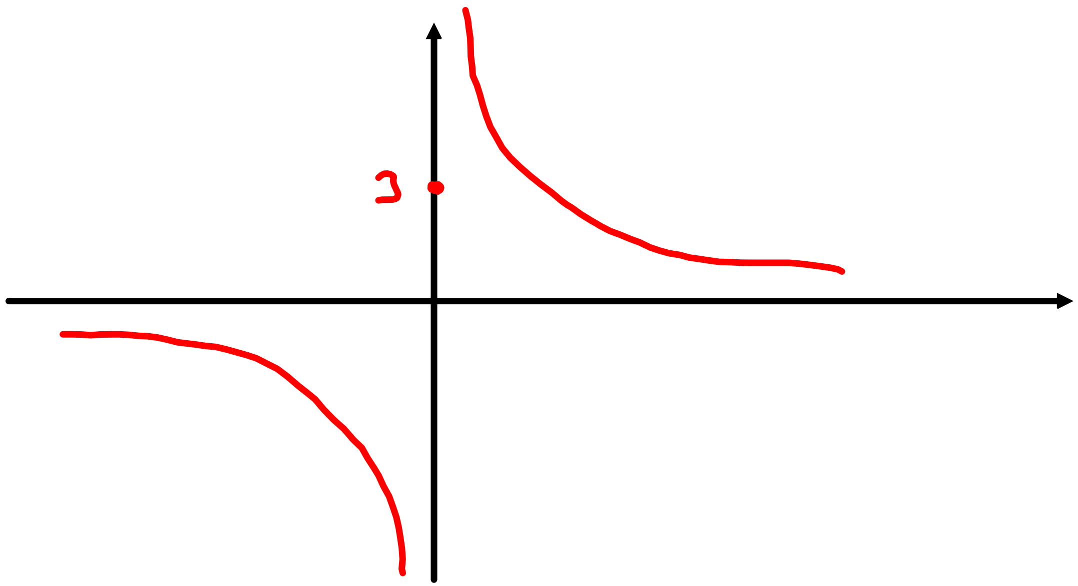
Teorema dei valori intermedi

Se tolgo l'ipotesi della continuità il teorema non vale.

Controesempio.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



ott 5-11:15

f non è continua

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f è definita su un intervallo

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

che non è un intervallo.

<u>Prop</u>: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, allora f è strettamente monotòna.

(Il viceversa è sempre vero cioè strett. monotona $\Longrightarrow$ iniettiva).

ott 5-11:19

Le ipotesi sono tutte necessarie

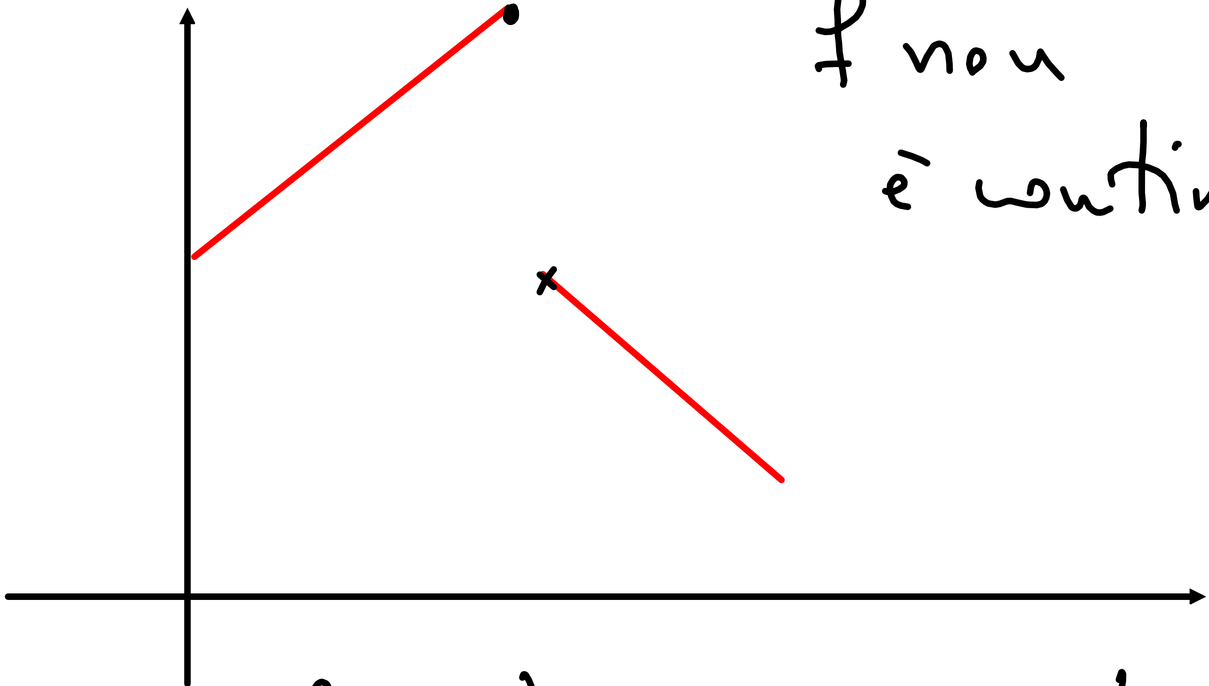
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

