$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}$$

minimo di g.

$$x^2 \leq g(x) \leq 3x^2$$

$$g(x) \geq 0 \qquad g(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \min g = 0$$

Se $x \neq 0$ calcolo $g'(x)$.

$$g'(x) = 4x - 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$$

segno di g' ??

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 - 0 + \nexists$$

ott 26-11:26

La derivata di g cambia segno infinite volte in ogni intorno di 0.

g è derivabile in 0?

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$$

ott 26-11:29

$$= \lim_{x \to 0} \frac{7x^{\cancel{2}} - x^{\cancel{2}} \sin\frac{1}{x} - \cancel{0}}{\cancel{x} - \cancel{0}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 7x - x \sin\frac{1}{x} = 0 - 0 = 0.$$

ott 26-11:31

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathrm{int}(A)$, f derivabile 2 volte in x_0, $f'(x_0) = 0$.

1) Se x_0 è punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

2) Se x_0 è punto di massimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

ott 26-11:34

3) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale

4) Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max locale.

Es: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$f'(0) = 0$ $f''(0) > 0$ $f''(x) = 2$

$\Rightarrow$ 0 è di minimo locale.

$f(x) = -x^2$ $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$

$\Rightarrow$ 0 è di max locale.

Se $f''(x_0) = 0$ non potete dire niente

ott 26-11:37

Es: $f(x) = x^4$

$g(x) = x^3$

$h(x) = -x^4$

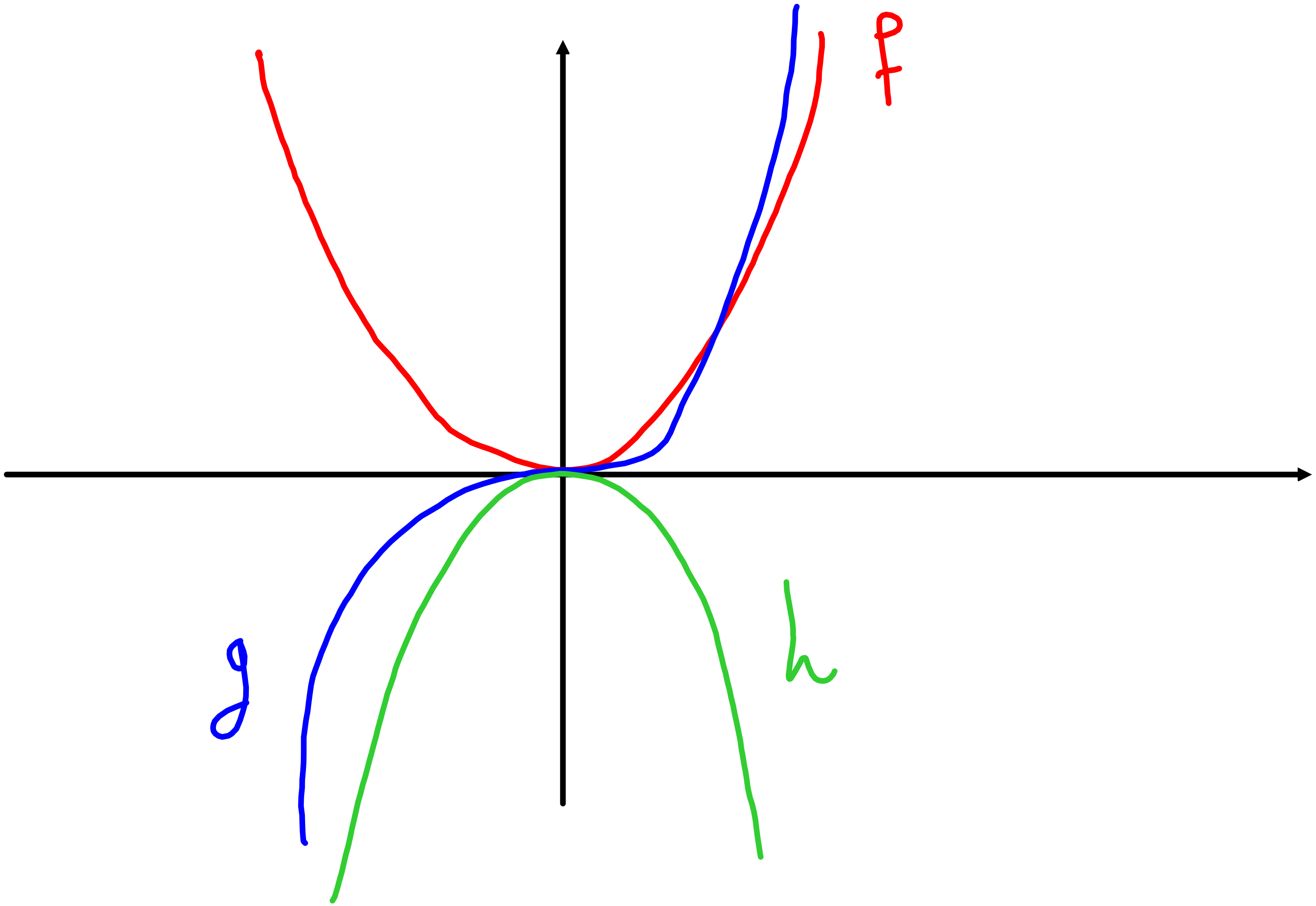
$f' = 4x^3$, $g' = 3x^2$, $h' = -4x^3$

$f'(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $h'(0) = 0$

$f'' = 12x^2$, $g'' = 6x$ $h'' = -12x^2$

$f''(0) = 0$, $g''(0) = 0$, $h''(0) = 0$

ott 26-11:39



ott 26-11:41

Teorema di de l'Hôpital

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad g, f : (a,b) \to \mathbb{R}$

g, f derivabili in (a,b). Se valgono le seguenti ipotesi

1) $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Vale anche per il $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

ott 26-11:46

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$

$f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$

$g(x) = x^4$

$g' = 4x^3$ non si annulla in un intorno di 0 (a parte in 0)

$f' = -2\sin x + 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

applico de l'Hôpital di nuovo

derivo num. e denomin.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital di nuovo

ott 26-11:51

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{24 x} = \frac{1}{12}$$

applicando il teorema ottengo che il limite originale vale $\frac{1}{12}$.

ott 26-11:54

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\frac{f'}{g'} = \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\frac{e^x}{2} \to \frac{+\infty}{2} = +\infty$.

ott 26-11:56

Es: Verificata sempre l'ipotesi 1). Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

se non verificate l'ipotesi 1) e usate de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

ott 26-11:58

Es: Potrebbe esistere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$ ma non esistere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (ipotesi 3).

ott 26-12:01

Es: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$g'(x) = 1$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

