$$f(x) = \sqrt{8 - e^x}\,\log|x-1|$$

A = insieme di definizione di f.

$$8 - e^x \geq 0 \qquad 8 \geq e^x$$

$$\log 8 \geq x$$

$$|x-1| > 0 \qquad x - 1 \neq 0 \qquad x \neq 1$$

$$A = (-\infty, \log 8] \setminus \{1\}$$

$$\max(A) = \log 8\ , \ \inf(A) = -\infty$$

ott 15-22:10

l'insieme A ha massimo ma
non ha minimo.

$$\sup(A) = \max(A) = \log 8 .$$

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x+1)}{\sqrt[4]{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{x^{1/4}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{3/4} + o(x^{3/4})}{1}$$

$$= 0$$

ott 16-09:22

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{1/4}} = \frac{\infty}{\infty} = \cancel{x}$$

$$\log(1+x) = \log\left[x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] =$$

$$= \log x + \log\left(\frac{1}{x}+1\right) \to 0 \text{ se } x\to\infty$$

$$\log\left(\frac{1}{\infty}+1\right) = \log(0+1) = 0$$

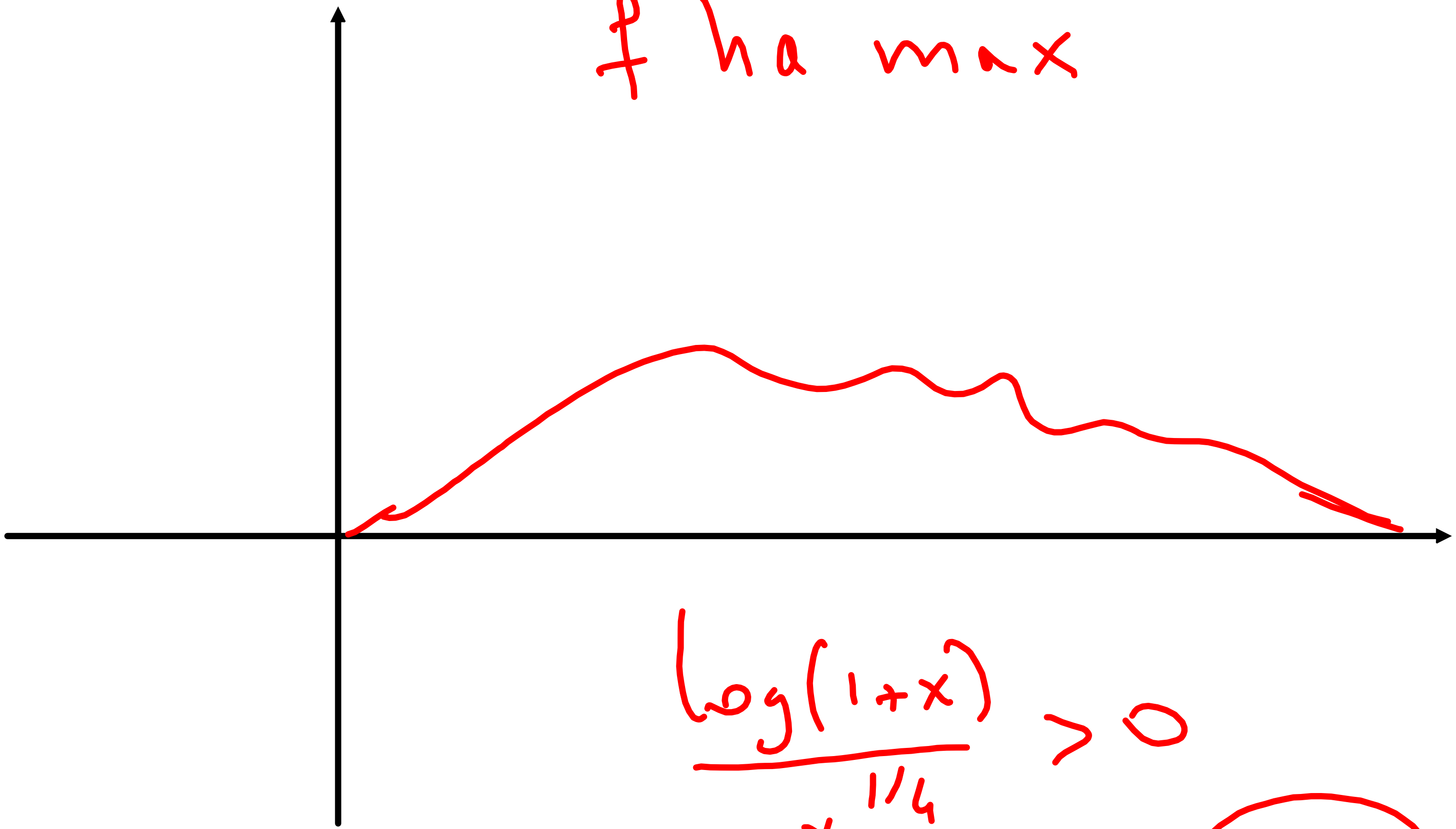
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{1/4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{1/4}} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{1/4}} \to \frac{0}{\infty} = 0$$

