Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ , \quad l \in \mathbb{R}$$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e

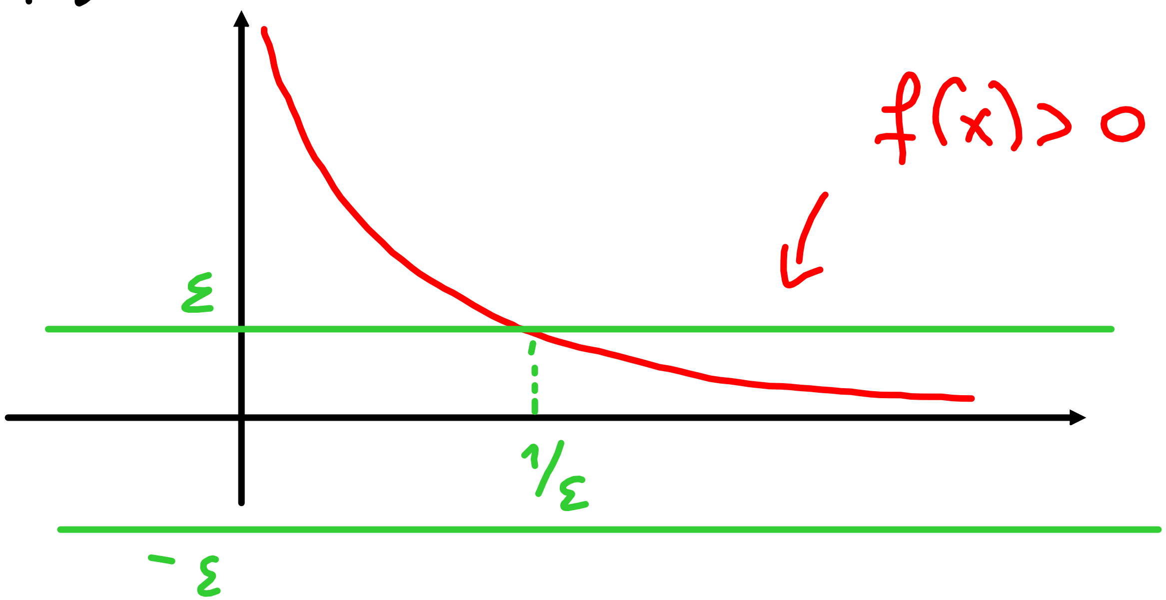
$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$\forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l$.

ott 6-16:00

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$



ott 6-16:16

Vediamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$l = 0 \quad x_0 = +\infty$

$V \in \mathcal{I}(0) \Rightarrow V = (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$

devo trovare $U \in \mathcal{I}(+\infty)$ t.c.

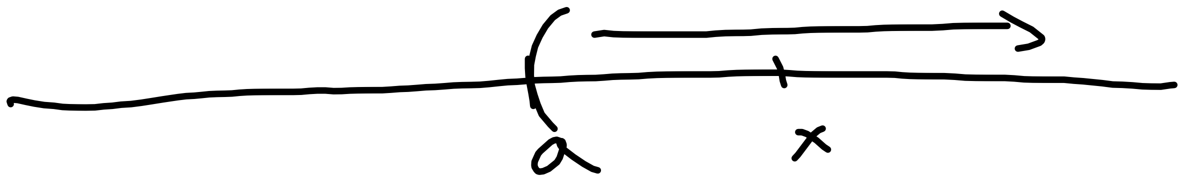
$x \in U \cap A \setminus \{+\infty\} \Rightarrow f(x) \in V$

$A =$ dominio di $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

U è della forma $(a, +\infty)$

ott 6-16:18

dire $x \in U$ è come dire $x > a$.



basta prendere $a = \frac{1}{\varepsilon}$. Infatti

se $x > a \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$

se poi $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x} \in V.$$

Teorema: Se il limite esiste è unico.

dim: supponiamo per assurdo che sia contemporaneamente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

