Def: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Se esiste

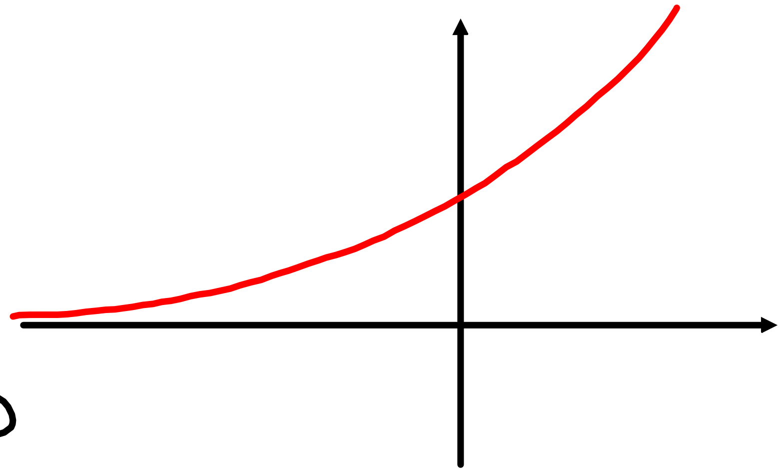
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ (finito)}$$

allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$.

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = e^x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$\Rightarrow$ f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (per $x \to -\infty$).

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

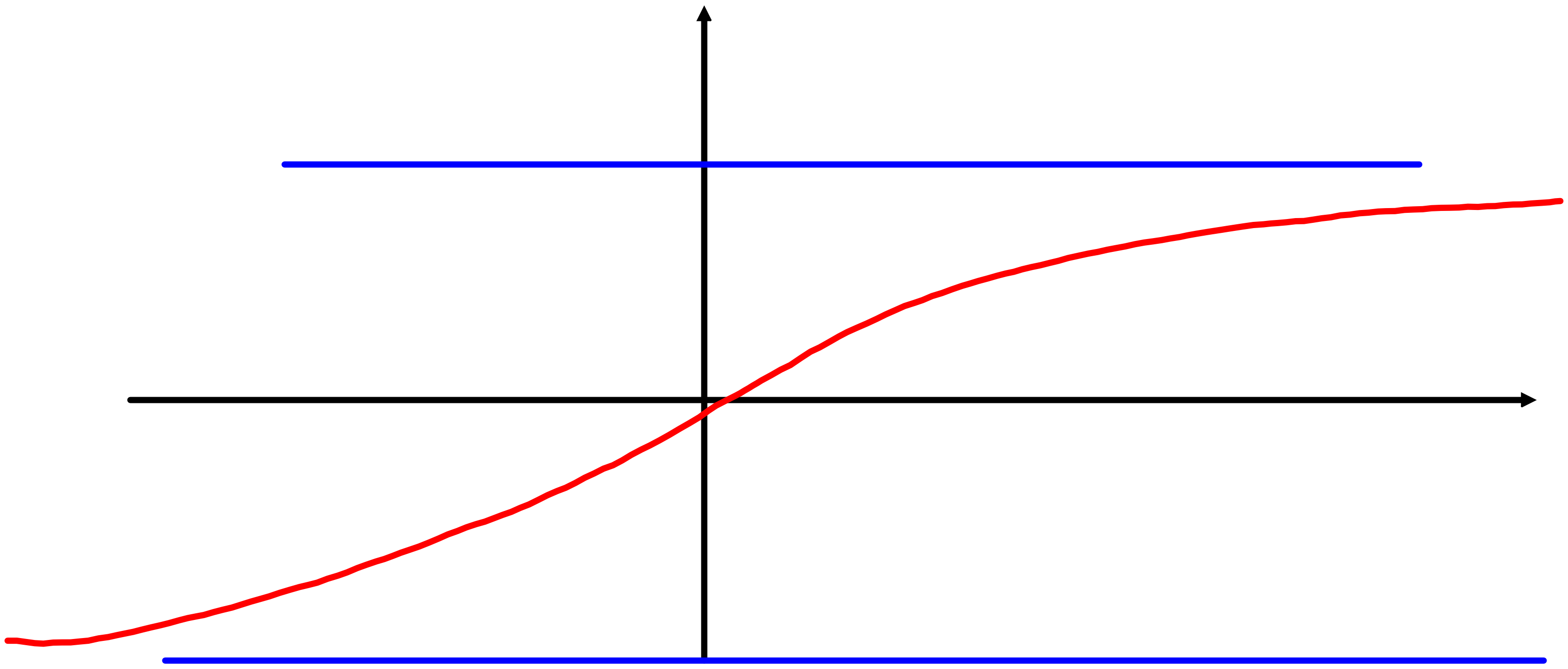
asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$

