Oss: Se f è limitata inferiormente e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$$

Es: $f(x) = \sin x$

$g(x) = x$

$\nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$

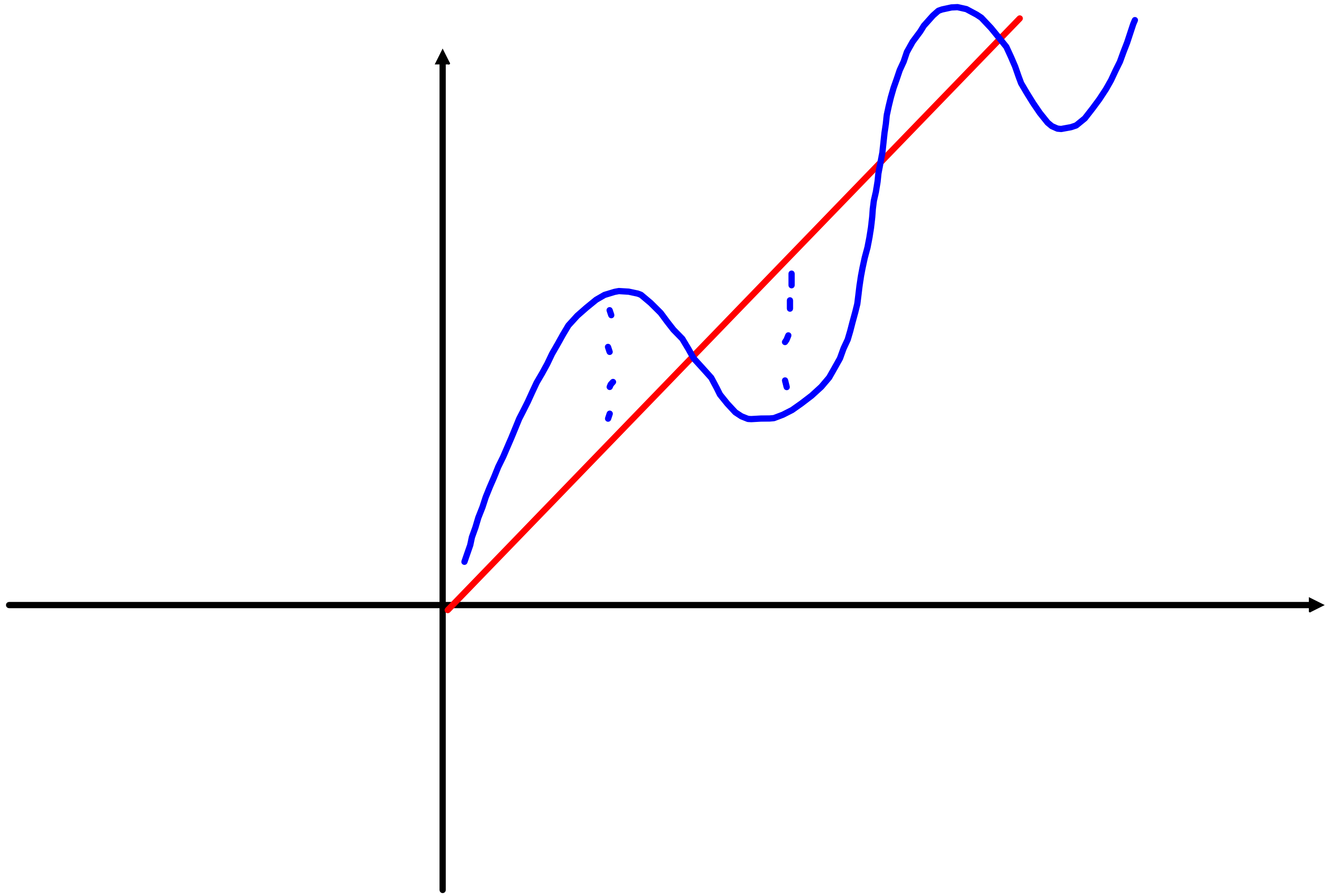
ma $\sin x \geq -1$ quindi

f è limitata inferiormente

$\lim_{x \to \infty} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} x + \sin x = +\infty$

