Oss: f è derivabile in x_0
se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

dim: Se f è derivabile in x_0
allora

ott 19-11:09

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$\iff f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0)$$

$$\square$$

ott 19-11:18

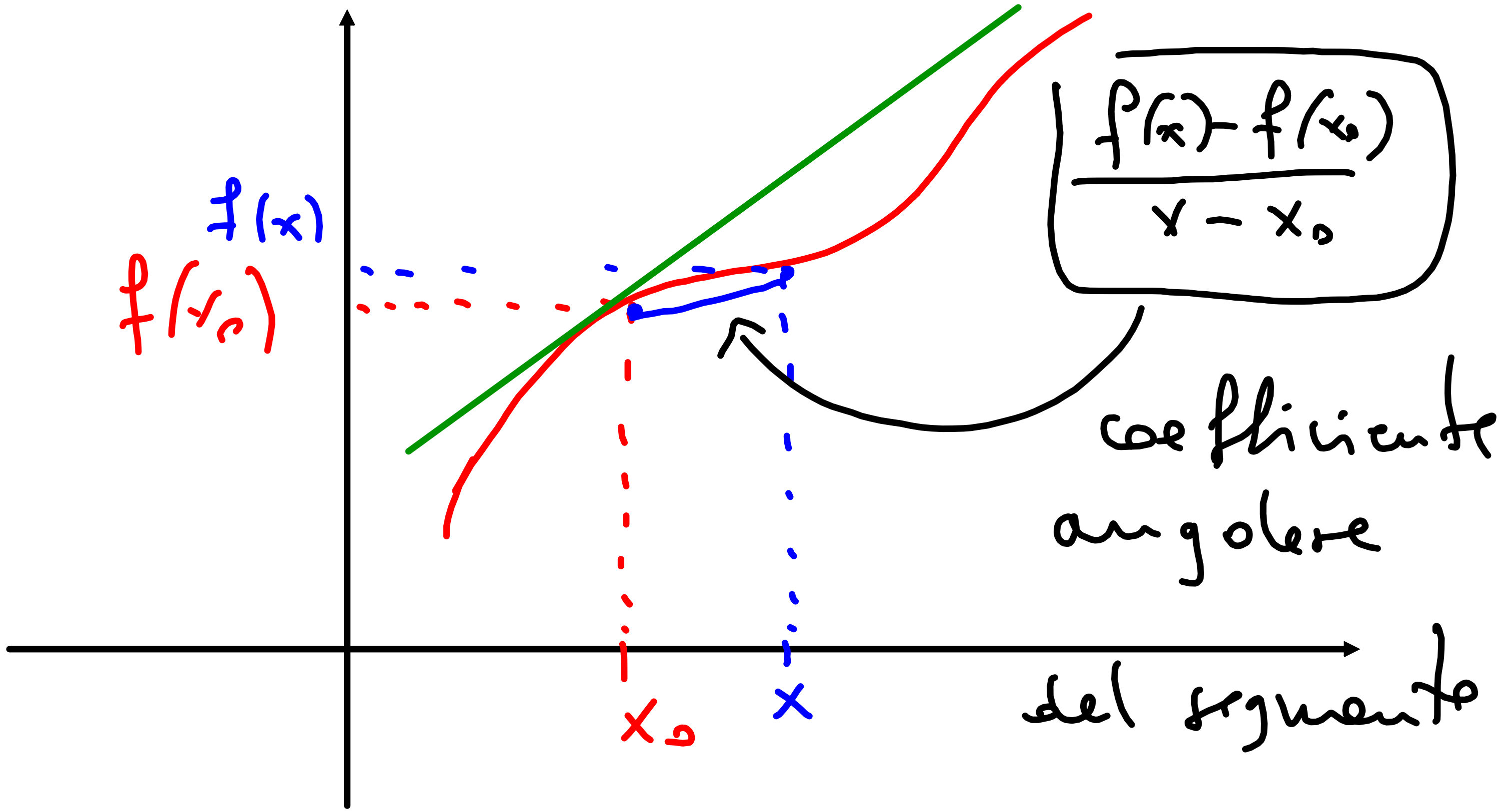
Def: Se f è derivabile in x_0 la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si dice retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico.

ott 19-11:22



f(x)
f(x₀)
x₀
x
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
coefficiente angolare del segmento

Derivata di sin x

x_0 fissato.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$\sin(\alpha + \beta) =$
$\sin\alpha \cos\beta +$
$\cos\alpha \sin\beta$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\underbrace{x_0}_{\alpha} + \underbrace{x - x_0}_{\beta}) - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x_0 \cos(x-x_0) + \cos x_0 \sin(x-x_0) - \sin x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \sin x_0 \frac{\cos(x-x_0) - 1}{x - x_0} +$$

$$+ \lim_{x \to x_0} \cos x_0 \boxed{\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}} \to 1 \qquad = \cos(x-x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \sin x_0 \frac{\cancel{1} - \frac{(x-x_0)^2}{2} + o\left((x-x_0)^2\right) - \cancel{1}}{x - x_0} \to 0$$

