<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se $\exists\ V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $V \subset A$.

<u>Es</u>: $A = [3,4]$ i punti interni sono l'insieme $(3,4)$.

I punti interni ad A si indicano con $\mathrm{int}(A)$.

Teorema di Fermat

$f : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ è un punto di massimo o di minimo locale e se f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0.$$

dim: Se f è derivabile in x_0

allora $\exists$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (*)$$

supponiamo che x_0 sia di minimo locale. $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ in un intorno di x_0

allora $(*) \geq 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{in un}$$

intorno destro di x_0

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$$

nel caso del limite sinistro

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

≥ 0 perché è un minimo locale

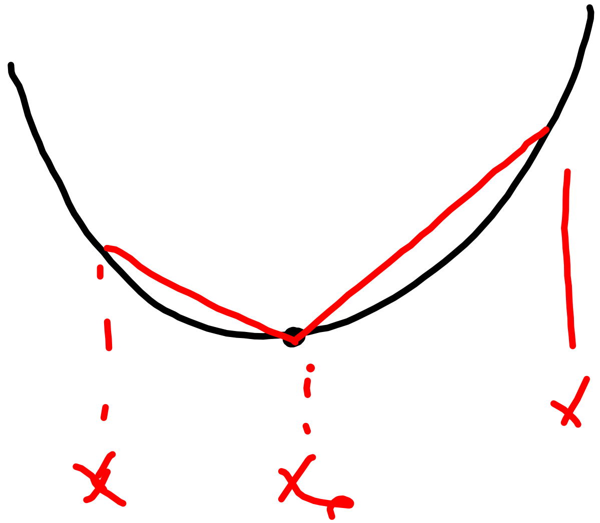
≤ 0 perché $x \to x_0^-$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 .$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0 .$$

$\square$

ott 21-09:19



ott 21-09:21

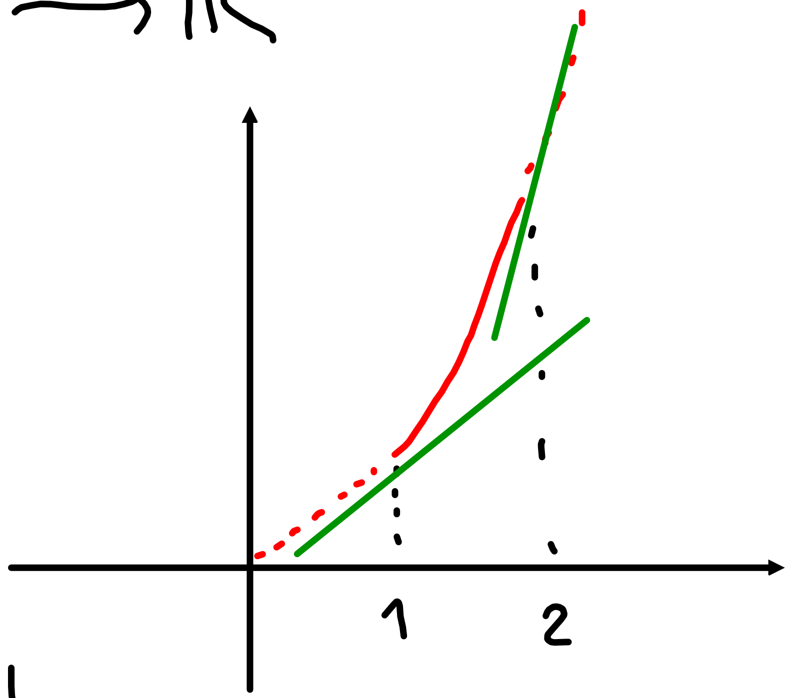
Le ipotesi sono tutte necessarie.

Es: $f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$x_0 = 1$ è di minimo locale