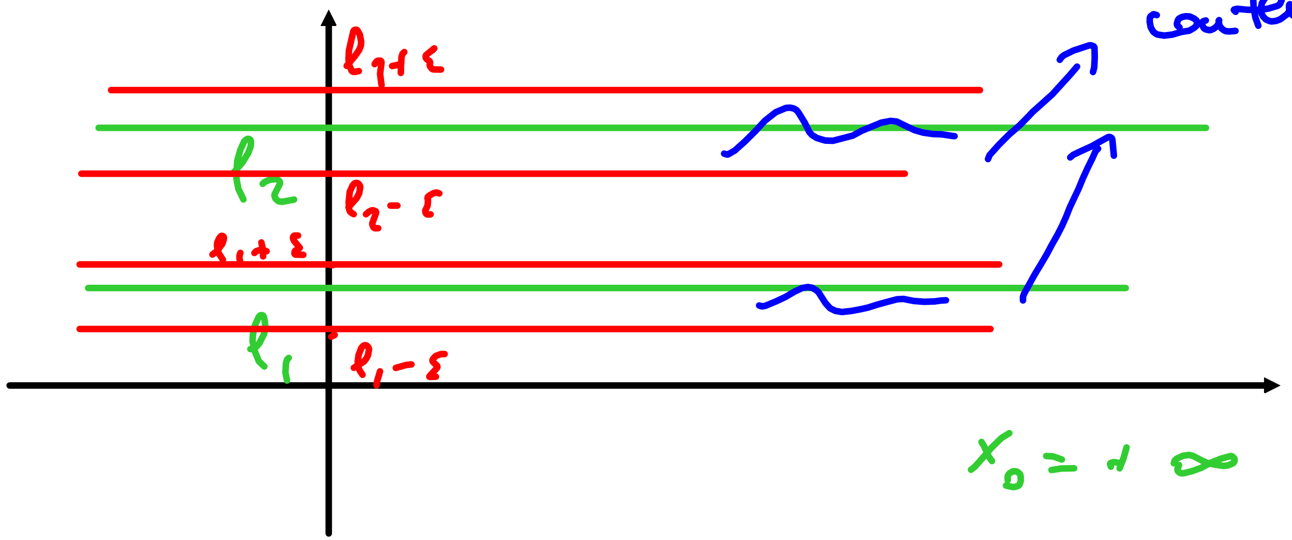
consideriamo il caso $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ (limite finito).

ott 6-16:23

Se $l_1 \neq l_2 \Rightarrow$ scelgo $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

$\Rightarrow$ non posso trovare l'intorno U di x_0 che verifica entrambe le definizioni di limite.

non possono valere contemp.



Teorema sulla permanenza del segno.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$ $\quad , x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$.

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

e $l \neq 0$ allora $\exists\ V \in \mathcal{I}(x_0)$

t.c. $x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di l.

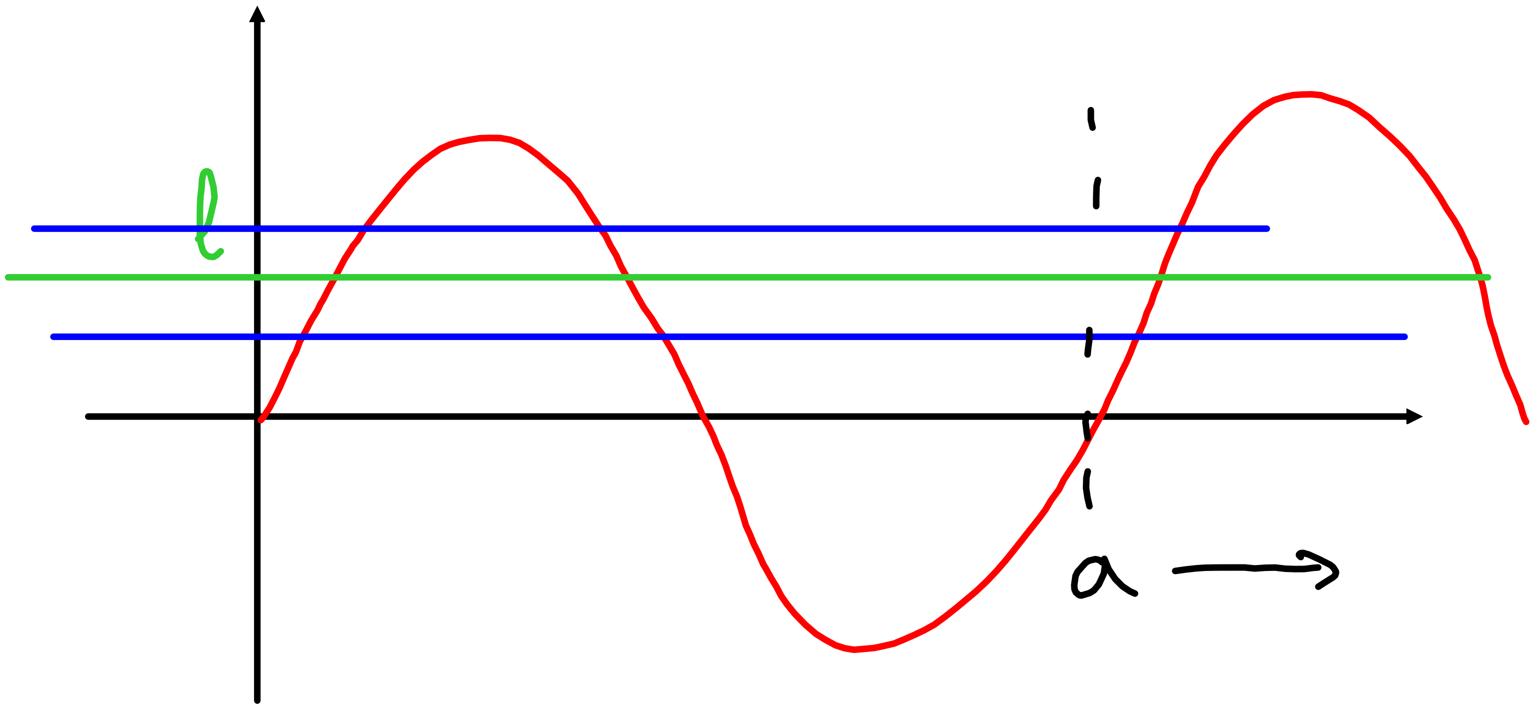
Es: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty > 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ in un intorno destro di 0.