ott 7-09:16



ott 7-09:18

Oss: Se f è limitata superiormente e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \text{ allora}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$$

ott 7-09:19

Oss: Se f è limitata

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

allora $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

$f(x) = \sin x \qquad |\sin x| \leq 1$

$\Rightarrow f$ è limitata

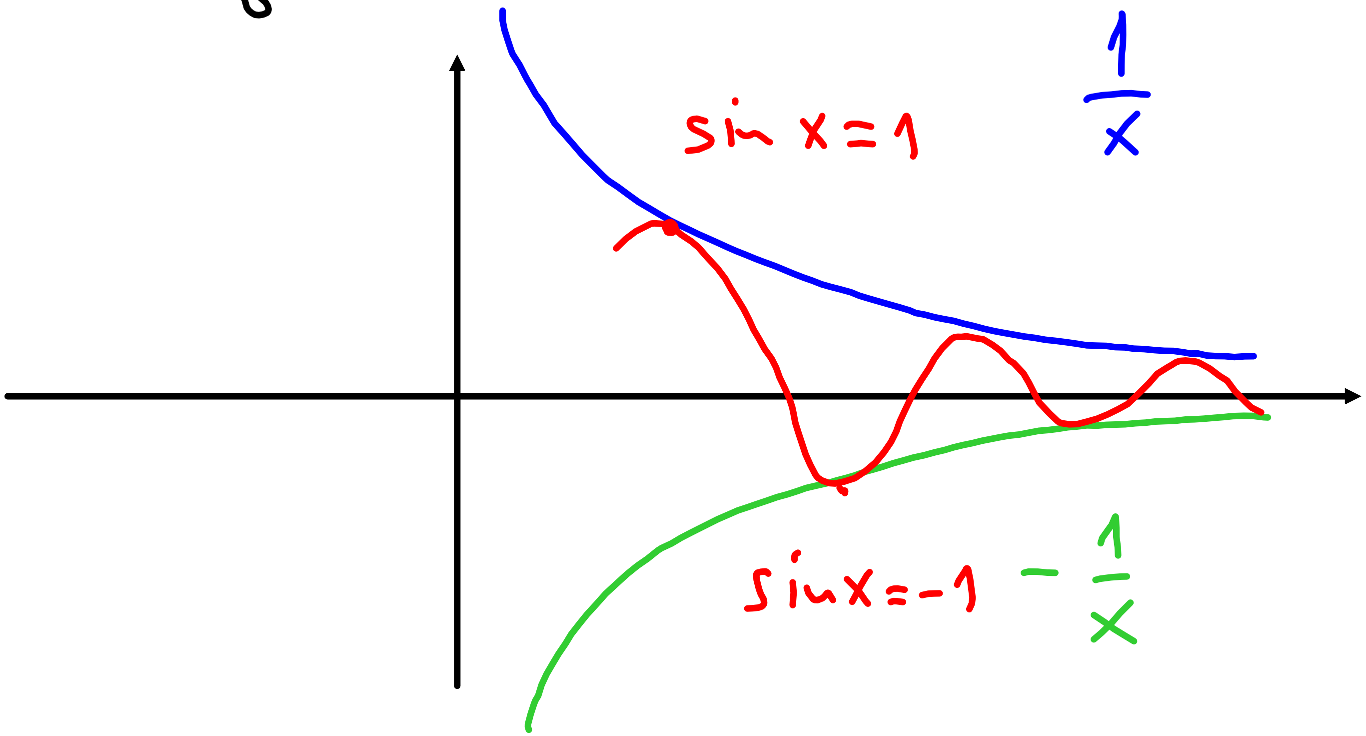
$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$



ott 7-09:23

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

f si dice infinitesima

per $x \to x_0$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si

dice che f diverge positivam.