$$= 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

ott 16-09:29

f ha max



$$\frac{\log(1+x)}{x^{1/4}} > 0$$

$x > 0$

$\inf f = 0$ perchè $f > 0$

e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

ott 16-09:31

non è un minimo altrimenti

$\exists\ x_0 \in (0,+\infty)$ t.c.

$$f(x_0)=0.$$

$$f(x_0) = \frac{\log(1+x_0)}{x_0^{1/4}} > 0 \quad \text{impossibile.}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2} \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f è pari.

$$\lim_{x \to 0} |x|^{3/2} \log|x| = \lim_{x \to 0^+} x^{3/2} \log x$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \log x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

ott 16-09:35

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow$ f è continua in 0.

È derivabile? in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

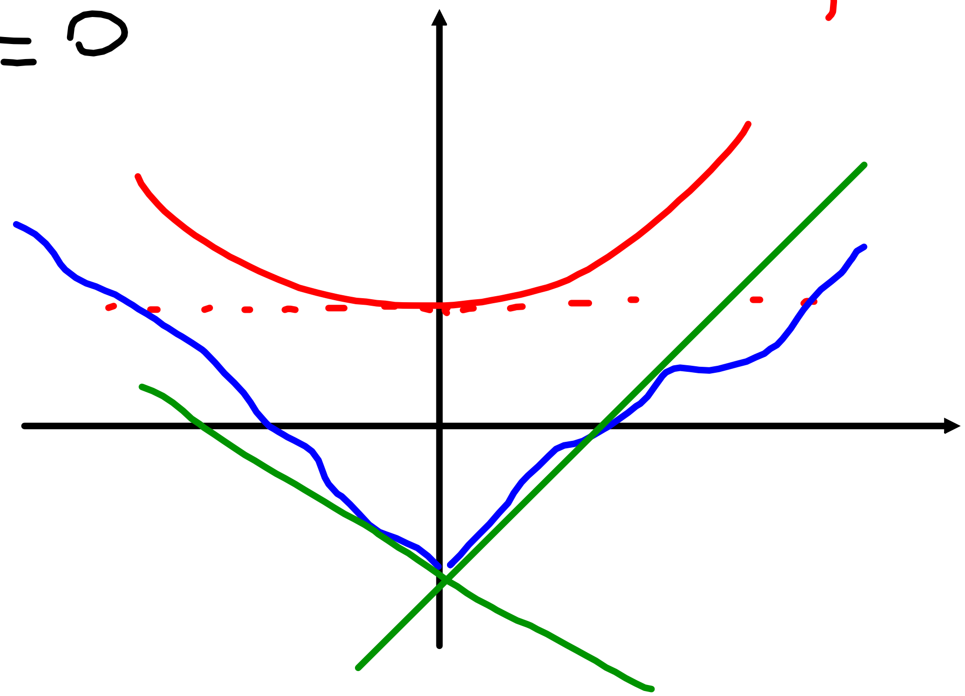
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^{3/2} \log|x| - 0}{x}$$

prima faccio il limite da destra.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{3/2} \cdot \log x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{1/2} \log x = 0$$

$$\Rightarrow f'_+(0) = 0$$

poi



ott 16-09:42

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

pr simmetria.