Es: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$



Scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Se esistesse

$\lim_{x \to \infty} \sin x = l$ allora dovrebbe

esistere $a \in \mathbb{R}$ t.c.

$x > a \implies l - \frac{1}{2} < \sin x < l + \frac{1}{2}$

ma questo non è possibile

perché $\sin x$ assume ∞ volte

i valori 1 e -1

<u>Teorema</u>: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

se e solo se

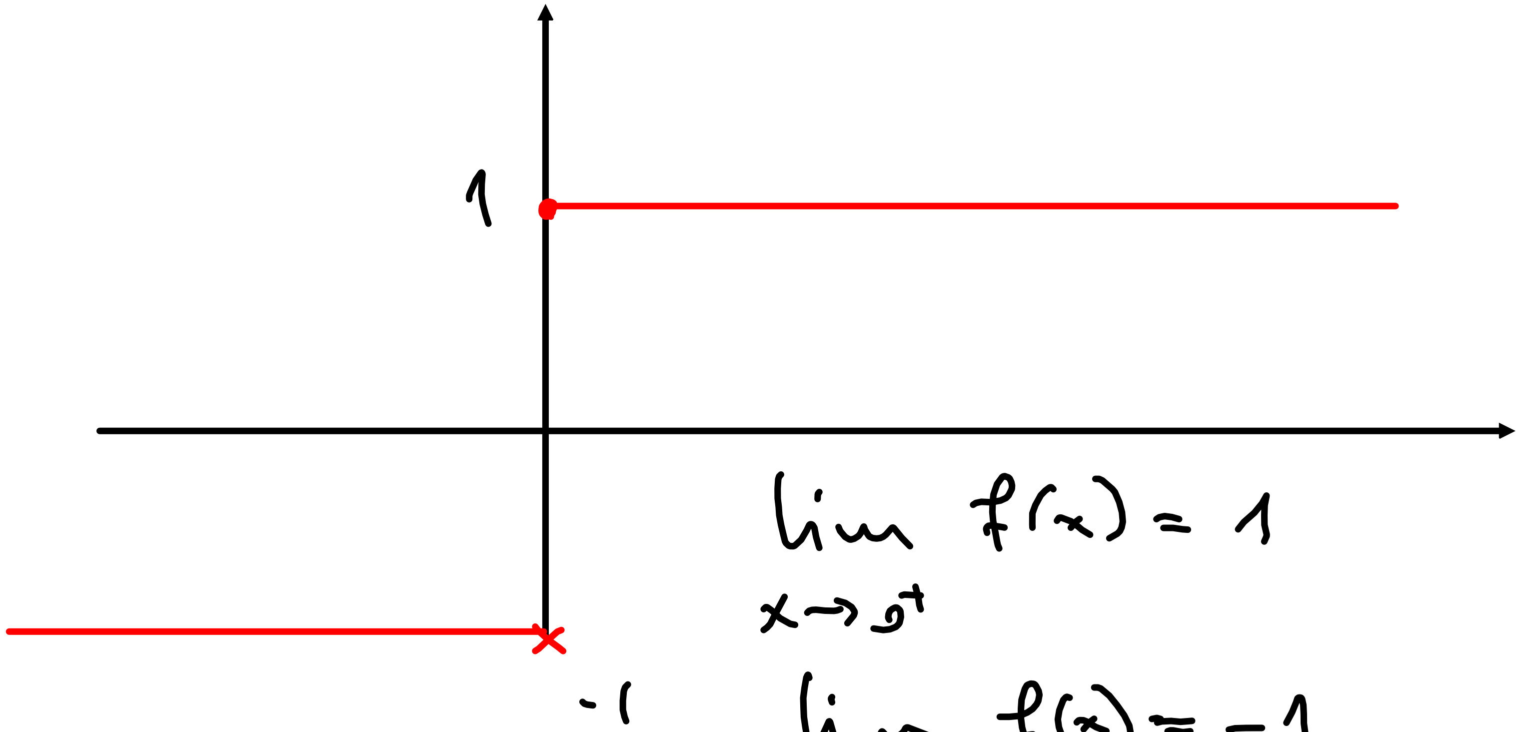
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ e