per $x \to x_0$

dir. negat. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ott 7-09:26

Prop: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

ott 7-09:27

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$

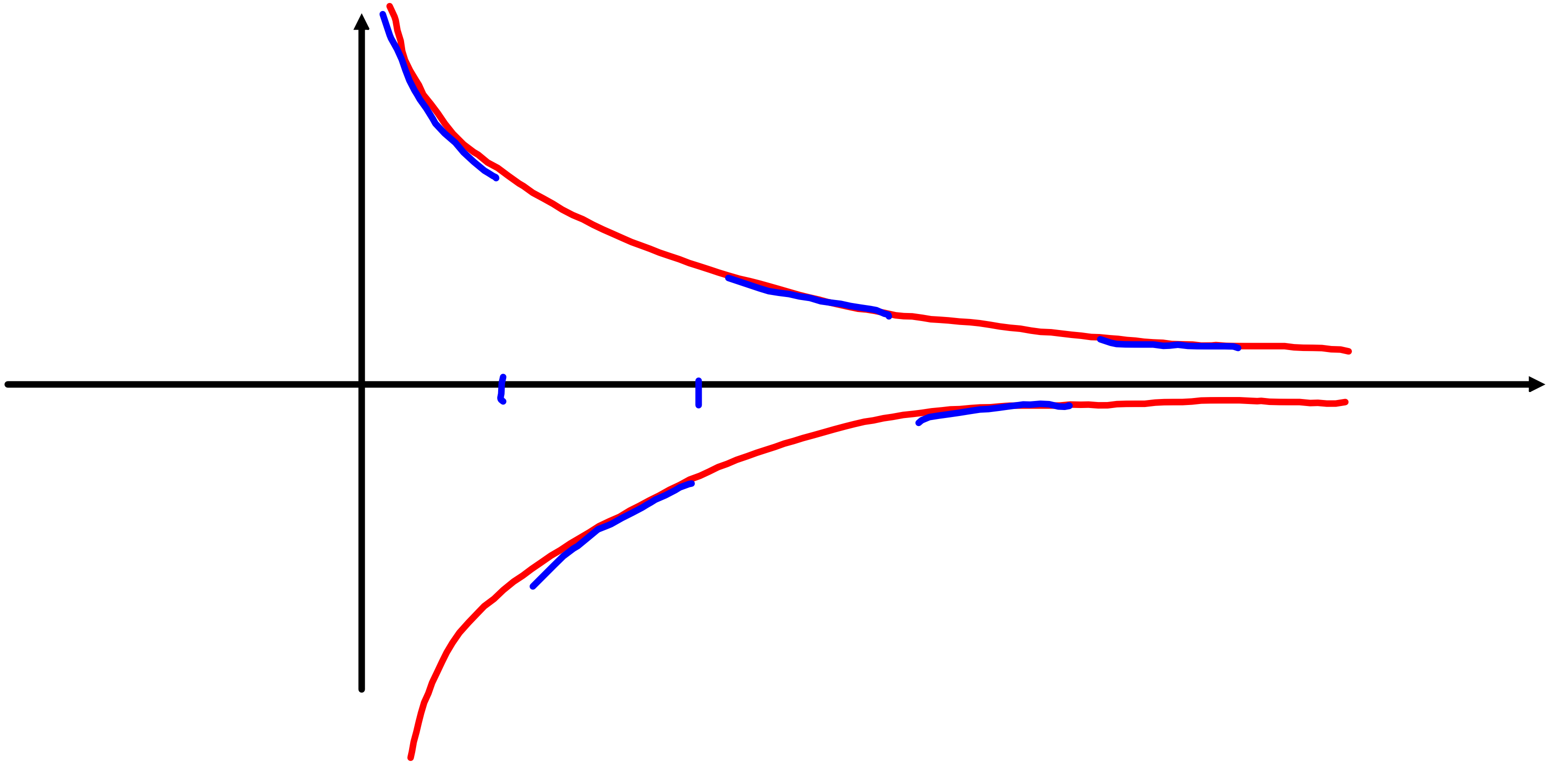
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \neq 0, \pm\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Es:

$$f(x) = (-1)^{[x]} \frac{1}{x}$$

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$



ott 7-09:32

$$f(x) = (-1)^{[x]} \qquad |f| \leq 1$$

f è limitata

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} (-1)^{[x]} \frac{1}{x} = 0$$

0 non è nè 0^+ nè 0^-.