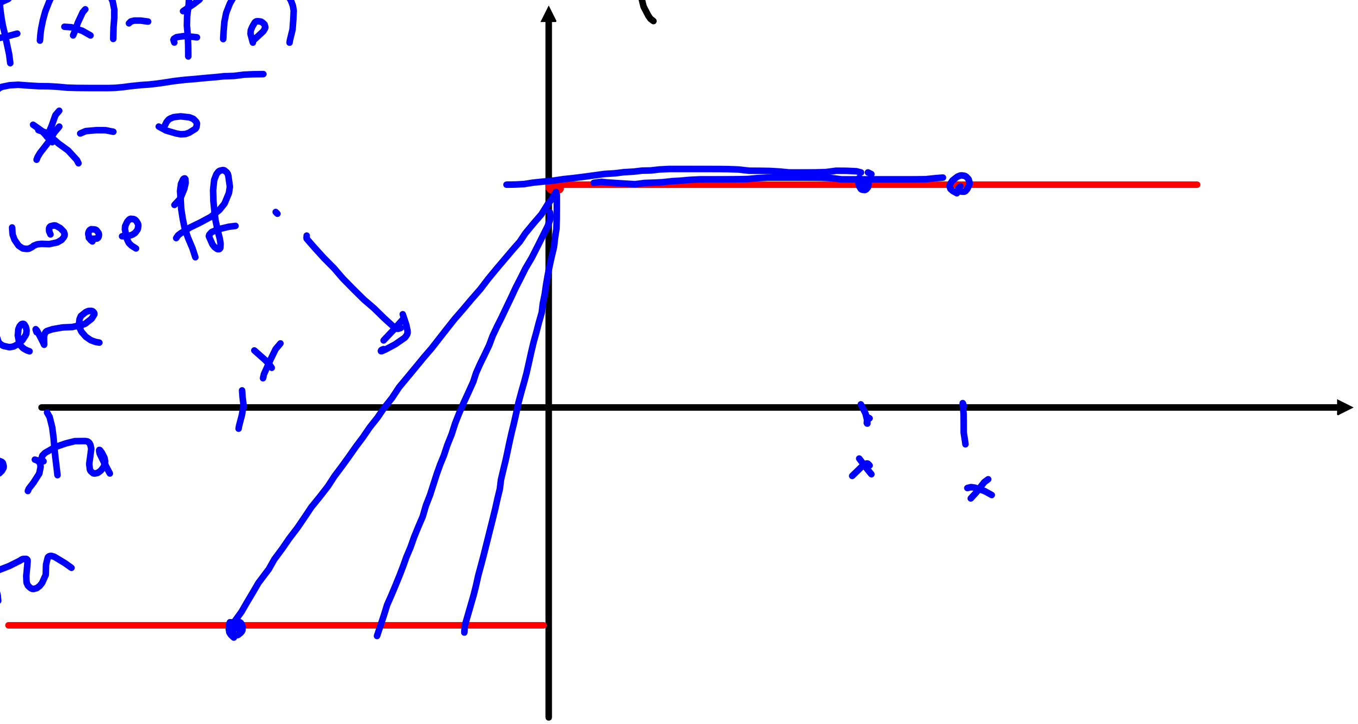
$\Rightarrow$ f è derivabile in 0.

ott 16-09:48

Es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

è il coeff. angolare di questa retta



f è derivabile in $(-\infty, 0)$

e in $(0, +\infty)$

e $f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0.$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

ma f non è derivabile in 0

perchè non è continua in 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$= 0 \ \forall x \neq 0.$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