non è un intervallo.

è iniettiva e continua

ma non è monotòna.



f non è continua

f è definita su un intervallo è iniettiva ma non è monotòna

ott 5-11:23

Teorema di Weierstrass

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f ha massimo e minimo.

limitato e chiuso.

$a, b \in \mathbb{R}$

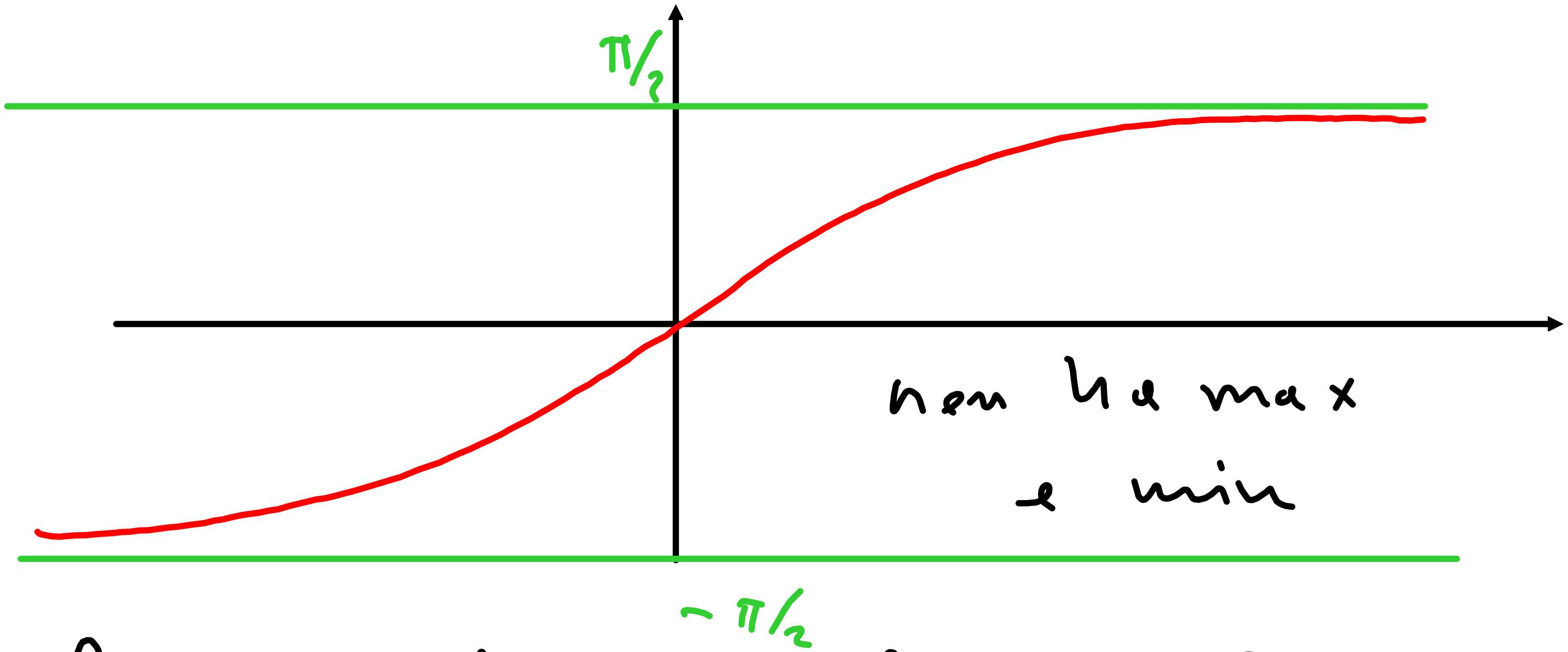
$a, b \neq \pm\infty$.