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

ott 6-16:39

Es:

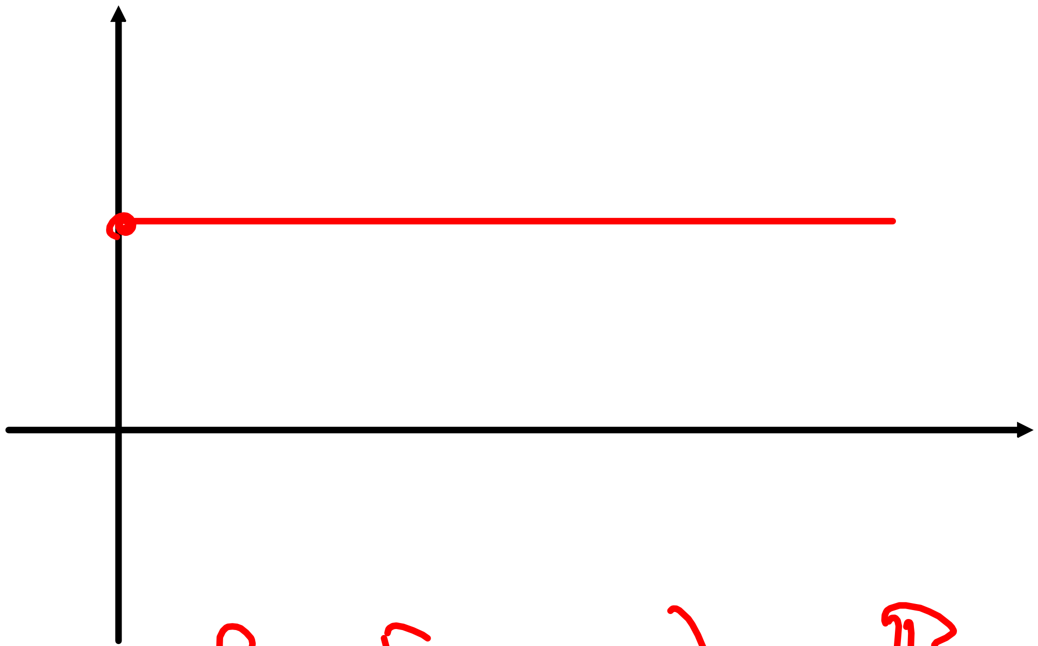
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