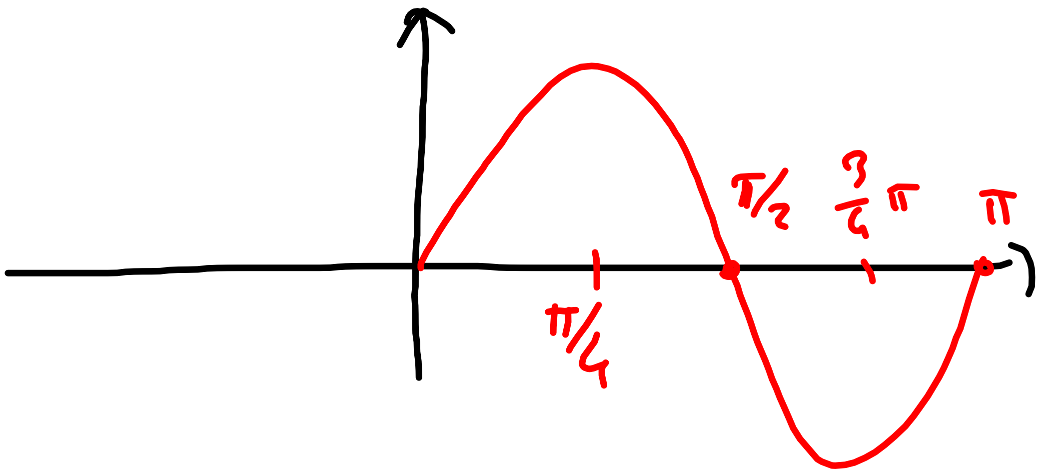
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-1 - 1}{x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

ott 16-09:53

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)}$$

$$\sin(2x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, \pi/2)$$



ott 16-09:59

$\sin t > 0$ se $0 < t < \pi$

$\sin(2x) > 0$ se $0 < 2x < \pi$

$\Downarrow$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$t = 3x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)} =$$

$$\boxed{\sin t = t + o(t)} \quad t \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x\,[3x + o(x)]}{[2x + o(x)]^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 + o(x^2)}{4x^2 + o(x^2)}$$