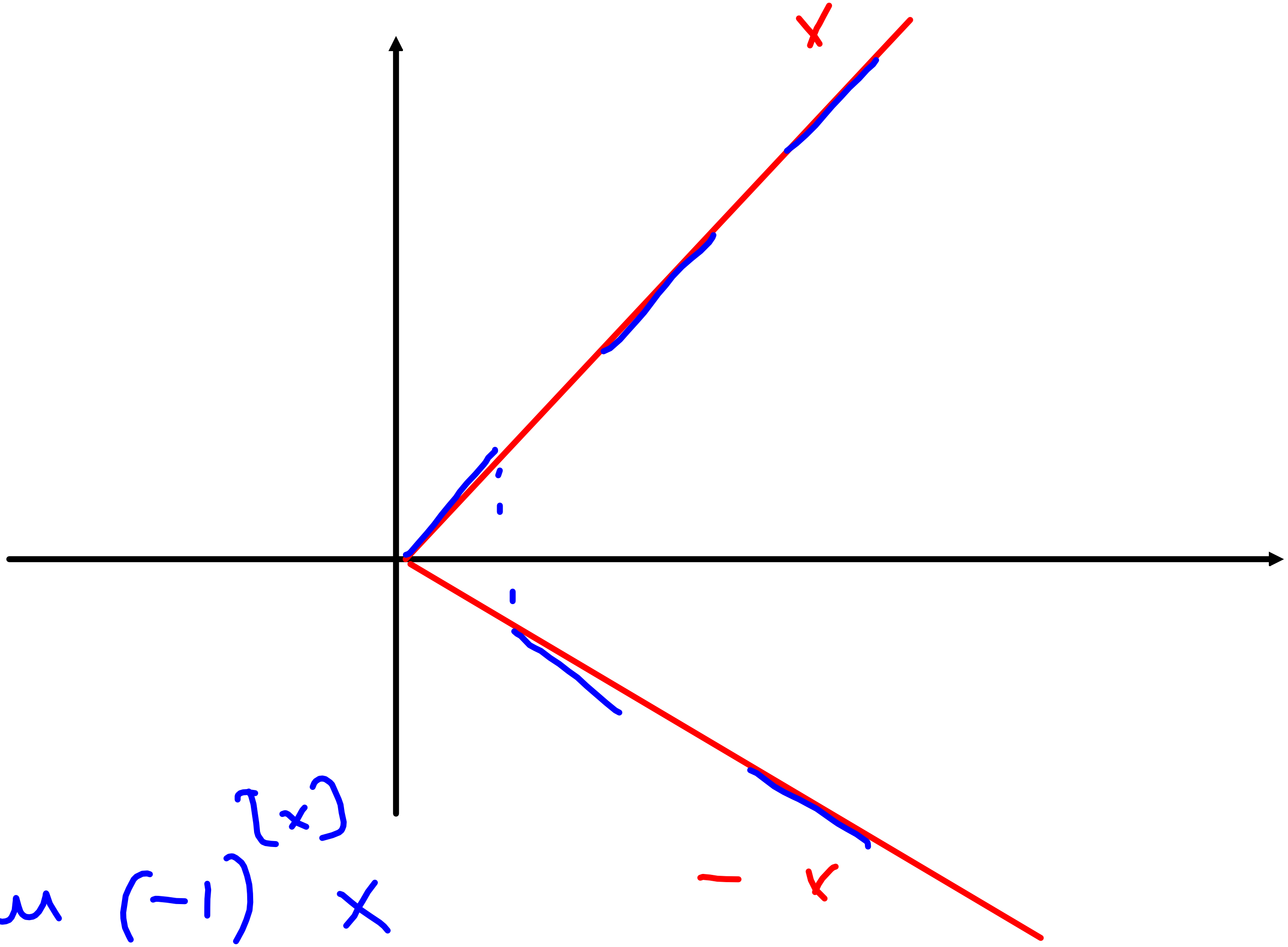
ott 7-09:36

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(-1)^{[x]} \cdot \frac{1}{x}} = ?$$

$$\frac{1}{(-1)^{[x]} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{x}{(-1)^{[x]}} = (-1)^{[x]} x$$

perché

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{-1} = -1$$



$$\nexists \lim_{x\to\infty} (-1)^{[x]} x$$

ott 7-09:40

Limiti fondamentali.

