$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0^{+} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0^+ & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$a, \alpha \in \mathbb{R}$

$a > 0$

$a = 1$?

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

ott 12-11:16

Es: $a = \frac{1}{2}$ $\alpha = -3$

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^{-3}} = \frac{x^3}{2^x} \to 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} =$$

$$\log\left[(1+x)^{1/x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e \qquad y = \frac{1}{x}\log(1+x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$$

$$x \to 0^+ \Longrightarrow y \to 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} = \lim_{y \to 1} e^{y} = e^{1} = e$$

ott 12-11:25

Es: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$

$\frac{1}{x} = y \implies x = \frac{1}{y}$

$x \to \infty \implies y \to 0^+$

$= \lim_{y \to 0^+} (1+y)^{1/y} = e$

ott 12-11:27

Nuovi casi di indeterminazione

$f(x) > 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

quando può dare indeterm.?

ott 12-11:30

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left[f(x)^{g(x)}\right]}$$

$$= e^{g(x)\log(f(x))}$$

quando $g(x)\cdot\log(f(x))$

è indeterminato?

ott 12-11:32

1) $g \to 0 \qquad \log(f) \to +\infty$

$\Downarrow$

$f \to +\infty$

$f^{g} = (+\infty)^{0}$

2) $g \to 0 \qquad \log(f) \to -\infty$

$\Downarrow$

$f \to 0^{+}$

$f^{g} = (0^{+})^{0}$

ott 12-11:34

3) $g \to \pm\infty \quad \log f \to 0$

$$\Downarrow$$

$$f \to 1$$

$$f^{g} = (1)^{\pm\infty}$$

Es:
$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0^+ \cdot (-\infty)$$
?

$$y = \log x \iff x = e^y$$

se $x \to 0^+ \Rightarrow y \to -\infty$

$$\lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y = 0^+ (-\infty)$$

ott 12-11:37

$$y = -z$$

$$y \to -\infty \Rightarrow z \to \infty$$

$$\lim_{y \to -\infty} e^{y} \cdot y = \lim_{z \to \infty} e^{-z}(-z) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} - \frac{z}{e^{z}} = -(0^{+}) = 0^{-}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\log x = 0^-$$

$$\forall \alpha > 0$$

se $\alpha > 1$ è semplice

$$x^{\alpha}\log x =$$

$$= \underbrace{x^{\alpha-1}}_{\downarrow \atop 0^+} \underbrace{(x\log x)}_{\downarrow \atop 0^-} \to 0^-$$

ott 12-11:46

Es: $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x}$

$x \log x \to 0^-$ $=$

$= e^0 = 1$

ott 12-11:48

Prop: Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è debolmente crescente allora

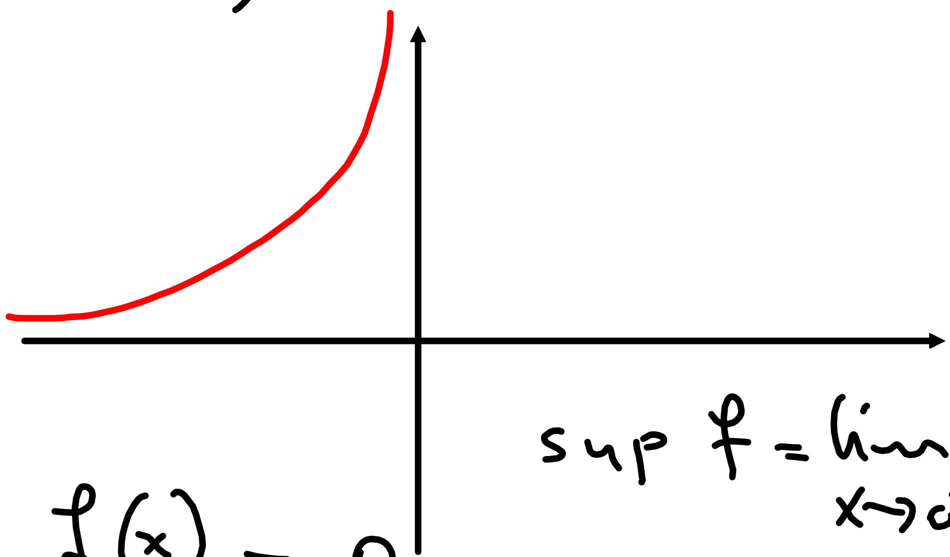
$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

ott 12-11:51

Es: $f(x) = -\frac{1}{x}$

$f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$



$\sup f = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\inf_{(-\infty,0)} f = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

ott 12-11:54

Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

se e solo se

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

dim: $f \to 0 \Rightarrow |f| \to 0$

uso la continuità del valore assoluto

ott 12-11:58

cambio variabile

$y = f(x) \qquad x \to x_0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{y \to 0} |y| = 0$$

viceversa vediamo che

$$|f| \to 0 \Rightarrow f \to 0$$

segue da $-|f| \le f \le |f|$

Carabinieri $\quad -0 \qquad 0 \qquad 0$

$\square$

ott 12-12:00

Es: Sia

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} > e^{2x^2+x+1} \right\}$$

dire se A è inferiormente o superiormente limitato.