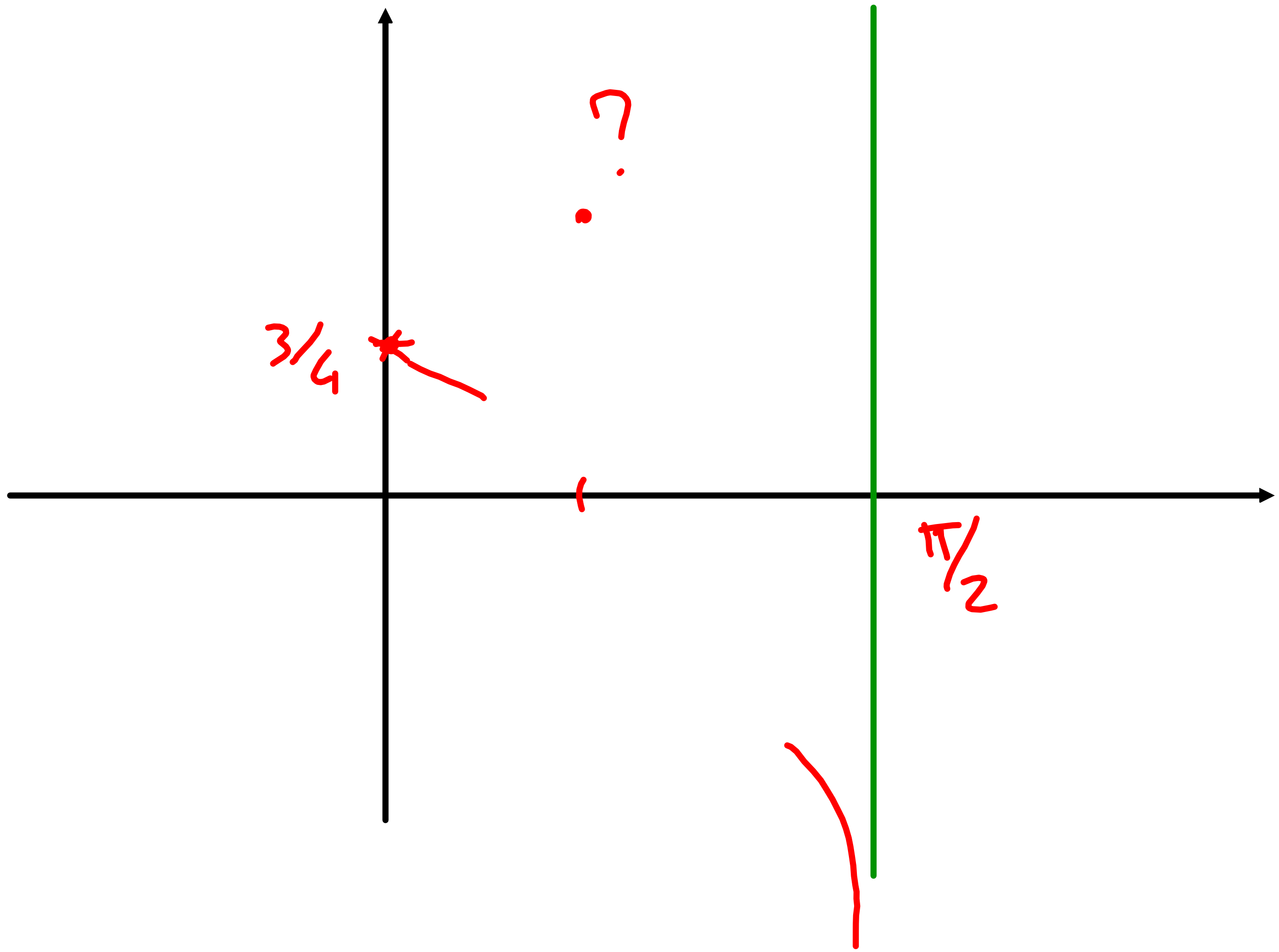
dividete per x^2 num. e denom.

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}}{4 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^2(\pi)} = \frac{\frac{\pi}{2}(-1)}{0^+} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) = -\frac{\pi}{2}(+\infty) = -\infty$$



ott 16-10:12

$x \to \infty \qquad \sin\left(x^{-1/3}\right) = ?$

$$x^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3}$$

Se $x \to \infty$

$\Rightarrow t \to 0$

$$\sin\left(x^{-1/3}\right) = x^{-1/3} + o\left(x^{-1/3}\right)$$

$x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \sin x \, \sin \frac{1}{x} = \cancel{?} \; 0$$

non ha limite

ma è limitata

$|\sin x| \leq 1.$

$$\sin \frac{1}{\infty} = \sin 0$$

$$= 0$$

ott 16-10:20

$$f : \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log(\log(tg\, x))$$

$tg\, x$ è crescente

$\log x$ è crescente $\Rightarrow$ f è crescente (strettam.)

$tg\, x$ è crescente.

ott 16-10:22

f è iniettiva.

per essere surgettiva
l'immagine di f deve
coprire tutto $\mathbb{R}$.