quindi $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

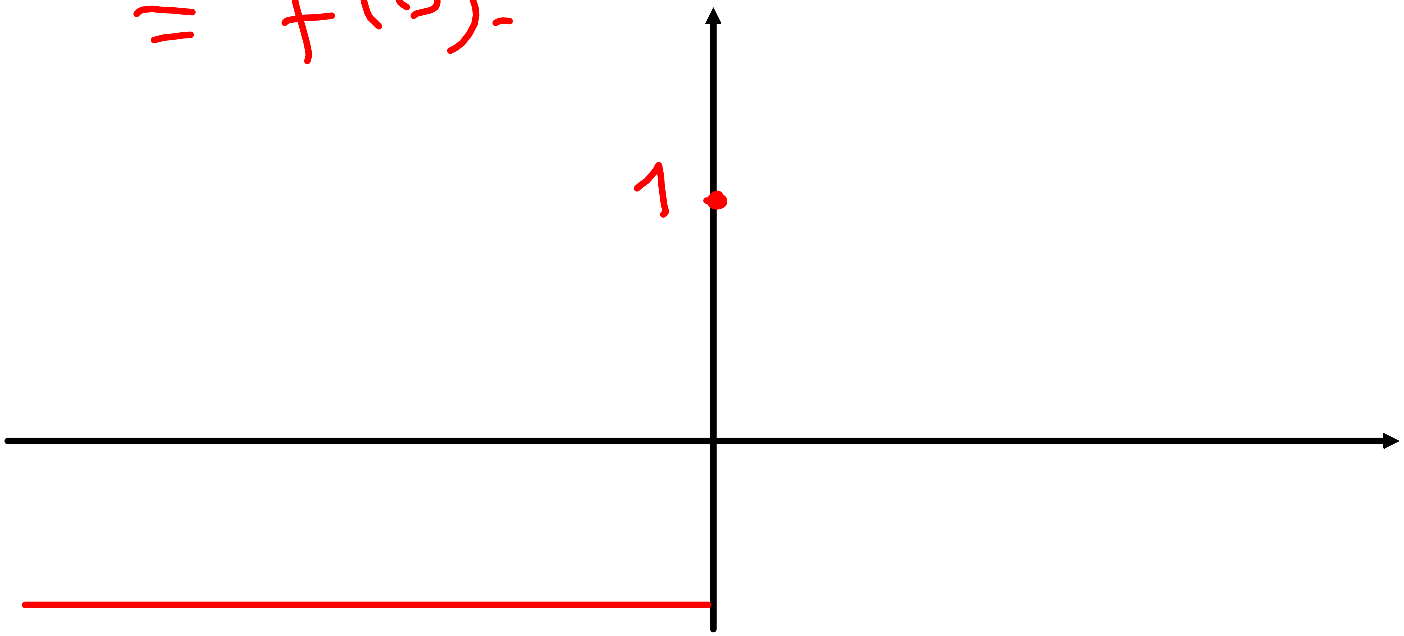


considero $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

f è continua in 0.

perché $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$= f(0)$.



Considero ora $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$

f non è continua in 0 perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq$$

$$\neq f(0) = 1.$$

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

si dice che f è continua a destra in x_0 se

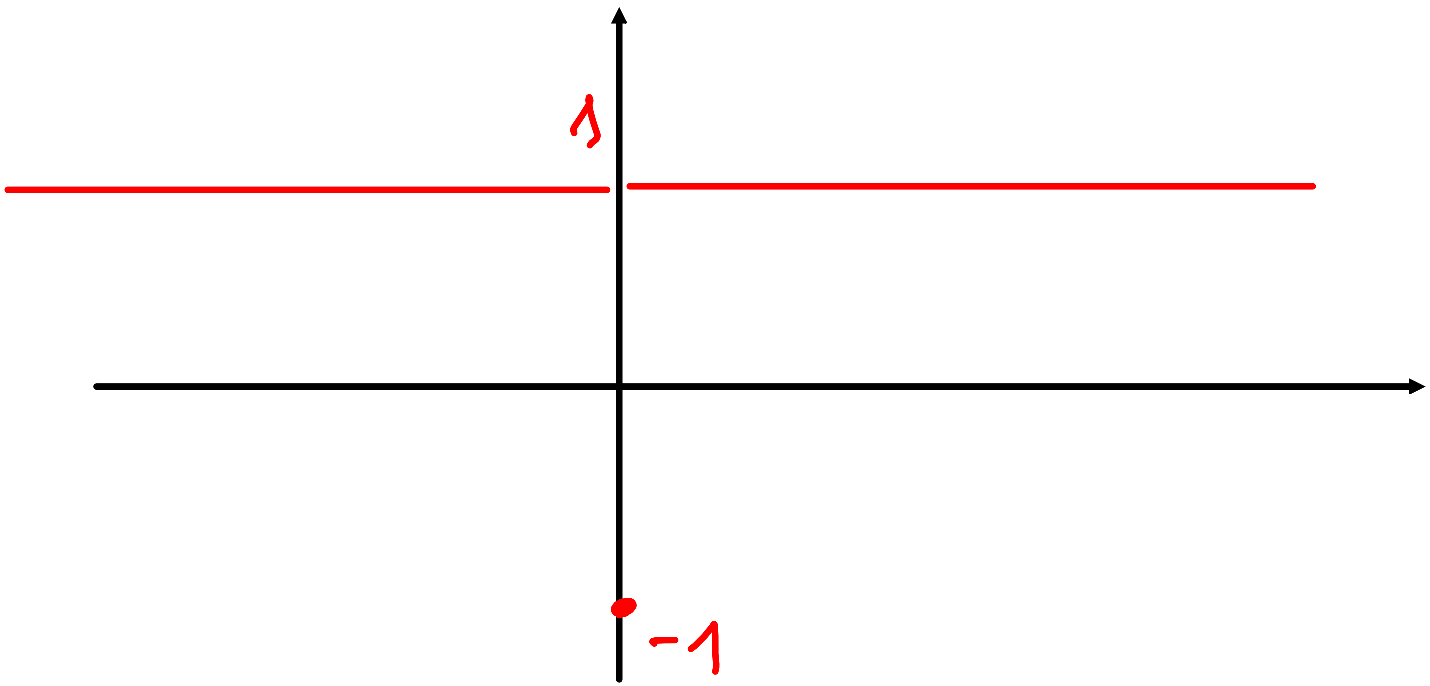
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

è continua a sinistra se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ott 6-16:48

Es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



ott 6-16:50

$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$

ma $f(0) = -1 \neq 1$

quindi f non è continua

in $x_0 = 0$.

Es: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

perché?

