Formula di Taylor

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{resto}}$$

posso precisare meglio il resto?

ott 27-16:04

Formula di Taylor con resto di Peano

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Se f è derivabile n-volte in x_0 e almeno $n-1$ -volte in (a,b) allora $\exists$ unico un polinomio di grado n $P_n(x)$ e una funzione resto $R_n(x)$ con la proprietà

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

e $\quad R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$

Il polinomio è di questa forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$+ f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$R_n(x)$ si dice resto di Peano

e l'unica proprietà che ha è

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{cioè}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 .$$

ott 27-16:25

Resto di Lagrange

Se f è derivabile $n+1$ - volte in (a,b) tranne al più il punto x_0 dove basta che sia derivabile n-volte allora

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dove z è un punto compreso fra x e x_0.

Esempi: $f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$\cancel{f^{(4)}(x) = \sin x}$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x \boxed{- \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

resto di Peano $R_3(x)$.

$$\sin x = x + \boxed{o(x)}$$

sono valide entrambe

infatti $-\frac{x^3}{6} + o(x^3) = o(x)$

infatti $\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{6} + o(x^2) = 0$$

$o(x^7)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \boxed{R_7(x)}$$

posso migliorare

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + 0 \cdot \frac{x^8}{8!} + R_8(x)$$

$o(x^8)$

ott 27-16:41

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

---

avevamo visto che $\sin x = x + o(x)$

ma in realtà

$$\sin x = x + o\left(x^2\right)$$

$$\cos x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right) + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$P_{2n}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ott 27-16:45

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x, \; f''(x) = e^x$$

$$f(0) = 1, \; f'(0) = 1, \; f''(0) = 1 \quad \ldots$$

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right) + o(x^n)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Es: $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Es: Scrivere il polinomio di Taylor di grado 8 centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = e^{(x^3)}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

se $t \to 0$

sostituisco $t = x^3$

lo posso fare perché se

$x \to 0 \Rightarrow x^3 \to 0$.

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2} + \frac{(x^3)^3}{6} + o((x^3)^3)$$

$$= \boxed{1 + x^3 + \frac{x^6}{2}} + \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$o(x^8)$

$$e^{x^3} = \underbrace{1 + x^3 + \frac{x^6}{2}}_{P_8(x)} + \underbrace{o(x^8)}_{R_8(x)}$$

ott 27-17:08

Es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$$

$$\frac{\overbrace{\cancel{x} + o(x^2)}^{\sin x} - \cancel{x}}{\underbrace{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x)}_{e^x} - \underbrace{[\cancel{x} + o(x)]}_{\log(1+x)} - \cancel{1}} = \frac{o(x^2)}{o(x)}$$

non mi dice niente.

ott 27-17:09

$$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left[\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{x^3\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)}{x^2\left(1 + o(1)\right)}$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} \longrightarrow 0$$

Es: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)\,\frac{\log(1+x) - \sin x}{x^4}$

$$\left(\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}\right)\frac{\cancel{x} + o(x) - \left(\cancel{x} + o(x^2)\right)}{x^4}$$

$$= (x + o(x))\,\frac{o(x)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^4} \cdot\ ?$$

aumento il numero di termini

ott 27-17:18

$$(e^x - 1)\,\frac{\log(1+x) - \sin x}{x^4} =$$

$$= \left(\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}\right)\frac{\overbrace{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}^{\log(1+x)} - \overbrace{\left(\cancel{x} + o(x^2)\right)}^{\sin x}}{x^4}$$

$$= \left(x + o(x)\right)\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^4} = \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^{\cancel{4}}} \qquad x \to 0^+ \qquad = \frac{-\frac{1}{2} + 0}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$$

$$(\sin x)^2 - \sin(x^2) = [x + o(x^2)]^2 - \underbrace{(x^2 + o((x^2)^2))}_{} =$$

$$\sin t = t + o(t^2)$$

$$t = x^2 \qquad x \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$= \cancel{x^2} + o(x^3) - (\cancel{x^2} + o(x^4)) = o(x^3)$$

non basta

$$(\sin x)^2 - \sin(x^2) = \qquad t = x^2$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + o((x^2)^4)\right)$$

$$= \cancel{x^2} - 2\frac{x^4}{6} + o(x^5) - \left(\cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

ott 27-17:37

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\log(\cos x) + x^2}{\sin(x^4)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$+ o(x^3)$$

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$t = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

se $x \to 0$ $\to t \to 0$

ott 27-17:38

$$2\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = \qquad t^2$$

$$= 2\left[\overset{t}{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2 +\right.$$

$$\left. + o\left(\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2}_{t^2}\right)\right]$$

$$= -x^2+o(x^3) - \frac{1}{2}\left(+\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right) +$$

$$o\left(\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right) = -x^2+o(x^3)$$

$$\frac{2\log(\cos x)+x^2}{\sin(x^4)} = \frac{\cancel{-x^2} + o(x^3) + \cancel{x^2}}{x^4 + o(x^8)} \; ?$$