ott 16-10:25

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \log(\log(tg x)) =$$

$$= \log(\log(1)) =$$

$$= \log(0^+) = -\infty$$

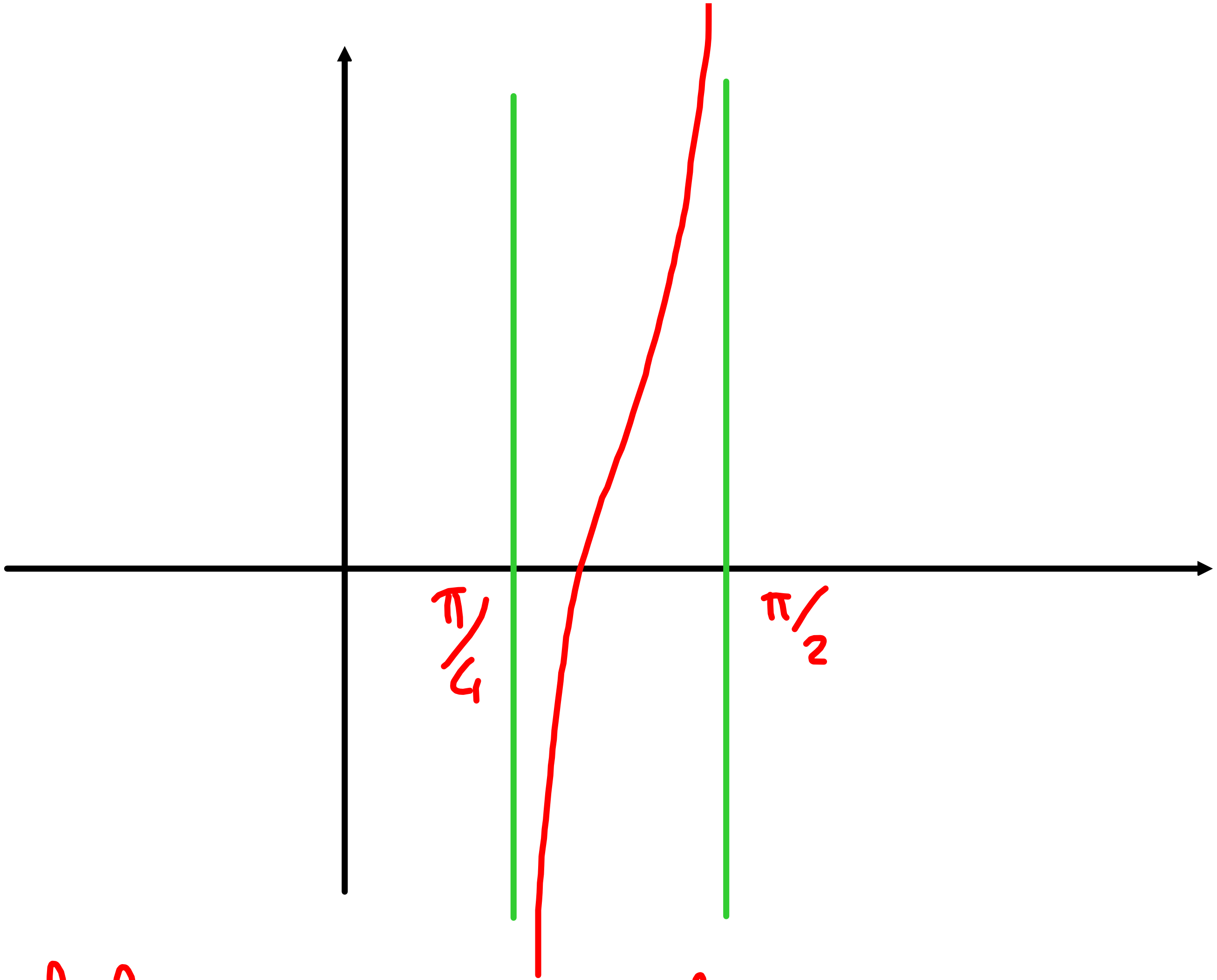
vuol dire $\lim_{t \to 0^+} \log(t) = -\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \log(\log(tg\,x)) =$$

$$= \log(\log(+\infty)) =$$

$$= \log(+\infty) = +\infty$$

ott 16-10:29



$\Rightarrow \inf f = -\infty, \ \sup f = +\infty$

ott 16-10:30

$\Rightarrow$ f è surgettiva

$\Rightarrow$ f è bigettiva.

