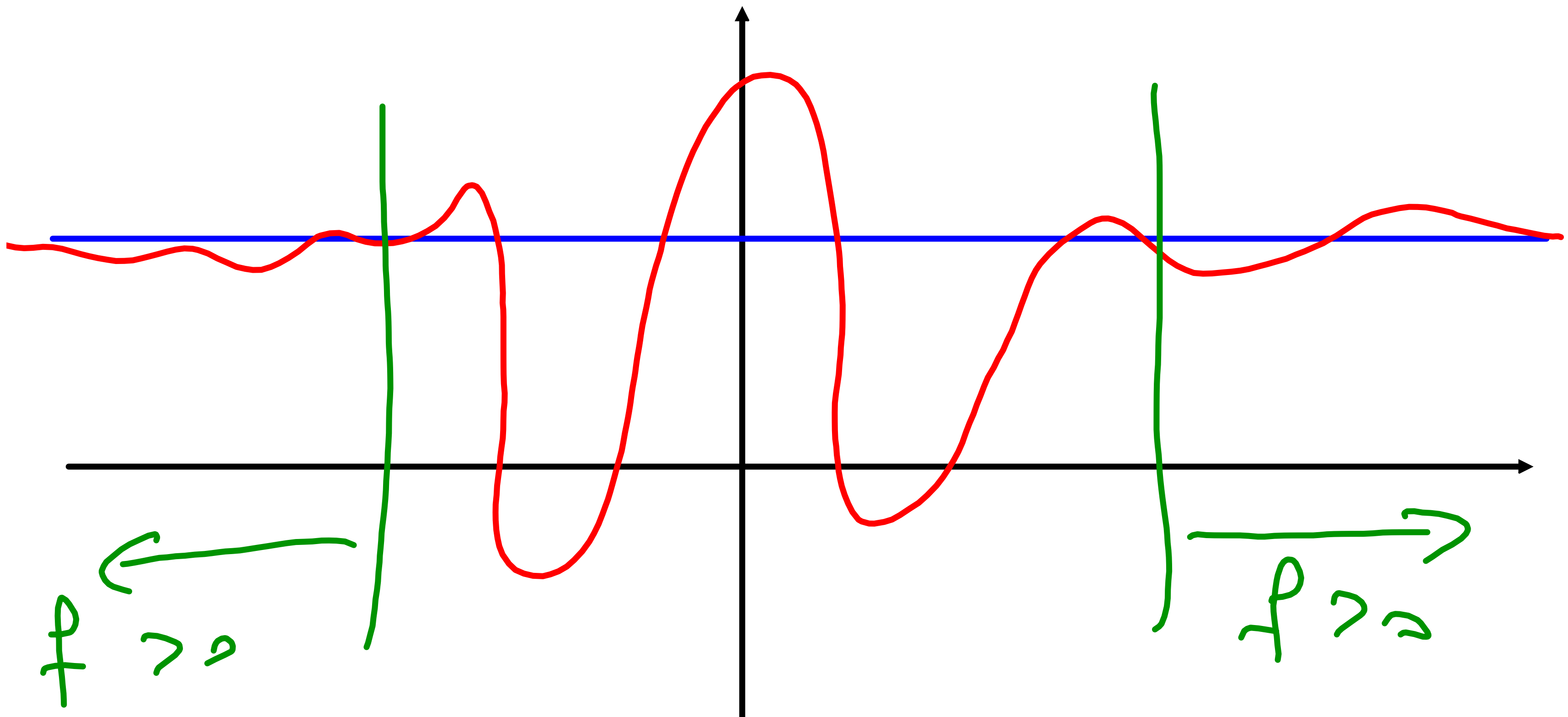
ott 28-10:28

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} > 0 \right\}$$

A è limitato? sup, inf?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} = 1$$



permanenza del segno.