f è dispari

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

asintoto orizzont. $y = -\pi/2$

ott 14-09:19



ott 14-09:21

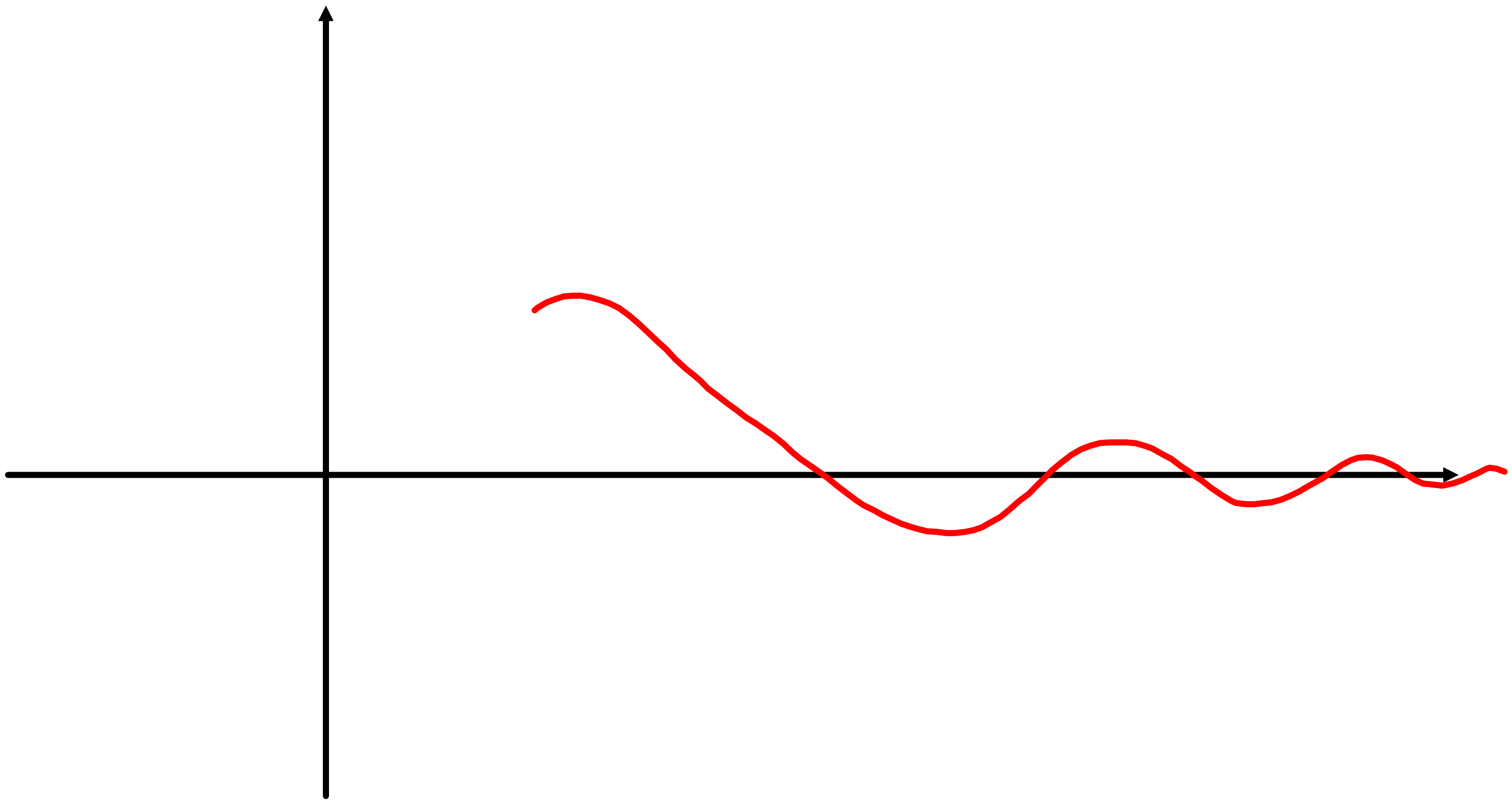
Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$$