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$$

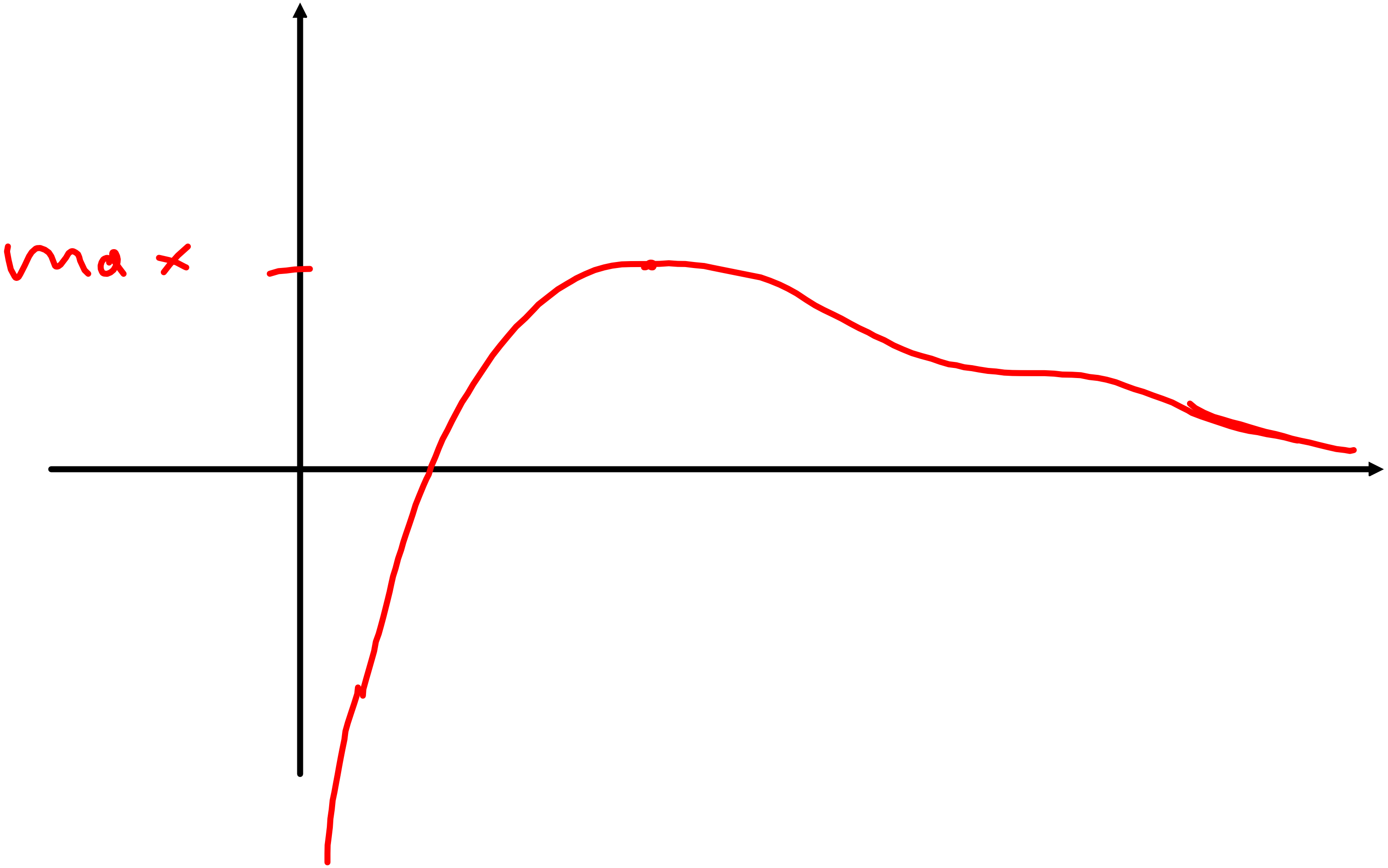
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{2x+1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{2x+1} = \quad \text{divido per } x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\log x}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{0^+}{2+0} = 0^+$$