$x_1 = 2$ è di massimo locale



$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \neq 0$$

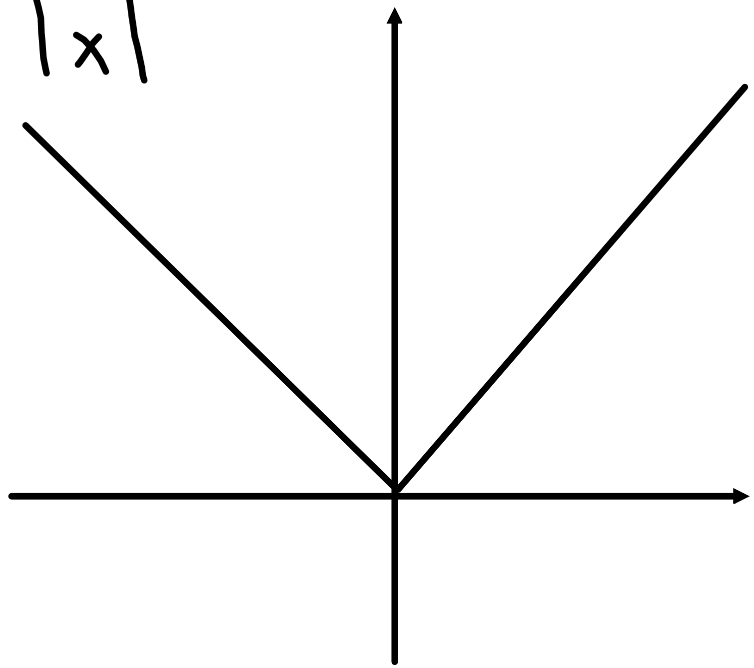
$$f'(x_1) = f'(2) = 4 \neq 0$$

ma x_0 e x_1 non sono punti interni.

ott 21-09:24

L'ipotesi di derivabilità è necessaria.

Es: $f(x) = |x|$



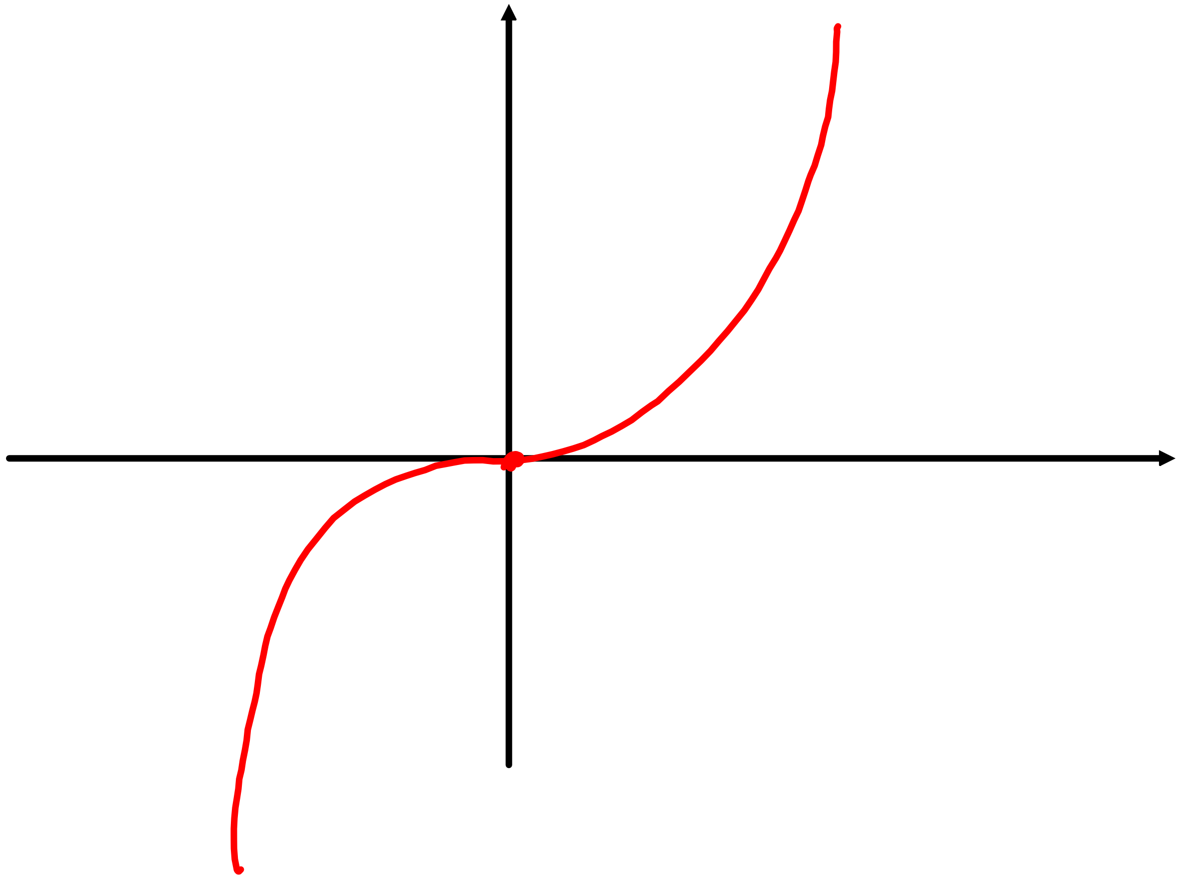
$x_0 = 0$ è punto di minimo ma $\nexists f'(0)$.

Oss: Il teorema di Fermat è una condizione necessaria ma non suff. per un max o un minimo locale.

Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

ma $x_0 = 0$ non è né di max né di min. locale

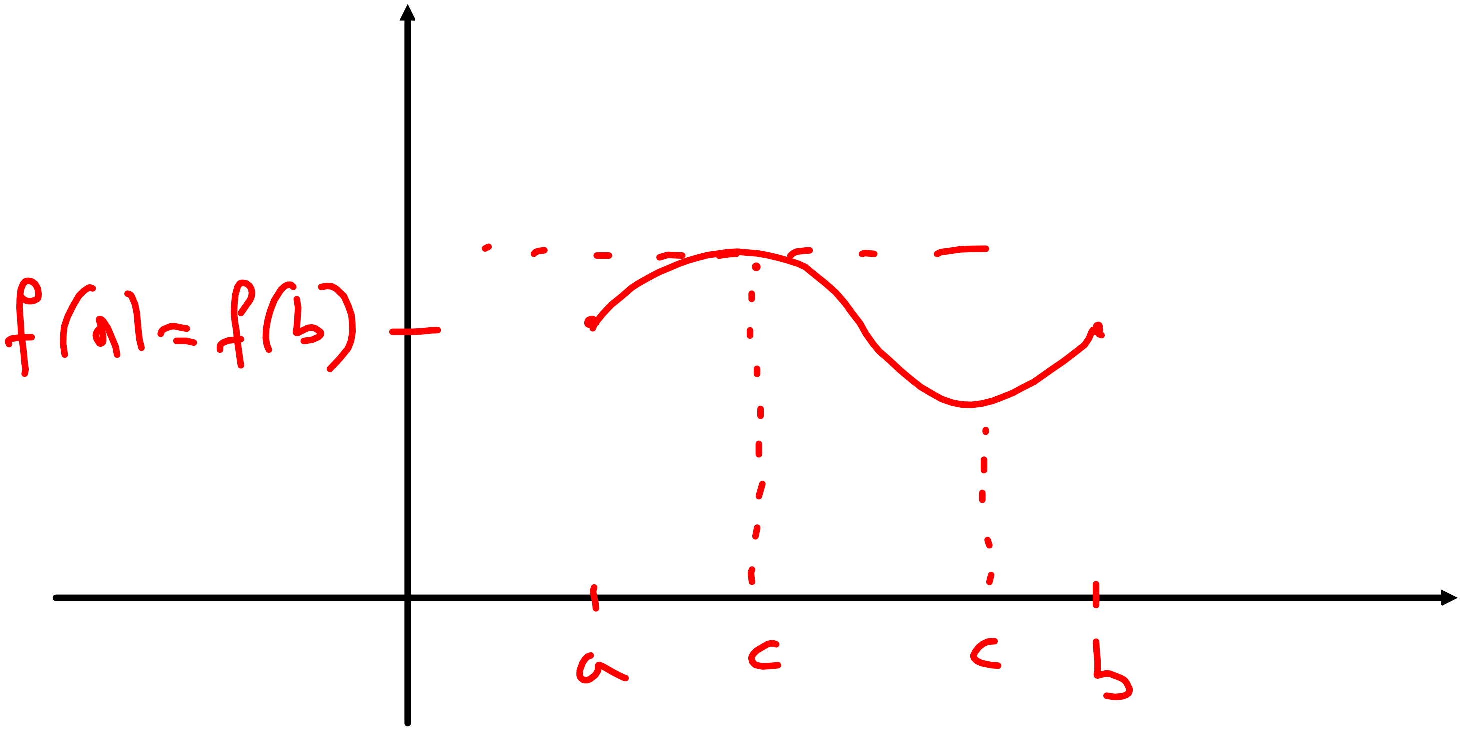


ott 21-09:32

Teorema di Rolle

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

ott 21-09:33



ott 21-09:35

<u>dim</u>: f è continua in $[a,b]$ quindi per il teorema di Weierstrass f ha max e min.

Siano x_1, x_2 t.c.

$$f(x_1) = \min f \quad , \quad f(x_2) = \max f .$$

caso 1) f è costante

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Caso 2) f non è costante.

allora x_1 oppure x_2 sono punti interni ad (a,b).

$\Rightarrow$ per il teorema di Fermat

$f'(x_1)=0$ oppure

$f'(x_2)=0$.