$$\frac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} = e^{3x^3+3-2x}$$

ott 12-12:03

$$e^{3x^3-2x+3} > e^{2x^2+x+1}$$

l'esponenziale è crescente

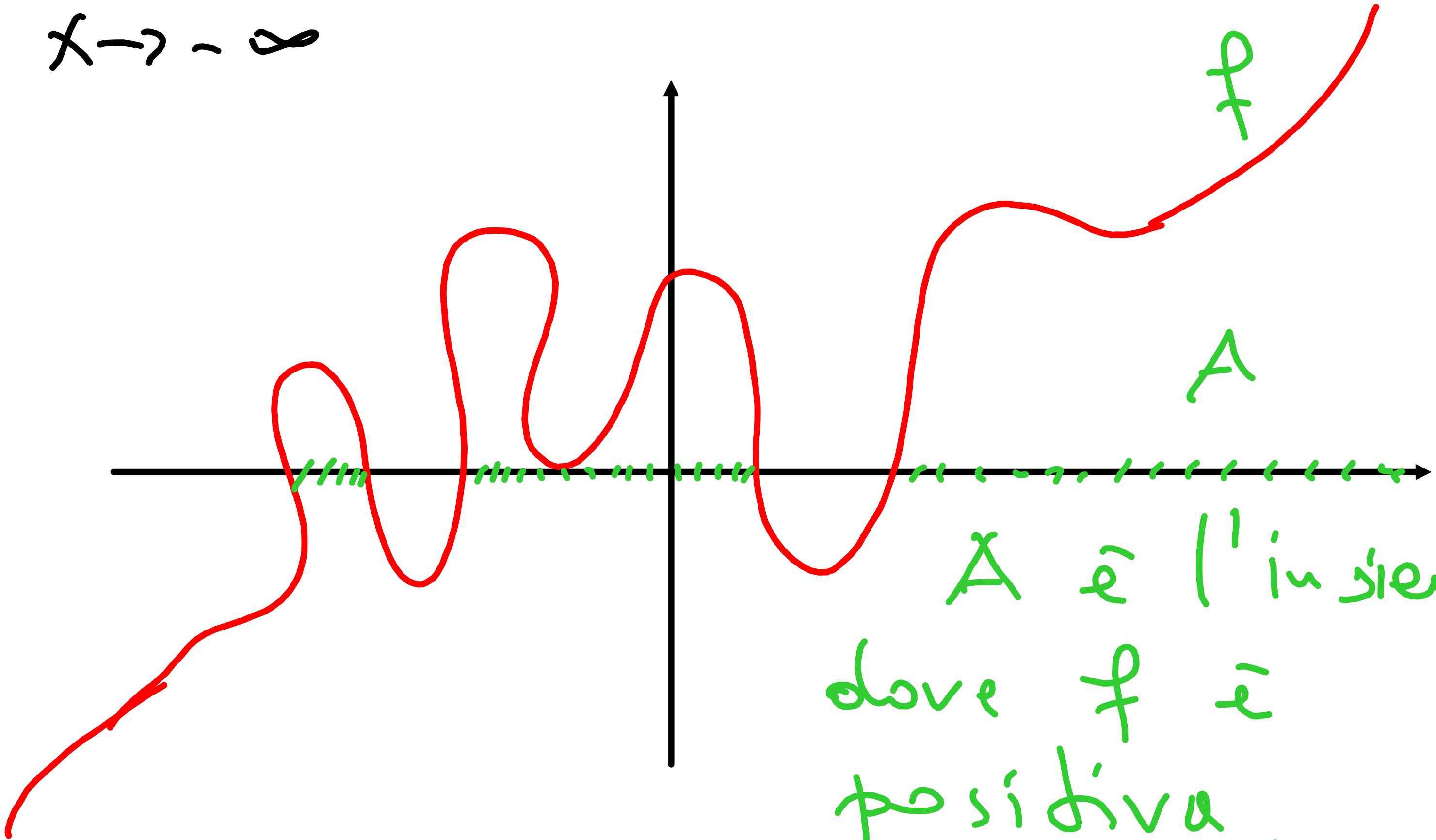
$$\Rightarrow 3x^3-2x+3 > 2x^2+x+1$$

$$3x^3-2x^2-3x+2 > 0 \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3-2x^2-3x+2 = +\infty$$

ott 12-12:05

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = -\infty$$



A è l'insieme dove f è positiva.