$f(x) = x^2$ è continua in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 9$.

ott 6-16:53

Teorema di confronto.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in Acc(A)$

$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se esistono

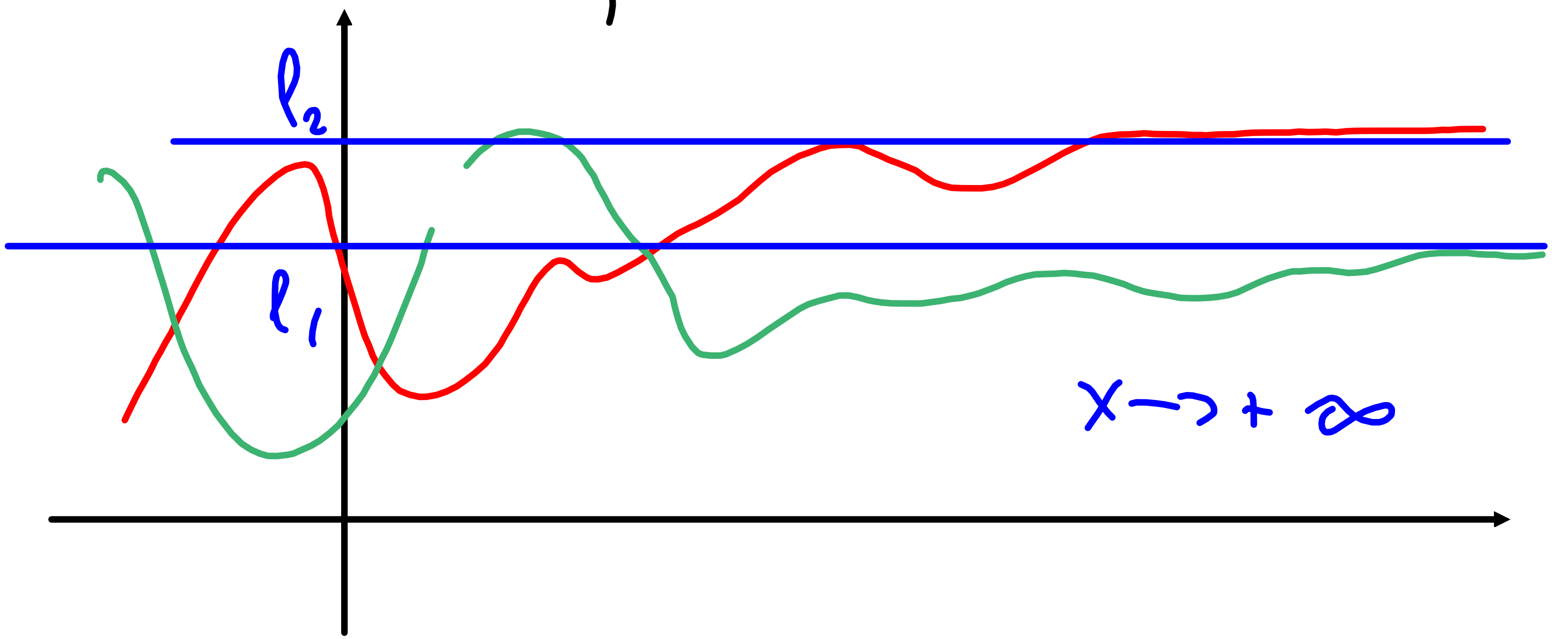
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad , \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

e se $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

ott 6-16:55

$$x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

Allora $\ell_1 \leq \ell_2$.



ott 6-16:57

Detto in altri termini la disuguaglianza passa al limite.