$\Longrightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale.

ott 14-09:22



ott 14-09:23

Def: $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

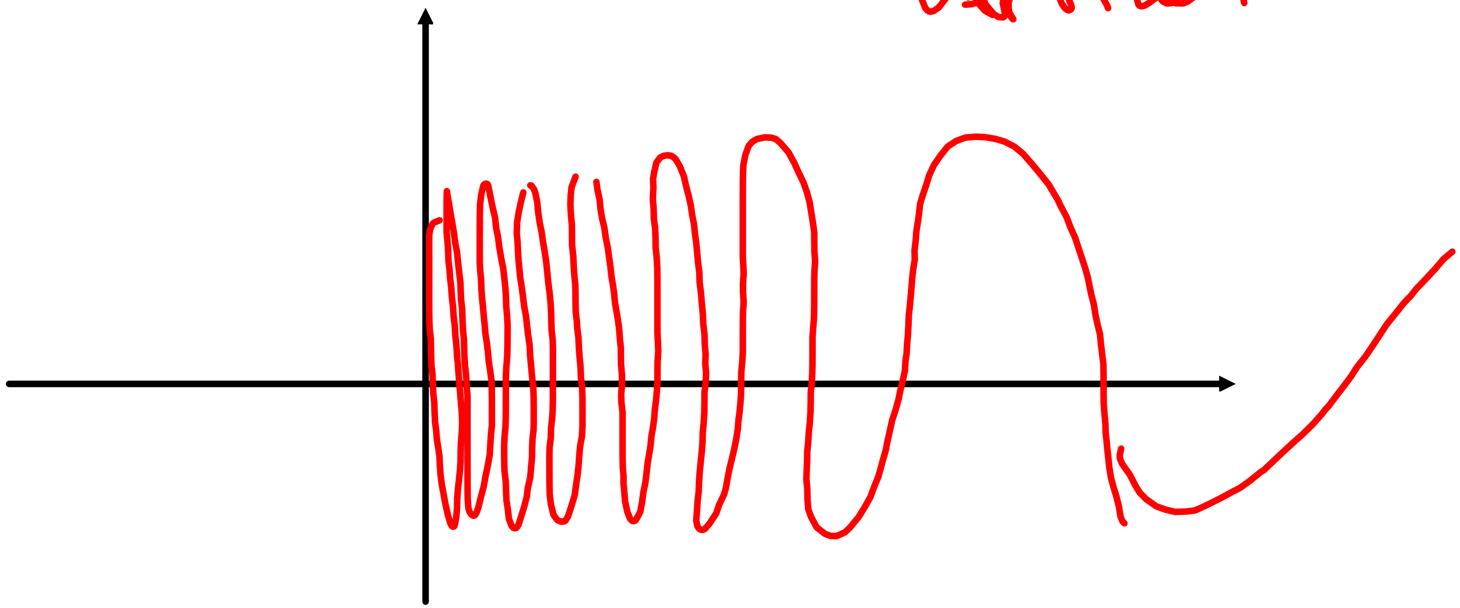
si dice che f ha un asintoto verticale di equazione

$$x = x_0 .$$

Lo stesso per $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

non ha asintoti verticali



Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = 0$ è asintoto verticale per f perché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

ott 14-09:32

Oss: una funzione ha al massimo 2 asintoti orizzontali ma può avere anche ∞ asintoti verticali.