$\square$

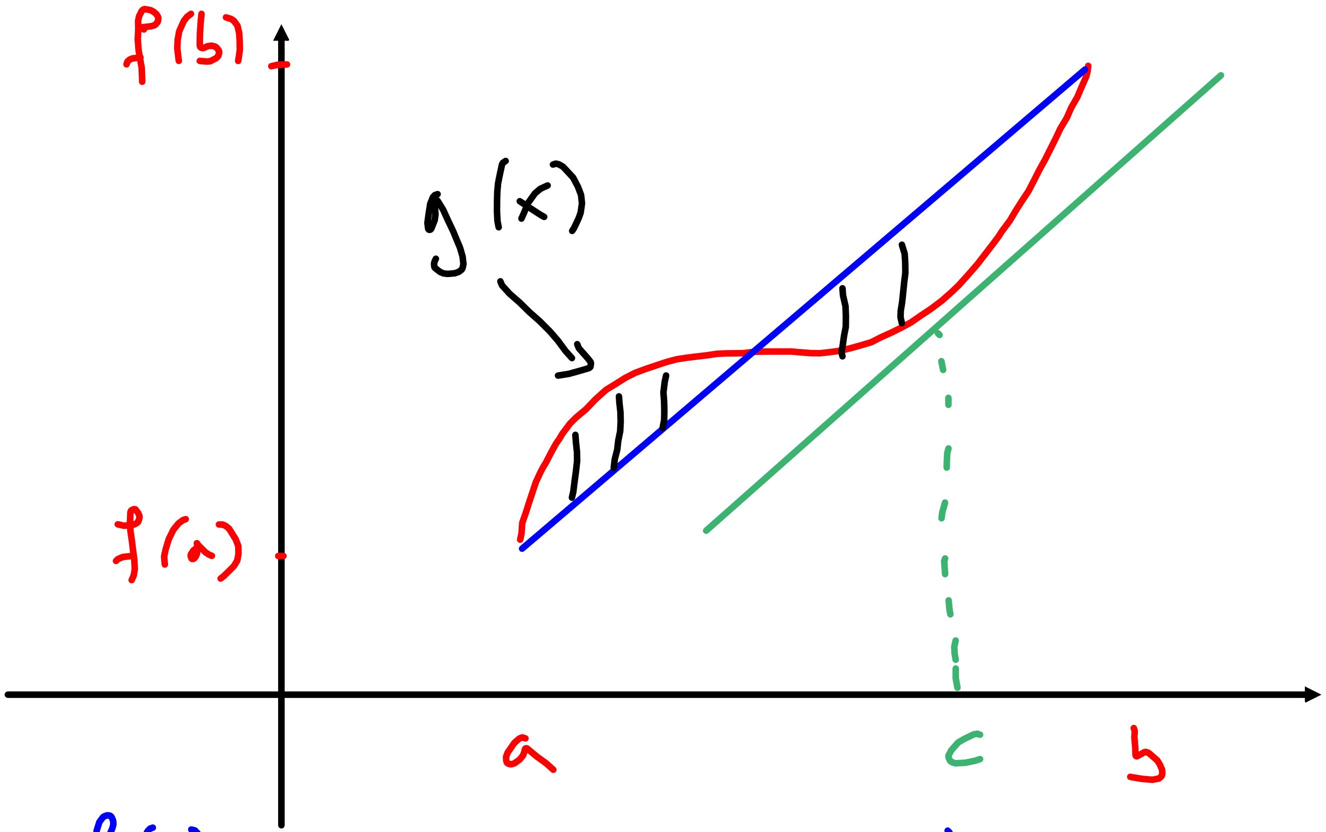
Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Allora $\exists\; c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

ott 21-09:40



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare del segmento che unisce gli estremi del grafico.

ott 21-09:42

<u>dim</u>: Definisco

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

è la retta che passa per gli estremi del grafico.

Definisco $g(x) = r(x) - f(x)$

è la distanza col segno tra la retta e la funzione

g è continua in $[a,b]$
e derivabile in (a,b).

$$g(a) = r(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = r(b) - f(b) = f(b) - f(b) = 0$$

$$\Longrightarrow g(a) = g(b)$$

applico Rolle a g

quindi $\exists\ c \in (a, b)$ t.c.

$$g'(c) = 0 .$$

$$g'(c) = r'(c) - f'(c)$$

$$r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0 \Rightarrow r'(c) = f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

ott 21-09:52

<u>Teorema</u>.

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ continua in I

e derivabile in $\mathrm{int}(I)$.

1) se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$

allora f è costante in I

2) se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$

ott 21-09:56

allora f è deb. crescente in I

3) se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Int}(I)$

$\Rightarrow$ f è deb. decresente in I

4) se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Int}(I)$

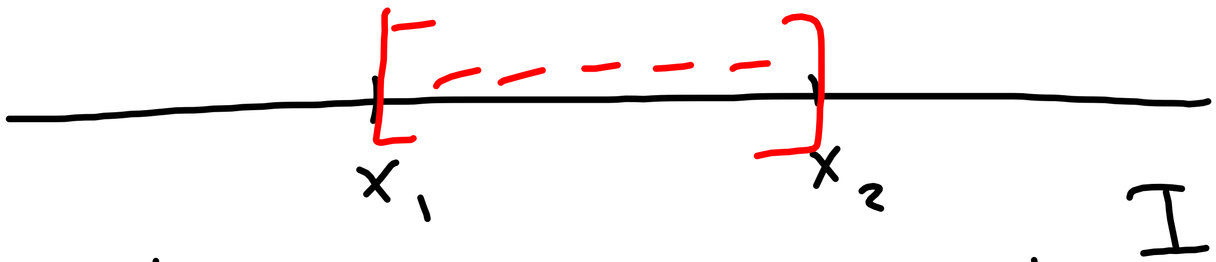
$\Rightarrow$ f è strett. crescente in I