Perchè mi serve un dominio limitato e chiuso.

è continua ma non ha massimo

$$f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

Perché l'intervallo deve essere limitato



$f(x) = \text{arctg}\, x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Intorni

Def: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dica intorno di x_0 un insieme del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

dove $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ che si dice raggio dell'intorno.

ott 5-11:34

Un insieme del tipo

$[x_0, x_0+\varepsilon)$ si dice

intorno destro di x_0

$(x_0-\varepsilon, x_0]$ intorno

sinistro.

Def: se $x_0 = +\infty$ un intorno di $+\infty$ è un insieme del tipo

$$(a, +\infty) \quad \text{dove } a \in \mathbb{R}$$

semiretta

intorno di $-\infty$

$$(-\infty, a) \quad a \in \mathbb{R}$$

ott 5-11:37

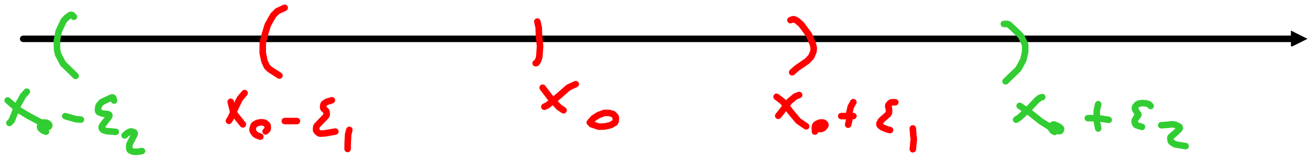
Def: Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ l'insieme di tutti gli intorni di x_0 si indica con

$$\mathcal{J}(x_0).$$

Oss: Dati U e $V \in \mathcal{I}(x_0)$ risulta che

$$U \cap V \in \mathcal{I}(x_0)$$

$$U \cup V \in \mathcal{I}(x_0).$$



$U = (x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_1)$ $V = (x_0-\varepsilon_2, x_0+\varepsilon_2)$

$U \cap V$ ha il raggio uguale al $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$U \cup V$ ha il raggio uguale al $\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Lo stesso con le semirette intorni di $\pm\infty$.

ott 5-11:42

Def.: Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ risulta

$$U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset .$$

ott 5-11:44

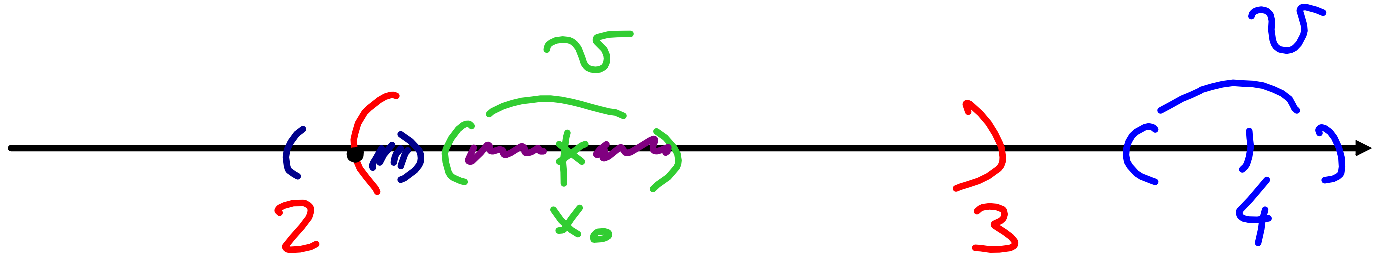
Vuol dire che vicino a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0 (x_0 potrebbe anche non essere un punto di A).

Es: $A = (2,3)$.

$Acc(A) = \{$ punti di accumulazione di $A \}$.