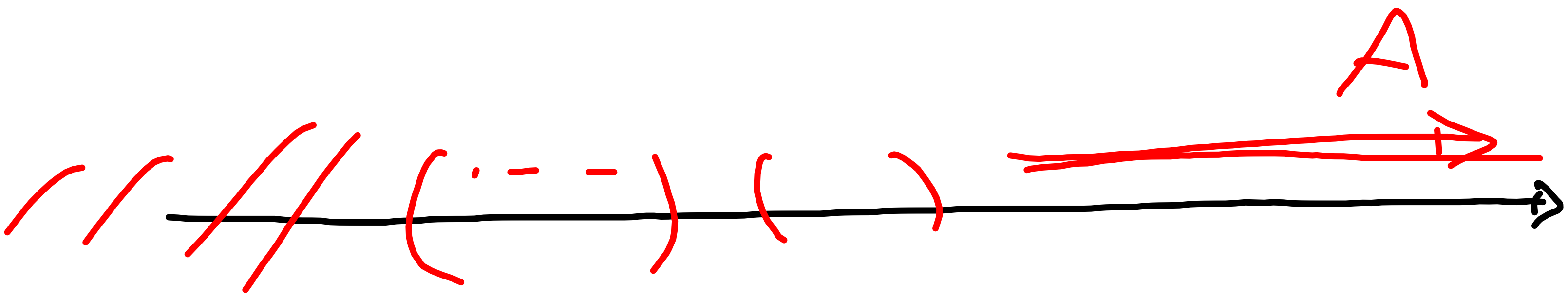
ott 12-12:08

se x è abbastanza grande $f(x) > 0$ e x è abbastanza piccolo $f(x) < 0$

(permanenza del segno).

ott 12-12:10

quindi se x è abbastanza grande $(*)$ vale
$\Rightarrow x \in A$ se x è abbastanza piccolo $\Rightarrow$ $(*)$ non vale
e $x \notin A$.



ott 12-12:12

quindi A è inferiormente limitato ma non superiorm. limitato.

Infinitesimi.

$f, g : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$

f e g infinitesime per $x \to x_0$ cioè

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Def: Si dice che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e si scrive $f(x) = o(g(x))$

Es: $f(x) = x^3$

$g(x) = x^2$ $\quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$\Rightarrow \quad x^3 = o(x^2)$

ott 12-12:22

Se non è specificato diversamente si intende $x \to 0$.

Def: Si dice che f è infinitesima di ordine superiore ad $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

ott 12-12:24

se $f = o(|x|^\alpha)$

per $x \to 0$.

cioè $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0$

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$

$f(x) = o(|x|)$ perché?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{|x|} = \text{limitato}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{\to 0} \cdot \frac{\sin x}{|x|} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{|x|}$ è limitata vicino a $\emptyset$.

Attenzione.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = o(|x|) \\ x^4 = o(|x|) \end{array}\right\} \not\Rightarrow \quad x^3 = x^4$$

Proprietà degli o-piccoli

1) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\Rightarrow k\, o(|x|^\alpha) = o(|x|^\alpha)$

2) $o(|x|^\alpha) + o(|x|^\alpha) = o(|x|^\alpha)$

3) Se $\beta > 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} = o(|x|^\alpha)$

ott 12-12:34

4) $o(|x|^{\alpha}) + o(|x|^{\alpha+\beta}) = o(|x|^{\alpha})$

5) $o(o(|x|^{\alpha})) = o(|x|^{\alpha})$

6) $o(|x|^{\alpha} + o(|x|^{\alpha})) = o(|x|^{\alpha})$

7) $o(|x|^{\alpha} + |x|^{\alpha+\beta}) = o(|x|^{\alpha})$

8) $|x|^{\alpha} \cdot o(|x|^{\beta}) = o(|x|^{\alpha+\beta})$

9) $o(|x|^{\alpha}) \cdot o(|x|^{\beta}) = o(|x|^{\alpha+\beta})$

10) $$\frac{o(|x|^{\alpha+\beta})}{|x|^{\beta}} = o(|x|^{\alpha})$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\alpha, \beta > 0$.

ott 12-12:41

Es: vediamo che

$$|x|^{\alpha} \cdot o(|x|^{\beta}) = o(|x|^{\alpha+\beta})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^{\alpha} \cdot o(|x|^{\beta})}{|x|^{\alpha+\beta}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{|x|^{\alpha}} \cdot o(|x|^{\beta})}{\cancel{|x|^{\alpha}} \cdot |x|^{\beta}} = 0$$

per definizione di o

ott 12-12:44