5) se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathrm{Int}(I)$

$\Rightarrow$ f è strett. decresc. in I.

dim: siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. I è un intervallo

$\Rightarrow [x_1, x_2] \subset I$



applico Lagrange a f sull'intervallo

$[x_1, x_2]$

ott 21-10:00

allora $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$x_2 - x_1 > 0$

quindi $f(x_2) - f(x_1)$ ha lo stesso segno di $f'(c)$.

caso 1) se $f'(x) = 0\ \forall x \in \text{int}(I)$

$c \in \text{int}(I) \Rightarrow f'(c) = 0$

ott 21-10:02

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \quad \Rightarrow f \text{ è costante}$$

4) $\quad f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in \operatorname{int}(I)$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

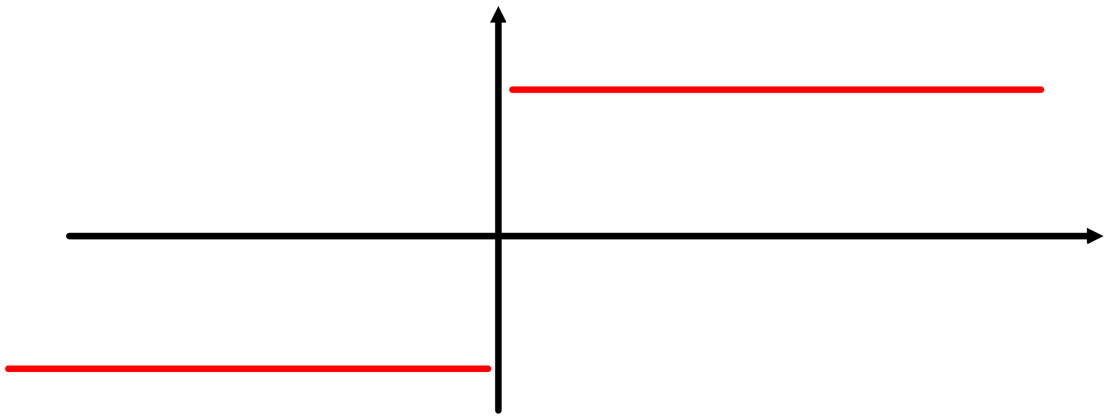
$\Rightarrow f$ è strett. crescente.

$\square$

Oss: f deve essere definita su un intervallo.

Es: $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



ott 21-10:07

f è derivabile in tutto il suo dominio e

$$f'(x) = 0 \quad \forall x$$

ma f non è costante.

ott 21-10:10

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

f è derivabile in tutto il suo dominio

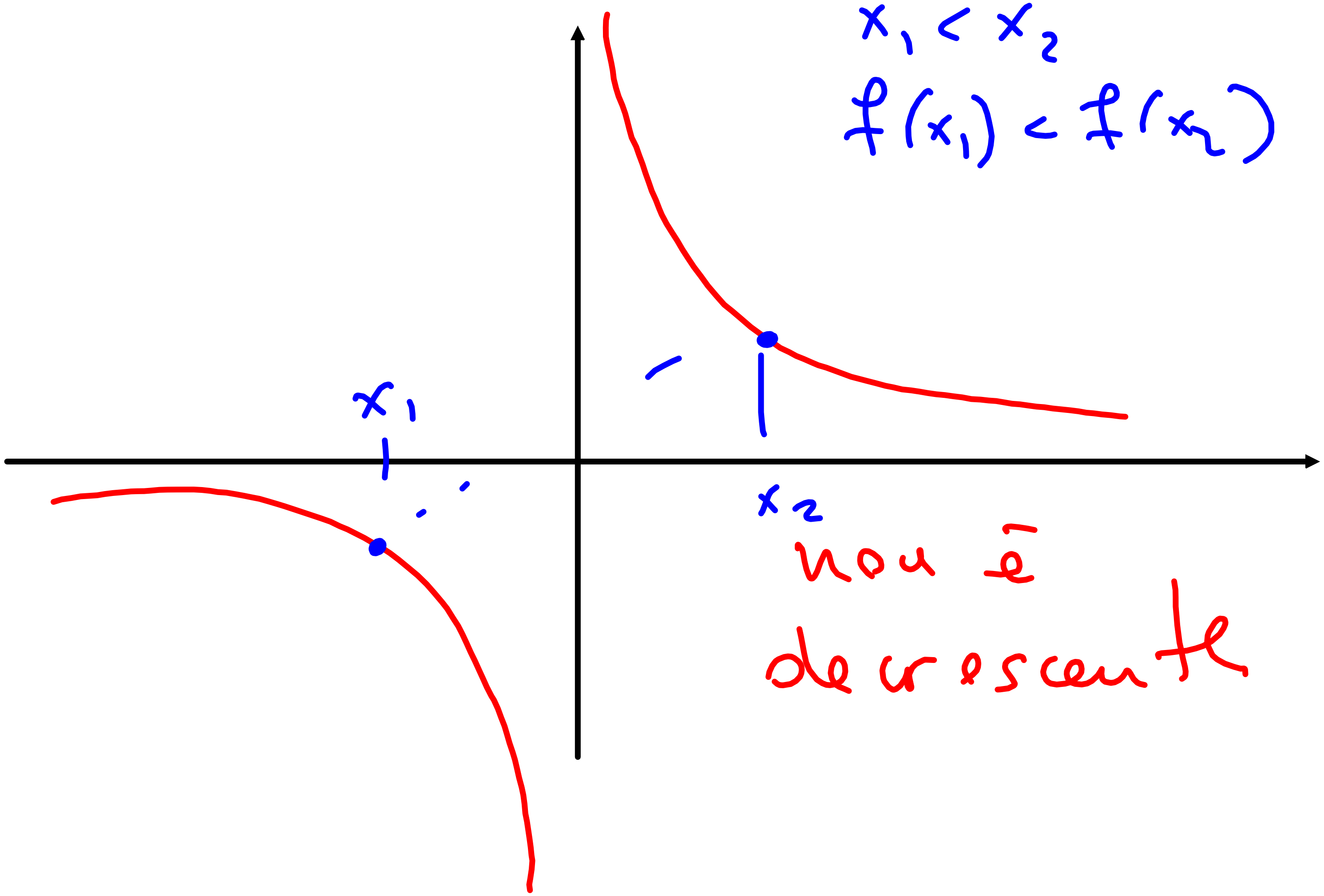
$$f'(x) = D(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x$