Es: $f(x) = tg\, x$

ott 14-09:34

Def: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$$

e $m \neq 0$ e se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$$

allora si dice che f

ott 14-09:35

ha un asintoto obliquo
di equazione

$$y = mx + q \,.$$

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x-5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x}$$

$$= 2 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

ott 14-09:39

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

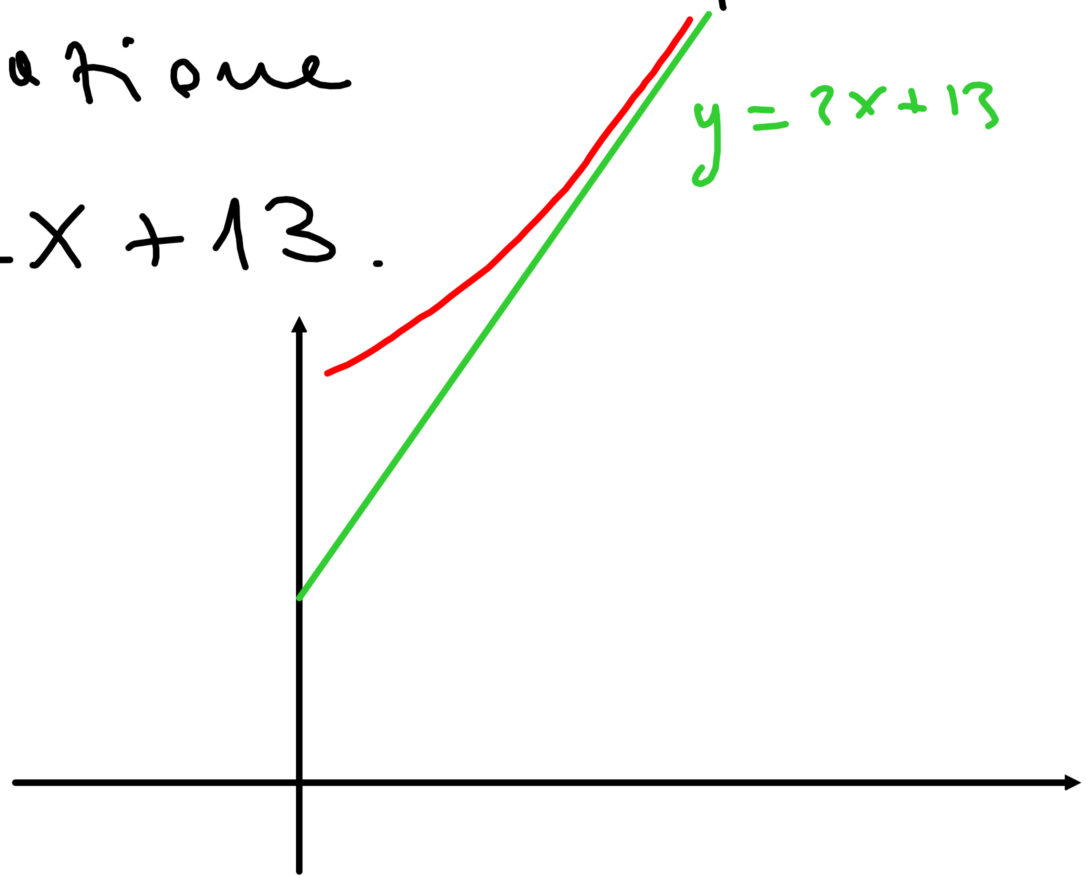
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x+2-\cancel{2x^2}+10x}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13 = 9$$

f ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = 2X + 13.$$



ott 14-09:44

Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$).