$U \cap A = \emptyset$

$U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$



ott 5-11:47

$(2,3) \subset Acc(A)$

$2 \in Acc(A)$? sì

$3 \in Acc(A)$

$4 \in Acc(A)$? NO

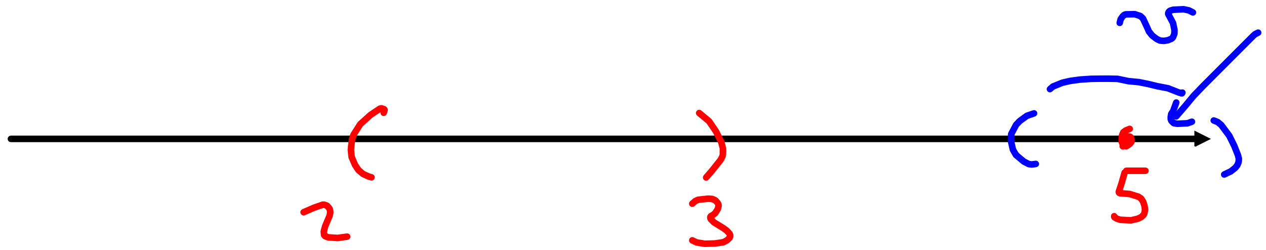
$Acc(A) = [2,3]$

$$B = [2,3]$$

$$Acc(B) = [2,3]$$

$$C = (2,3) \cup \{5\}$$

punto isolato



$$U \cap C = \{5\}, \quad U \cap C \setminus \{5\} = \emptyset$$

$$Acc(C) = [2, 3]$$

$$D = (3, +\infty)$$

$$+\infty \in Acc(D) ?$$

$$V \in \mathcal{I}(\infty) \quad \text{qualsiasi}$$

$$V = (a, +\infty)$$

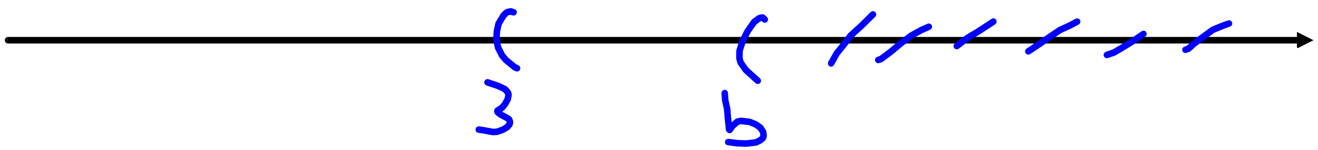
ott 5-11:58

$$\mathcal{U} \cap D \setminus \{\infty\} =$$

$$= (a, +\infty) \cap (3, +\infty) \setminus \{+\infty\}$$

$$= (b, +\infty) \neq \emptyset$$

dove $b = \max\{a, 3\}$

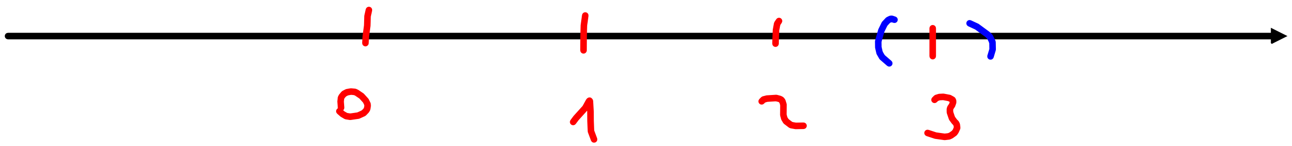


$$Acc(D) = [3, +\infty]$$

compreso $+\infty$.

$$E = \mathbb{N}$$

$$Acc(\mathbb{N}) = ?$$



ott 5-12:02

ogni $n \in \mathbb{N} \notin Acc(\mathbb{N})$.

$+\infty \in Acc(\mathbb{N})$.

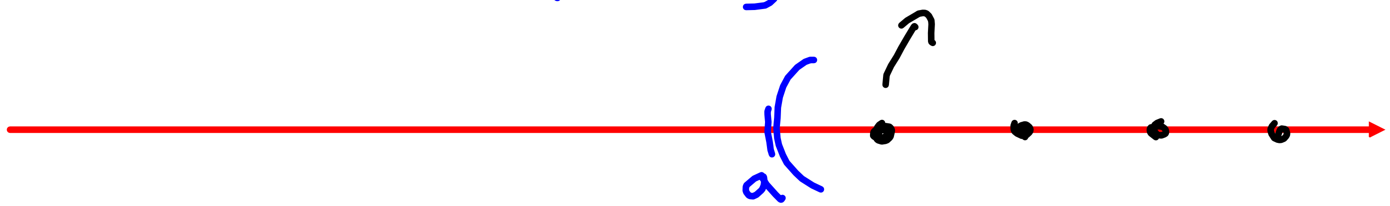
verifichiamo

$V \in \mathcal{I}(+\infty)$

$V = (a, +\infty)$

$V \cap \mathbb{N} \setminus \{+\infty\} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq [a]+1\} \neq \emptyset$