Polinomi.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomio di grado n $(a_n \neq 0)$.

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} 3x^2 - 5x = +\infty - \infty$$

$$3x^2 - 5x = x^2\left(3 - \frac{5}{x}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad 3 - 0$$

$$\infty\left(3 - \frac{5}{+\infty}\right) = \infty\left(3 - 0^+\right) = \infty \cdot 3$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \operatorname{sgn}(a_n)\,\infty$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= \underset{\downarrow \atop +\infty}{x^n} \underbrace{\left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a}{x^n}\right)}_{\to\, a_n + 0 + 0 + \dots + 0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_n)\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \operatorname{sgn}(a_n)(-\infty) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

ott 7-09:48

Es.

$$\lim_{x \to -\infty} -5x^3 + 7x^2 = +\infty$$

$$-5(-\infty) = +\infty$$

i polinomi si comportano a $\pm\infty$ come il loro monomio di grado più alto.

ott 7-09:51

Funzioni razionali

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{grado } n \\ \leftarrow \text{grado } m \end{matrix}$$

$$p(x) = a_n x^n + \dots$$

$$q(x) = b_m x^m + \dots$$

ott 7-09:53

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots} =$$

$$= \frac{x^n \left(a_n + \underbrace{a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \cdots}_{\to 0} \right)}{x^m \left(b_m + \underbrace{b_{m-1} \cdot \frac{1}{x} + \cdots}_{\to 0} \right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{a_n x^n}{b_m x^m}} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)(+\infty) & \text{se } n>m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n<m \end{cases}$$

0^+ se $\frac{a_n}{b_m} > 0$

0^- se $\frac{a_n}{b_m} < 0$

ott 7-09:57

Limite a $-\infty$

Es: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^5 + 5x^2}{-3x^3 + 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^5}{-3x^3} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{7}{3} x^2$$

$$= -\frac{7}{3}(+\infty) = -\infty .$$

Limiti fondamentali

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ott 7-10:02

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\downarrow \atop \frac{1}{1+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