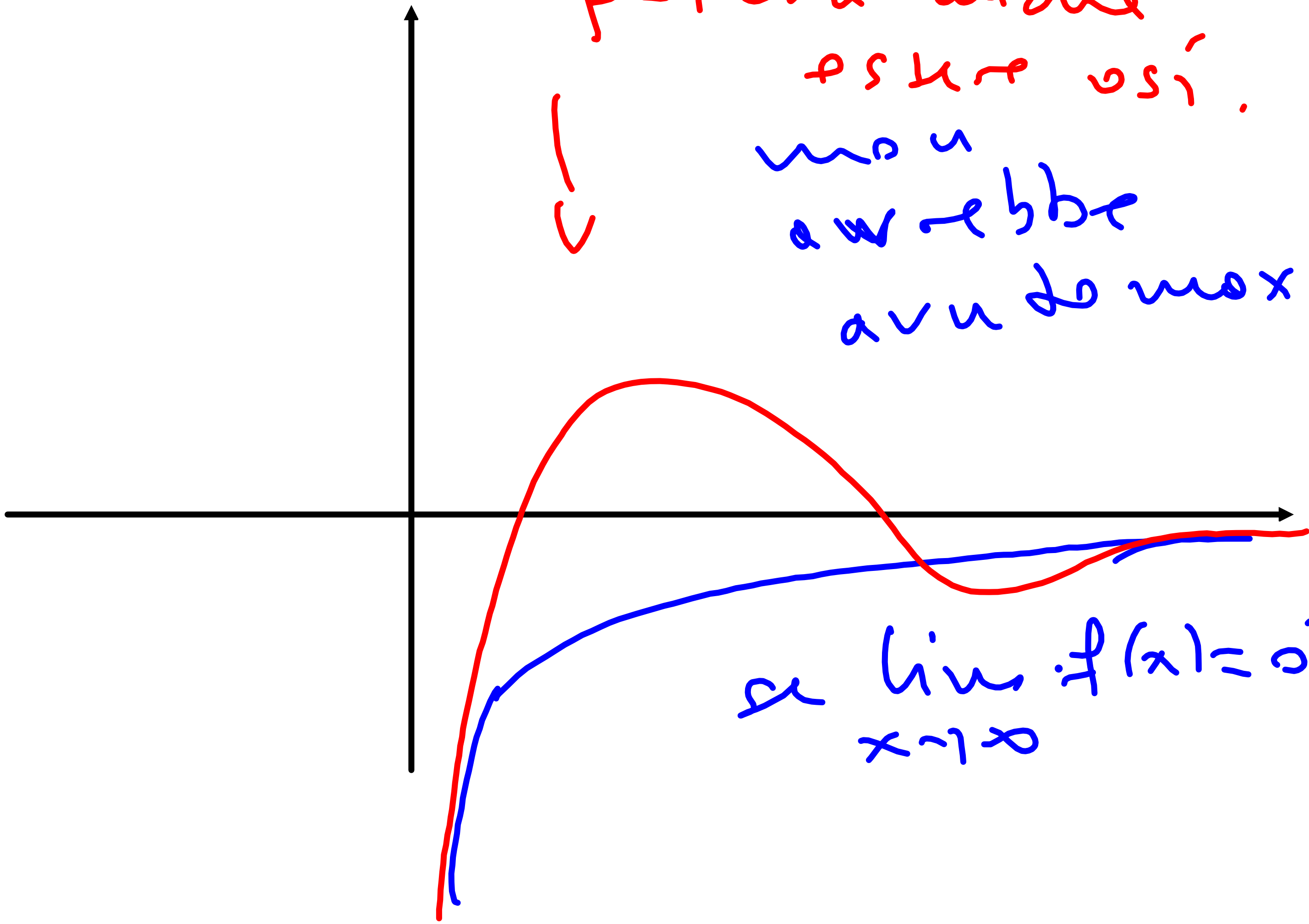
ott 16-10:37



ott 16-10:41

poteva anche essere così.

non avrebbe avuto max



se $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0^-$

dal fatto che

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0^-$ non posso

ricavare direttamente che

f ha massimo.