ott 21-10:11

$x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$



non è decrescente

ott 21-10:13

In questi esempi la f
non è definita su un
intervallo.

ott 21-10:14

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ f è costante in $(0, +\infty)$

quanto vale la costante?

La calcoliamo in un punto

$x = 1$

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} .$$

ott 21-10:20

$$\Rightarrow \quad \operatorname{artg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \boxed{x > 0}$$

Se $x < 0 \rightarrow f(x)$ è costante

ma $f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{artg} \frac{1}{-1}$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

ott 21-10:22

quindi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

se $x < 0$.

ott 21-10:24

<u>Prop</u>: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo
$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f
derivabile in $\mathrm{int}(I)$ e
$f'(x_0) = 0$

1) se $f'(x) \leq 0$ in un intorno
sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$
in un intorno destro di x_0

allora x_0 è punto di minimo locale.

2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 $\Rightarrow$ x_0 è punto di massimo locale.

ott 21-10:28

Es: $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

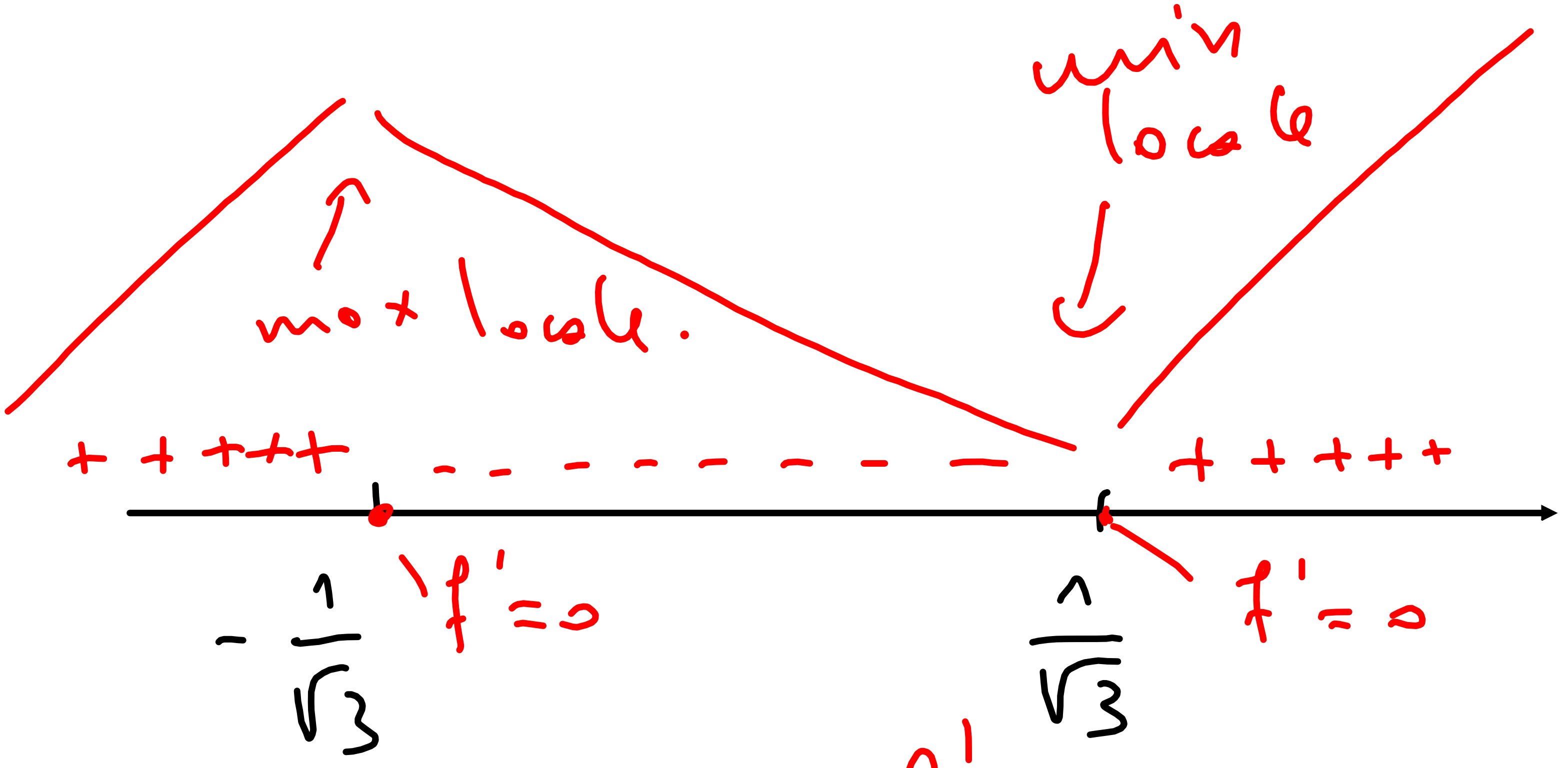
segno di f'