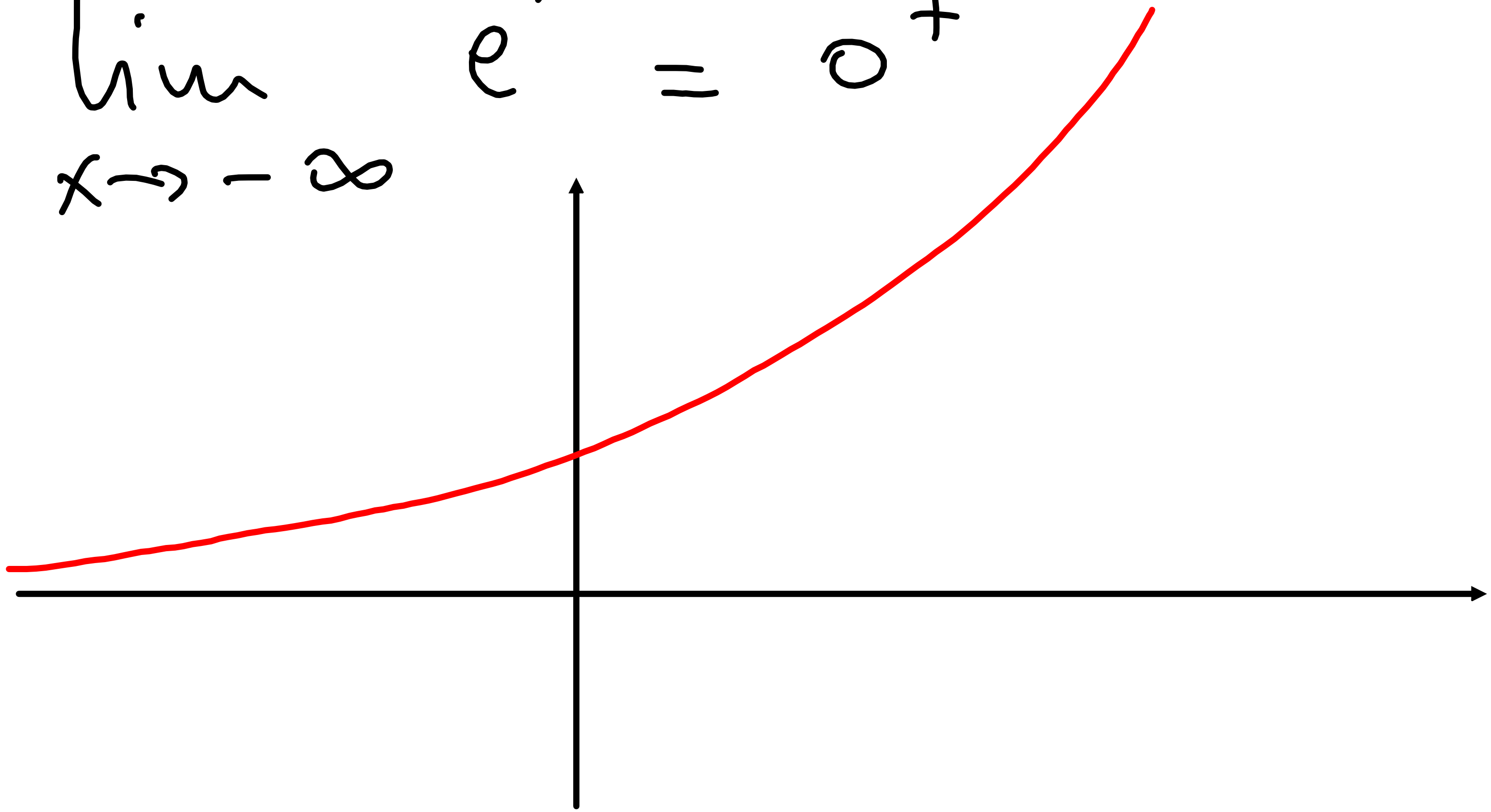
ott 7-10:05

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

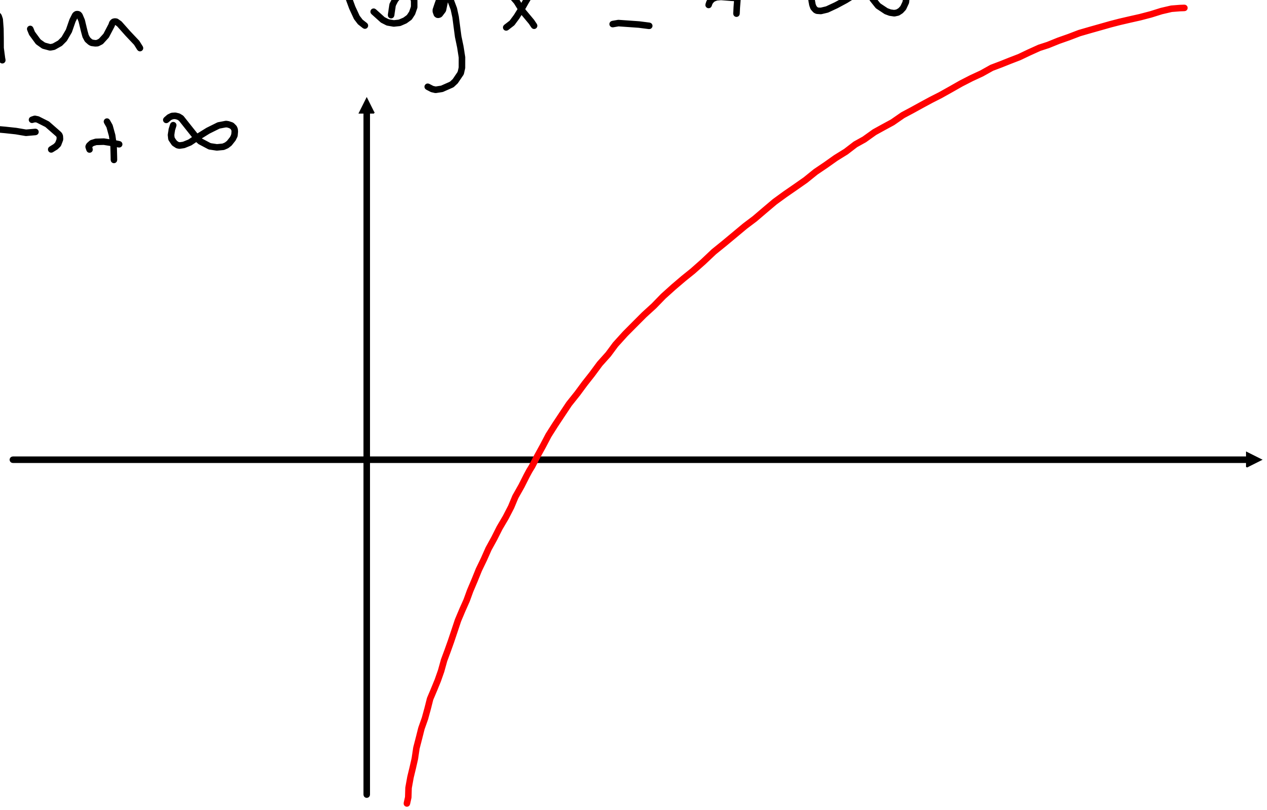
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$