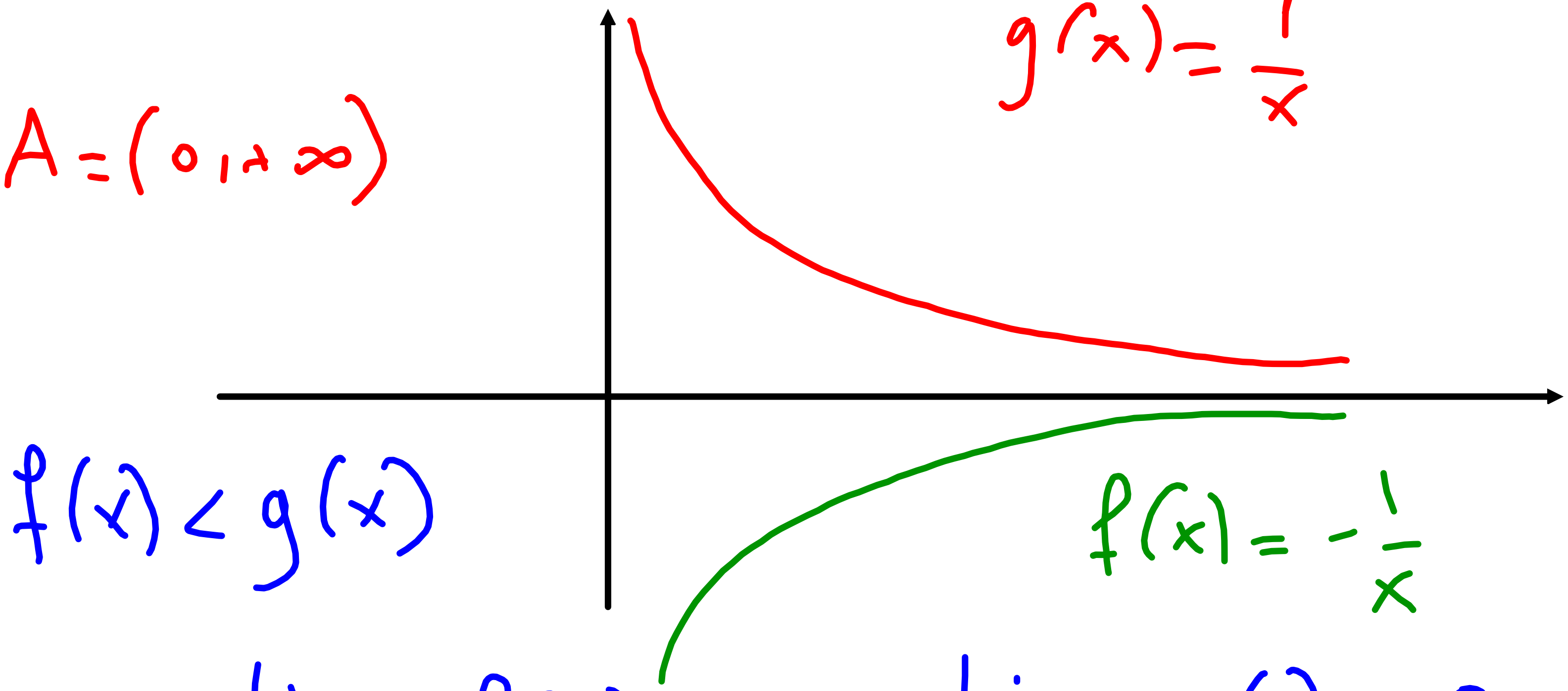
$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ott 6-17:00

E se fosse

$$f(x) < g(x) \quad ?$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

ott 6-17:02

Le disuguaglianze strette potrebbero diventare deboli passando al limite. Cioè

$$f(x) < g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ott 6-17:05

Teorema dei Carabinieri.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

$f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Se esistono

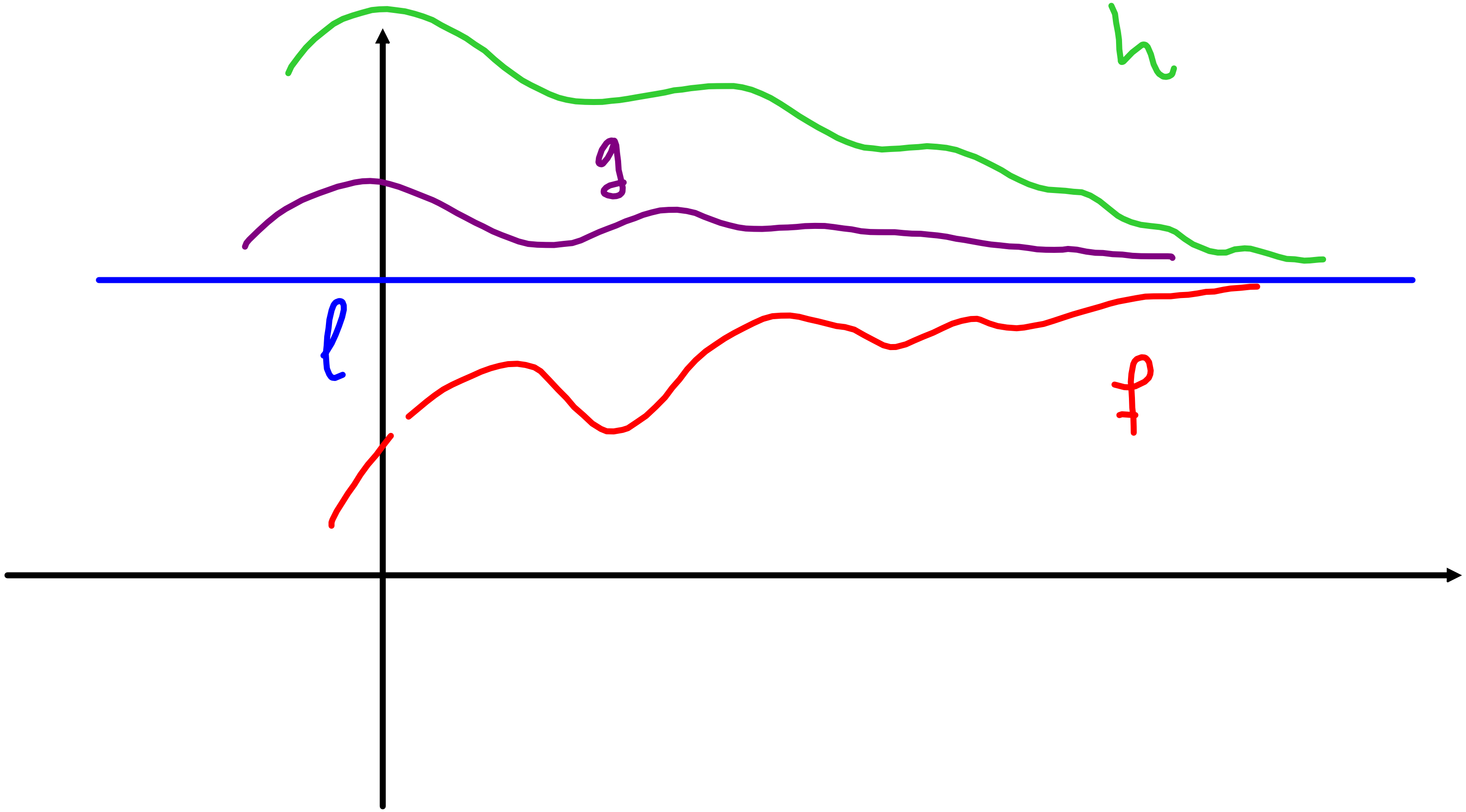
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