$3x^2 - 1 \geq 0$ $\quad x^2 \geq \frac{1}{3}$

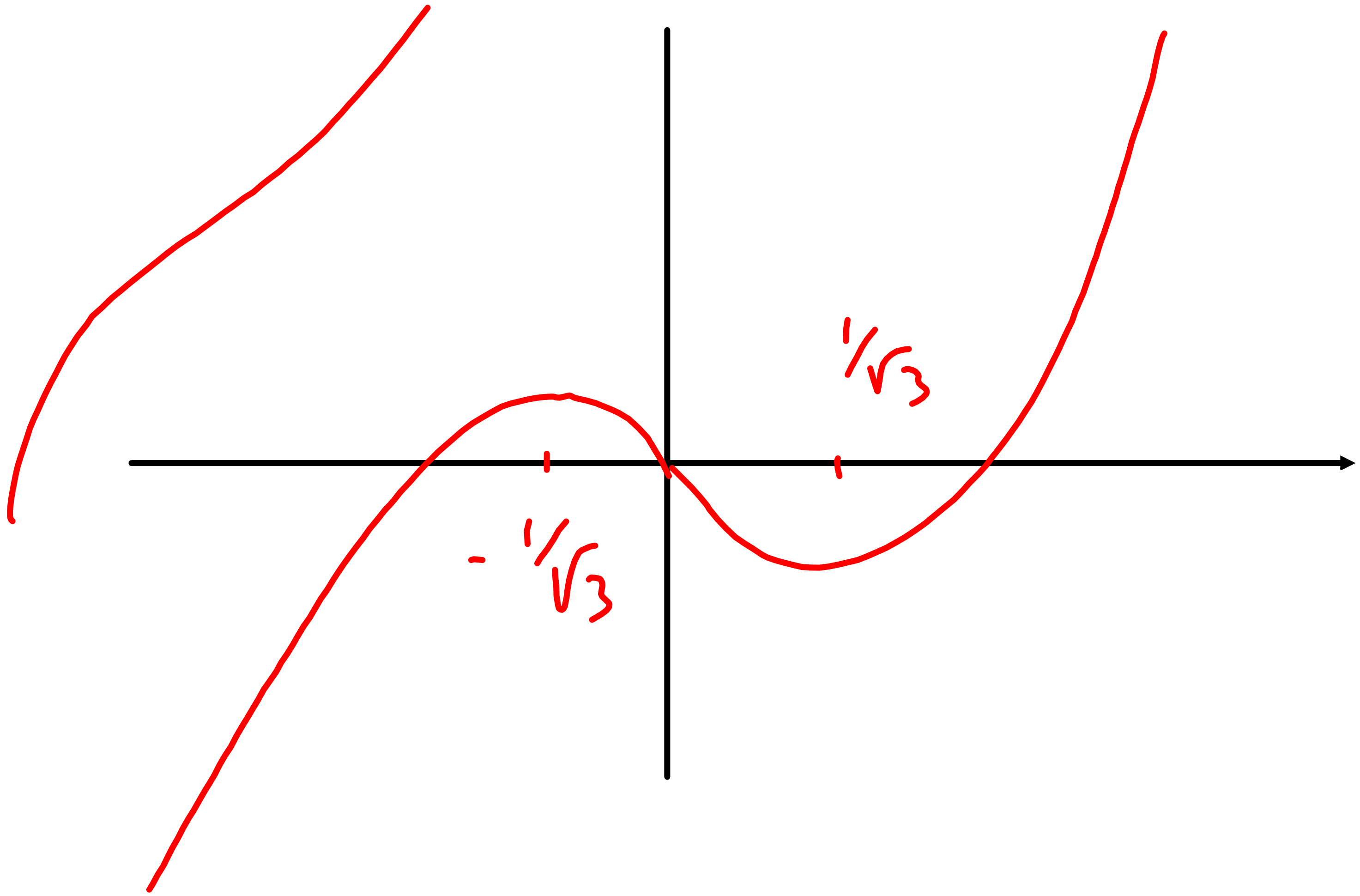
$|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