ott 7-10:10

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$



ott 7-10:11

Es:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = \frac{-\infty}{0^+}$$

$$= -\infty \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

ott 7-10:12

Limite della composizione

$A, B \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$. Se esiste

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $y_0 \in Acc(B)$

allora

1) Se $y_0 \in B$ e g è continua in y_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$$

ott 7-10:15

2) Se $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$ e $\exists$

$U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $f(x) \neq y_0$

$\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l .$$

<u>Es</u>: $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x^2)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(y) = \operatorname{arctg} y$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) =$

$= \operatorname{arctg}(x^2)$

ott 7-10:18

$x_0 = -\infty$.

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

siamo nel caso 2) perché

$+\infty \notin B = \mathbb{R}$

$$\ell = \lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg}(y)$$

$$= \pi/2$$

ott 7-10:20

devo verificare che $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$

t.c. $x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \neq y_0$

ma $y_0 = +\infty$ quindi la condizione

vale per un qualsiasi U

(il caso 2) è sempre verificato

se $y_0 = \pm\infty$).

ott 7-10:22

$\Rightarrow$ per il teorema

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell \quad \text{cioè}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \frac{\pi}{2}$$

x_0 $\qquad$ ℓ

È un teorema di cambiamento di variabile nel limite.

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x^2)$$

pongo $y = x^2$ (cambio variabile)

la cambio da tutte le parti

ott 7-10:25

Se $x \to -\infty$ allora

$$y = x^2 \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{artg}(x^2) = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{artg}(y)$$

$$= \frac{\pi}{2} .$$

Perché il caso 2) è così complicato?

Es: $f(x) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(y) = \begin{cases} 5 & \text{se } y \neq 3 \\ 1 & \text{se } y = 3 \end{cases}$$