e se $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$$x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \implies f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

ott 6-17:06



ott 6-17:09

dim: $\forall \; V \in \mathcal{I}(\ell)$

$\exists \; U_1 \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. (1)

$x \in A \cap U_1 \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$ $\Big\}$ $\lim f = \ell$

$\exists \; U_2 \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. (2)

$x \in A \cap U_2 \setminus \{x_0\} \Rightarrow h(x) \in V$ $\Big\}$ $\lim h = \ell$

Sia $W = U_1 \cap U_2 \cap U \Rightarrow W \in \mathcal{I}(x_0)$

e se $x \in W \cap A \setminus \{x_0\}$ allora valgono sia (1) che (2).

cioè $f(x)\in V$ e $h(x)\in V$.

Ma $W \subset U$ vale anche

$$f(x)\le g(x)\le h(x)$$

$\Rightarrow g(x)\in V$ perché V è un intervallo

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

$\square$

Es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x}$$

$x > 0$

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{f} = \frac{2-1}{x} \leq \underbrace{\frac{2+\sin x}{x}}_{g} \leq \frac{2+1}{x} = \underbrace{\frac{3}{x}}_{h}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Teorema (somma e prodotto di limiti).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo

che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) se ha senso $l_1 + l_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$$

2) se ha senso $l_1 \cdot l_2$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2 .$$

Vuol dire che non vale nei casi
di indeterminazione

$(+\infty)+(-\infty)$

$(-\infty)+(+\infty)$

$(+\infty)\cdot 0$

$(-\infty)\cdot 0$

cioè il teorema non vi dice niente.

ott 6-17:24

Esempi di indeterminazione.

1) $f(x) = 2x \qquad g(x) = -x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) = ?$

$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} 2x - x = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$

ott 6-17:26

2) $f(x) = \frac{x}{2}$ $\quad g(x) = -x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

$$(+\infty) + (-\infty) = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2} - x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

3) $f(x) = x \qquad g(x) = -(x + \sin x)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

$$\underbrace{-(x + \sin x)}_{\downarrow \atop -\infty} = -x - \sin x \leq \underbrace{-x + 1}_{\downarrow \atop -\infty}$$

per il th. di Carabinieri

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

ott 6-17:30

$$(+\infty)+(-\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to\infty} x-(x+\sin x)$$

$$=\lim_{x\to\infty} -\sin x \quad \nexists$$

<u>Es</u>: $0 \cdot \infty$?

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

ott 6-17:35

Es: $0 \cdot \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g(x) = x^2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$

ma in questo caso

$f \cdot g = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x \longrightarrow +\infty$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $g = \sqrt{x}$

$x \to +\infty$

$f \to 0$, $g \to +\infty$

$f \cdot g = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$.

ott 6-17:37

Prop: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

e $\ell \in \mathbb{R}$ (cioè è finito)

allora f è limitata in un

intorno di x_0 cioè

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ e $\exists\, M > 0$ t.c.

$x \in U \cap \mathrm{dom}(f) \setminus \{x_0\}$

$\Longrightarrow \quad |f(x)| < M$

ott 6-17:39

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

è limitata in un intorno di $+\infty$.

f non è limitata in tutto il suo dominio