ott 21-10:29



segno di f'



ott 21-10:33

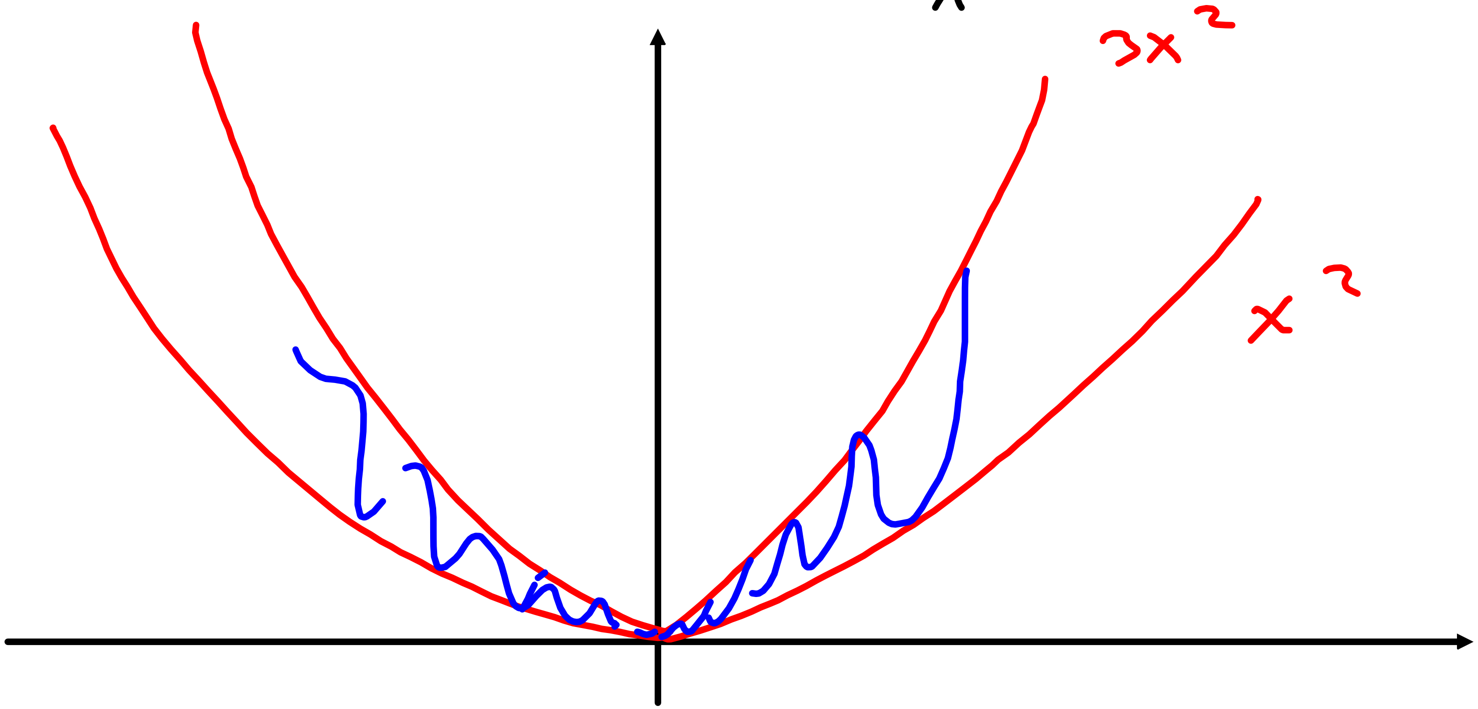
$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

ott 21-10:36

$$x^2 \leq 2x^2 - x^2 \sin\frac{1}{x} \leq 3x^2$$



ott 21-10:38