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ott 7-10:29

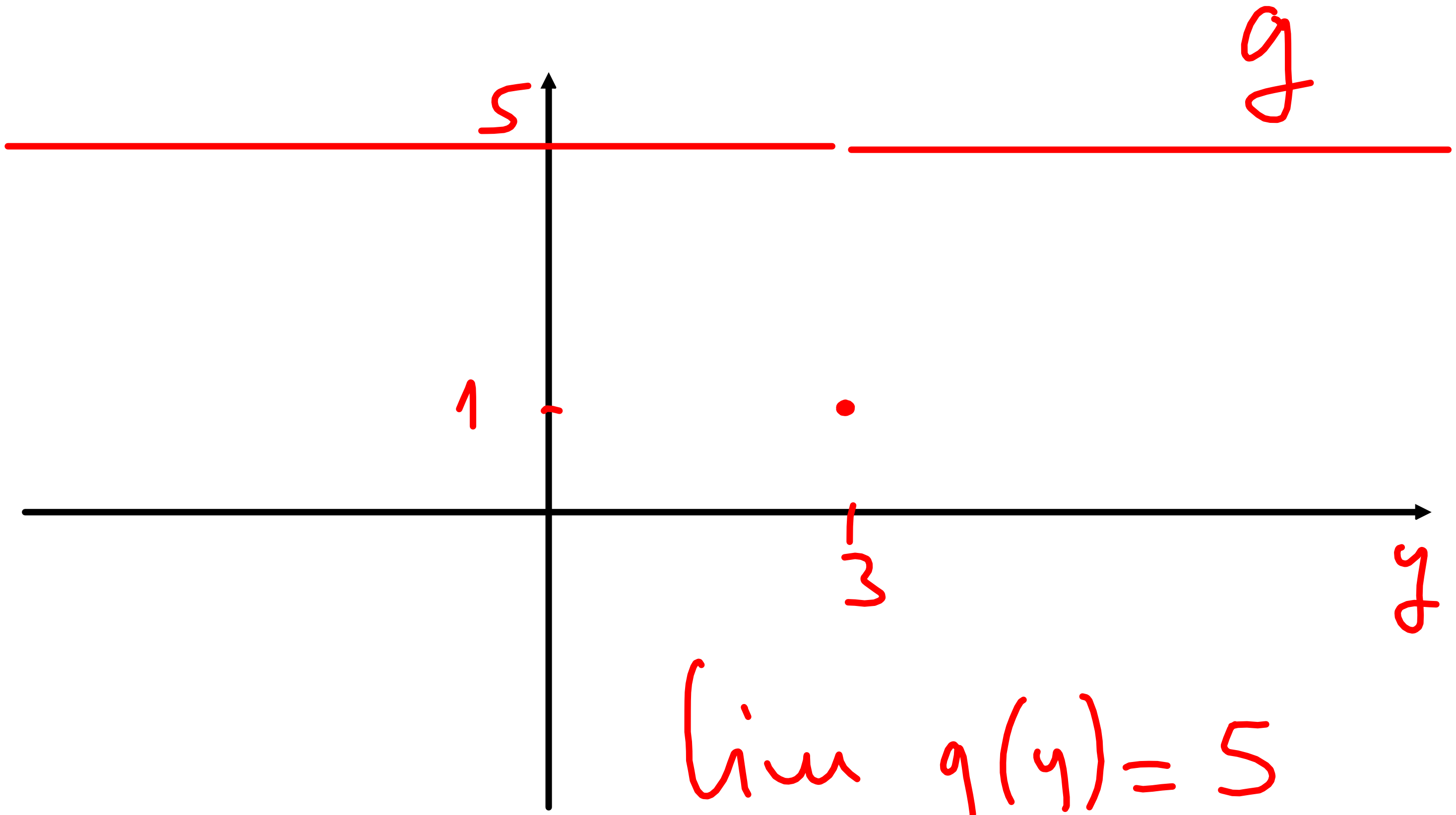
prendo $x_0 = 2$. Chi è y_0?

$$y_0 = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

quanto vale l?

$$l = \lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{y \to 3} g(y)$$

ott 7-10:30



$$\lim_{y \to 3} g(y) = 5$$

ott 7-10:32

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3) = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} (g \circ f)(x) = 1$$

ma $\ell = 5$.

ott 7-10:34

ma la condizione 2) non vale perché dovrei trovare

$\mathcal{V}$ intorno di $x_0 = 2$ t.c.

$$x \in \mathcal{V} \setminus \{2\} \Rightarrow f(x) \neq y_0 = 3$$

ma non è possibile perché

$$f(x) = 3 \quad \forall x.$$

Limiti fondamentali

$a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x$$

metto $y = -x$

$$= \lim_{y\to+\infty} a^{-y}$$

ott 7-10:39

$y = -x$ se $x \to +\infty$

$\Downarrow$ $\Rightarrow y \to -\infty$

$x = -y$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{y \to +\infty} a^{-y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{a^y} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

ott 7-10:42