l'insieme A è l'insieme delle x dove la funzione è positiva.
A contiene una semiretta tipo $(k, +\infty)$ e una tipo $(-\infty, h)$ $\Rightarrow$ A non è limitato né

ott 28-10:35

inferiormente né

superiormente.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

f è pari

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2}$$

$x \to 0$

$$\frac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2} =$$

$$= \frac{x^4}{x^6 + \left[x + o(x^2)\right]^2} =$$

$$= \frac{x^4}{x^6 + x^2 + o(x^3)} = \frac{x^2}{x^4 + 1 + o(x)}$$

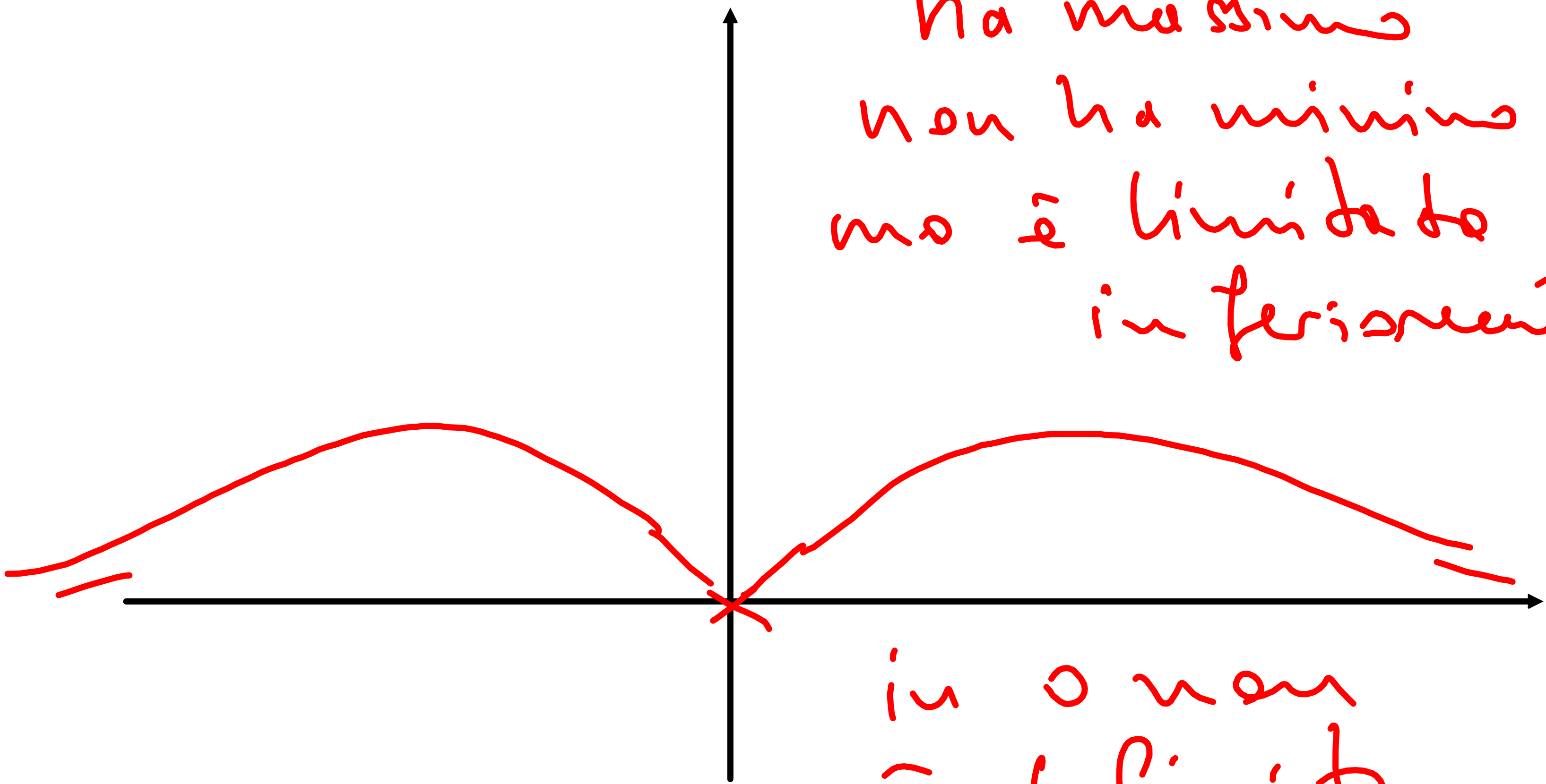
$$\to \frac{0}{1} \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + \underbrace{\frac{(\sin x)^2}{x^4}}_{\to 0}} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

ott 28-10:41

ha massimo
non ha minimo
ma è limitata
inferiormente



in 0 non
è definita.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

questa ha minimo.