Se f ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ allora non ha un asintoto obliquo a $+\infty$. Lo stesso a $-\infty$.

Oss: Se f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ allora

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

se $m > 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f = +\infty$

se $m < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f = -\infty$.

Es: $f(x) = 3x + 5\log x$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-\infty)$$

$$= -\infty .$$

asintoto verticale

$x = 0$.

ott 14-09:52

$$\lim_{x \to +\infty} 3x + 5\log x =$$

$$= 3(\infty) + 5\log(\infty) =$$

$$= \infty + 5 \cdot \infty = \infty$$

non c'è asintoto orizzontale

forse c'è quello obliquo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5\log x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(3+5\frac{\log x}{x}\right) =$$

$$= 3+5\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\lg x}{x}\right) = 3+5\cdot 0 = 3$$

lo vediamo dopo.

$m = 3$

cerco di trovare q.

ott 14-09:58

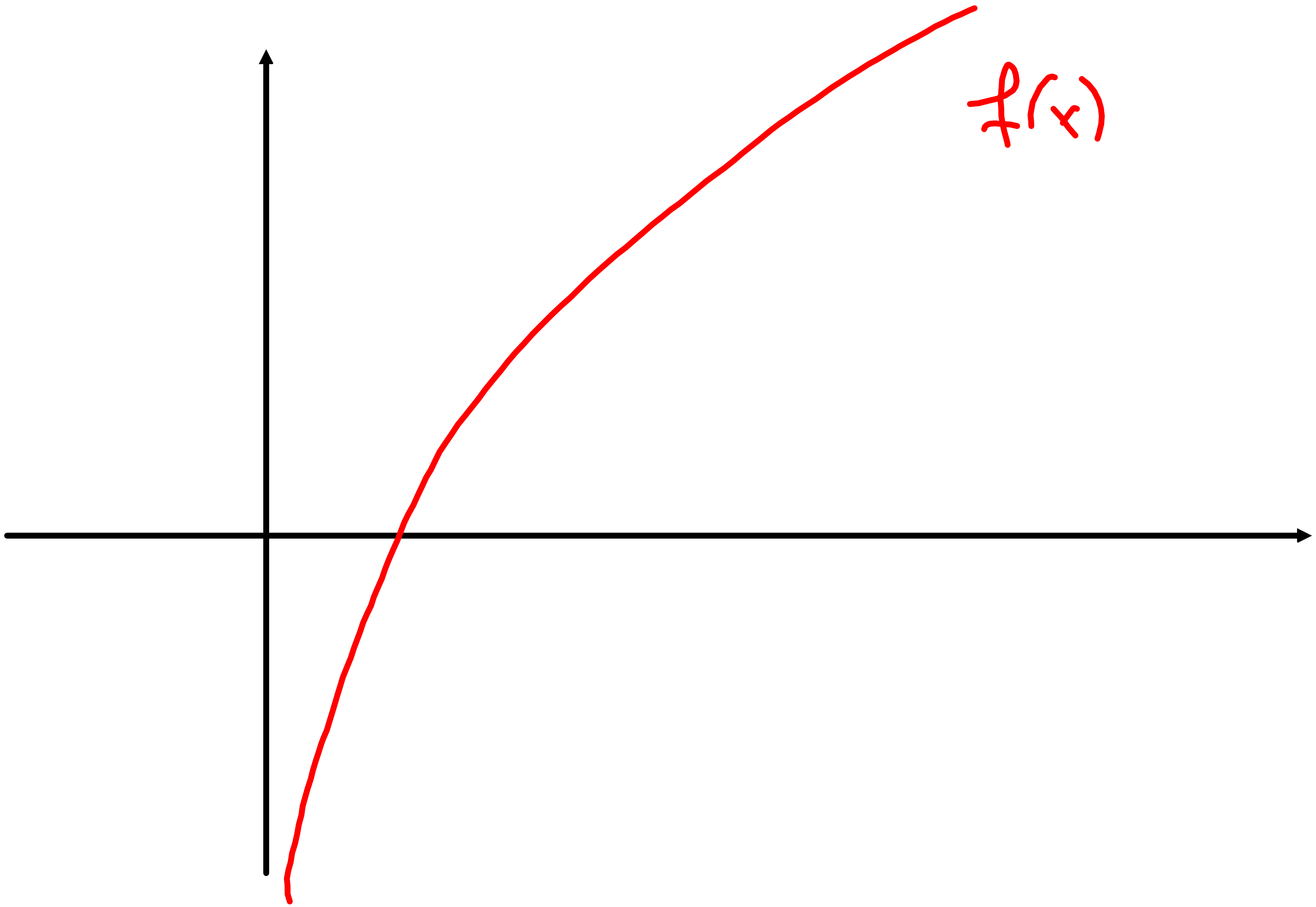
$$\lim_{x\to\infty} f(x)-mx =$$

$$=\lim_{x\to\infty} \cancel{3x}+5\log x-\cancel{3x}=\infty$$

$$\Rightarrow \nexists\ q\in\mathbb{R}.$$

non c'è l'asintoto obliquo.

ott 14-10:00



ott 14-10:02

Es: $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = (*)$

cambio di variabile

$$y = \log x \iff x = e^{y}$$

se $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$$(*) = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y}} = 0$$

ott 14-10:05

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \circledast$

sostituisco $\sqrt{x} = y \iff x = y^2$

se $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$= \circledast = \lim_{y \to \infty} \frac{\log(y^2)}{y} =$

$= \lim_{y \to \infty} \frac{2 \log y}{y} = 2 \lim_{y \to \infty} \frac{\log y}{y} = 0$

ott 14-10:09

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$

$\forall \alpha > 0$.

perché cambio variabile

$y = x^\alpha \iff x = y^{1/\alpha}$

$\log(x) = \log(y^{1/\alpha}) =$

$= \frac{1}{\alpha} \log y$

ott 14-10:14

Es: $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = ?$ $\alpha > 0$