$$+ \cos x_0 \cdot 1 = 0 + \cos x_0 = \cos x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-\frac{(x-x_0)^2}{2} + o((x-x_0)^2)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} -\frac{(x-x_0)}{2} + o(x-x_0) = 0$$

sin x è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$

e $D(\sin x) = \cos x$

ott 19-11:39

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} = \left| \begin{array}{l} x-x_0=t \\ \text{se } x\to x_0 \\ \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Se $f: A \to B$ è derivabile in ogni punto di A, allora $\forall x \in A$ posso calcolare $f'(x) \in \mathbb{R}$. Quindi posso definire la funzione derivata

$$f': A \to B$$

ott 19-11:43

$$D(\sin x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Con calcoli simili

$$D(\cos x) = -\sin x \, .$$

Derivata di e^x

$x_0 \in \mathbb{R}$ fissato.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0 + x - x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

ott 19-11:45

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} =$$

$x - x_0 = t$

$x \to x_0$

$\Rightarrow t \to 0$

$$= e^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^{t} - 1}{t} \to 1$$

$$= e^{x_0}$$

ott 19-11:47

quindi

$$D(e^x) = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Derivate successive

Se f è derivabile in un insieme A, costruisco

$$f' : A \to \mathbb{R}$$

e se anche f' è derivabile in A costruisco

$$D(f') : A \to \mathbb{R}$$

ott 19-11:51

$D(f')$ si dice derivata seconda di f e si indica con f''.
Allo stesso modo si costruiscono le derivate successive.

f''' derivata terza

$f^{(4)}$ derivata quarta

$f^{(k)}$ $k \in \mathbb{N}$ indica

la derivata di ordine k

ott 19-11:54

per convenzione

$$f^{(0)} = f$$

la derivata di ordine $\emptyset$ è la funzione stessa.

Def: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$

Se f è derivabile almeno k-volte in A e $f^{(k)}$ è continua, si dice che f è di classe C^k in A e si scrive $f \in C^k(A)$.

Oss: Se $f \in C^{k+1}(A)$ allora $f \in C^{k}(A)$.

Oss. $C^{0}(A)$ indica l'insieme delle funzioni continue in A. A volte si scrive solo $C(A)$.

Def: Se esiste $f^{(k)}(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^∞ e si scrive $f \in C^\infty(A)$.

Es: $f(x) = e^x$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

ott 19-12:00

Teorema.

Se f e g sono derivabili in x_0 allora

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ott 19-12:02

2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3) se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Oss: Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in x_0 con $g(x_0) \neq 0$ allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

<u>dim (Teorema del prodotto)</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} +$$

$$+\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + $$

$$+\lim_{x\to x_0} f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

perchè
g è continua

Oss: Se f è costante allora $f'(x) = 0 \quad \forall x$.

Oss: se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$D(kf) = k\, D(f).$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} =$$

ott 19-12:15

$$= k \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k\, f'(x_0).$$

$$\underline{Es}: \quad D(-\sin x) = -\cos x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = D(\cos x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = D(-\sin x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = D(-\cos x) =$$

$$= -D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x.$$

$$\Rightarrow \sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

$$f^{(5)}(x) = f'(x)$$

in generale

$$f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}$$

ott 19-12:19

Lo stesso per $\cos x$.

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{D(\sin x)\cdot\cos x - \sin x D(\cos x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

ott 19-12:21

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\[2ex] \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 \end{cases}$$

ott 19-12:23

Derivata della funzione inversa.

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e strettamente monotona.

Allora f^{-1} è derivabile

e $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ con $y = f(x)$.

ott 19-12:26

quindi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

ott 19-12:28

Es: $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

scritto $y = e^x$

$x = \log y$ $\quad \log y = f^{-1}(y)$

$$D(\log y) = D(f^{-1}(y)) =$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} =$$

ott 19-12:29

$$= \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

$$D(\log y) = \frac{1}{y}.$$

Quindi la funzione $\log x$ è derivabile in tutto il suo dominio $(0, +\infty)$

ott 19-12:32

e $D(\log x) = \dfrac{1}{x}$.

Prop: Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

ott 19-12:34

Es: $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$g(y) = e^{y}$ $g'(y) = e^{y}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) =$

$= e^{\sin x}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$

ott 19-12:36

$$= e^{f(x)} \cdot \cos x = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\boxed{D\left(e^{\sin x}\right) = e^{\sin x} \cdot \cos x \,.}$$

ott 19-12:38

$$D(x) = 1$$

$$D(x^2) = D(x \cdot x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x$$

$$= 2x$$

$$D(x^3) = D(x^2 \cdot x) =$$

$$= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$D(x^n) = n x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$n \geq 1.$$

$$D(x^\alpha) \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
$$x > 0$$

$$D(x^\alpha) = D\left(e^{\log(x^\alpha)}\right) =$$

$$= D\left(e^{\alpha \log x}\right) =$$

composizione

derivata di $\alpha \log x$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(e^{\log x}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} =$$

$$= \boxed{\alpha x^{\alpha - 1}}$$

Es: $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$D\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ott 19-12:46