ott 26-12:05

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x \sin \frac{1}{x}}^{\to 0} - \overbrace{\cos \frac{1}{x}}^{\nexists}}{1} = \nexists$$

cosa concludo?

non vale l'ipotesi 3) quindi non posso applicare il teorema di de l'Hôpital

Se l'avessi applicato e avessi concluso che $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ avrei sbagliato, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x}}{\cancel{x}} = 0$$

ott 26-12:09

<u>Corollario</u>: Se f è <u>continua</u> <u>in x_0</u> e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0 e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $\exists\, f'(x_0) = \ell$.

ott 26-12:12

dim:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

posso applicare de l'Hôpital?

1) numeratore $\longrightarrow 0$ perché f è continua in x_0.

2) vale perché $g'(x) = 1$.

ott 26-12:14

$$3) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = \ell$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell .$$

Oss: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ non potete concludere che $\nexists f'(x_0)$.

Infatti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ott 26-12:18

È derivabile in 0?

Calcolo $f'(x)$ per $x \neq 0$.

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 + \nexists = \nexists .$$

ott 26-12:20

non posso concludere che
f non ha derivata in 0.

Infatti

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = 0$$

$\rightarrow$ f è derivabile in 0.

Es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x}{\sin^2 x\, e^{x^2}} = \frac{0}{0}$$

$1 \quad 1$

di l'Hôpital

$$\frac{2x\cos^2 x - x^2\cdot 2\cos x\sin x}{2\sin x\cos x\, e^{x^2} + \sin^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x}$$

ott 26-12:24

Es: $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{e^{-1/0^+}}{0^+} = \frac{e^{-\infty}}{0^+} = \frac{0^+}{0^+}$

de l'Hôpital

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{2x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

ott 26-12:27

potete provare a scriverlo diversamente.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

applico de l'Hôpital.

derivo $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$\frac{-2x^{-3}}{e^{1/x}\left(-x^{-2}\right)} = \frac{+2x^{-1}}{e^{1/x}}$$

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{x^{-2}}{e^{1/x}}$$

derivo sopra e sotto.

$$\frac{-2x^{-3}}{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})} =$$

$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} =$

$= -x^{-2}$

moltiplico sopra e sotto per $-x^2$

$$= \frac{2x^{-1}}{e^{1/x}}$$

da l'Hôpital di nuovo

ott 26-12:34

$$\frac{-2x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)} = \frac{2}{e^{1/x}}$$

$$\longrightarrow \frac{2}{e^{1/0^{+}}} = \frac{2}{e^{+\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

<u>Def</u>: dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

si chiama <u>n fattoriale</u>.

per convenzione

$$0! = 1$$

ott 26-12:38

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = (3!) \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

$$5! = (4!) \cdot 5 = 120$$

in generale

$$(n+1)! = n!\,(n+1).$$

$$(n+1)! = \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n]}^{n!}(n+1) =$$

$$= n!\,(n+1).$$

ott 26-12:40