sostituisco $y = x^\alpha$

$\Longleftrightarrow x = y^{1/\alpha}$

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$

ott 14-10:17

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} y \log\left(y^{1/\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to 0^+} y \log y = 0$$

ott 14-10:20

Derivazione

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

$x_0 \in A$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

allora l si dice derivata

ott 14-10:22

di f in x_0. Se $l \in \mathbb{R}$ (quindi è finito) si dice che f è derivabile in x_0. La derivata si indica con

$$f'(x_0)\ ,\ Df(x_0)\ ,\ \frac{df}{dx}(x_0)$$

Oss: esistenza della derivata e derivabilità sono due cose diverse.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

provo a calcolare la derivata in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$x_0 = 0$
$f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

($x \geq 0$ perché $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$)

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$

La funzione ha derivata in $x_0 = 0$ che vale $+\infty$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$.

Oss: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim: per dimostrare che

f è continua in x_0 basta

verificare

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

quindi che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

finito perché f è derivabile in x_0.

$\square$

ott 14-10:37

Def: Se esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

questo si dice derivata destra in x_0. e si indica con $f'_+(x_0)$

Analogamente $f'_-(x_0)$

è la derivata sinistra.

Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se $\exists\, f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e sono finite e uguali tra loro.

Es: $f(x) = |x|$.

$x_0 = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ott 14-10:41

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$\Rightarrow$ f non è derivabile in $x_0 = 0$.

ott 14-10:43

Oss.: quindi, in generale non è vero che una funzione continua è derivabile.