$[a]+1$



ott 5-12:04

$$\mathrm{Acc}(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$$

$$\mathrm{Acc}(\mathbb{Z}) = \{-\infty, +\infty\}$$

due elementi

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$. Si dice

che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite

di f per x che tende

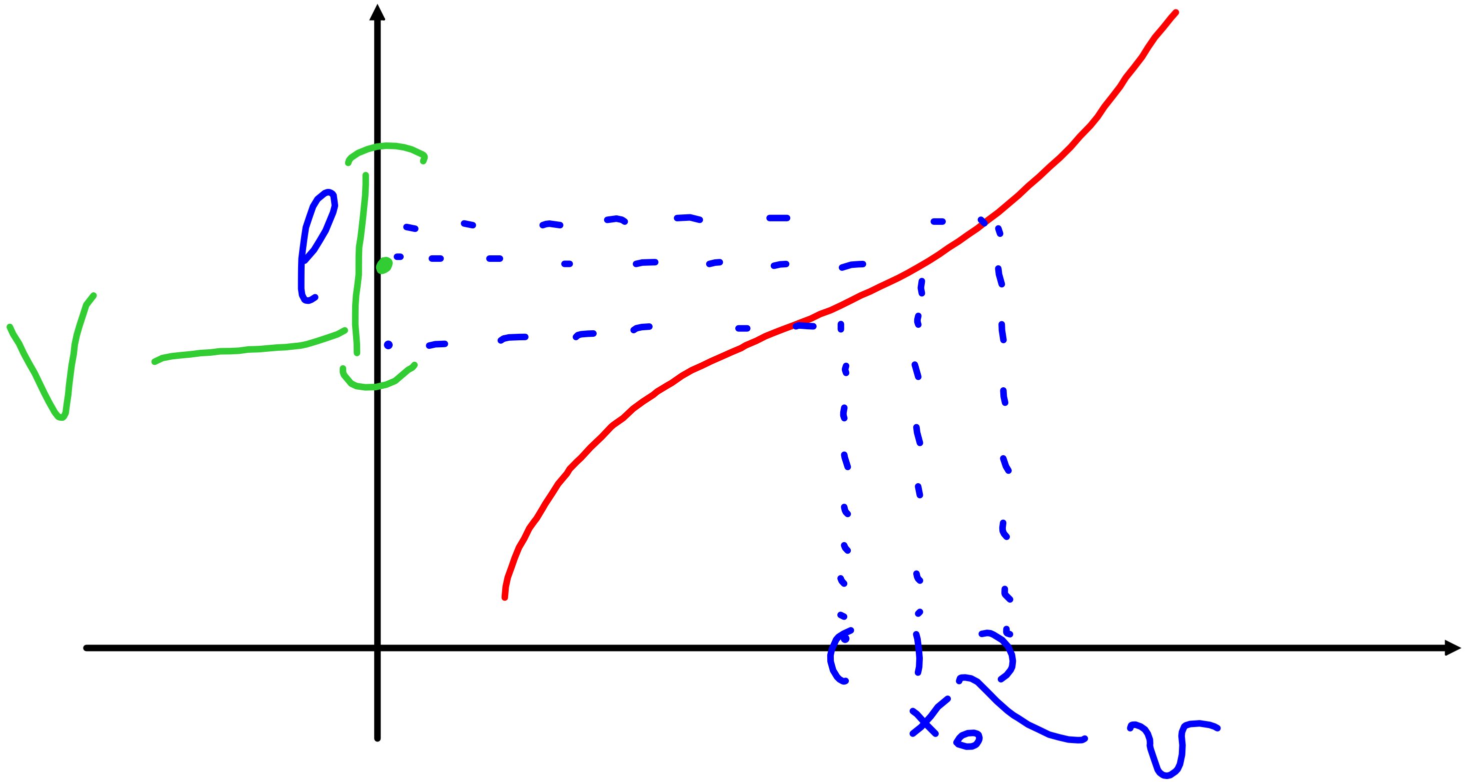
a x_0 <u>se</u> $\forall\, V \in \mathcal{I}(l)$

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

ott 5-12:08

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ → non mi interessa quanto vale f in x_0.

$\Longrightarrow f(x) \in V$



ott 5-12:09

Cosa vuol dire nel caso

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

$\forall V \in \mathcal{I}(\ell)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$

$\exists \delta > 0 \quad U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

ott 5-12:13

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$$

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in A, \quad x \neq x_0$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

continuità

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in A$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ott 5-12:15

Oss: f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

ott 5-12:20

Oss: quando faccio il limite non è detto che $x_0 \in A$, basta che $x_0 \in Acc(A)$.

ott 5-12:22

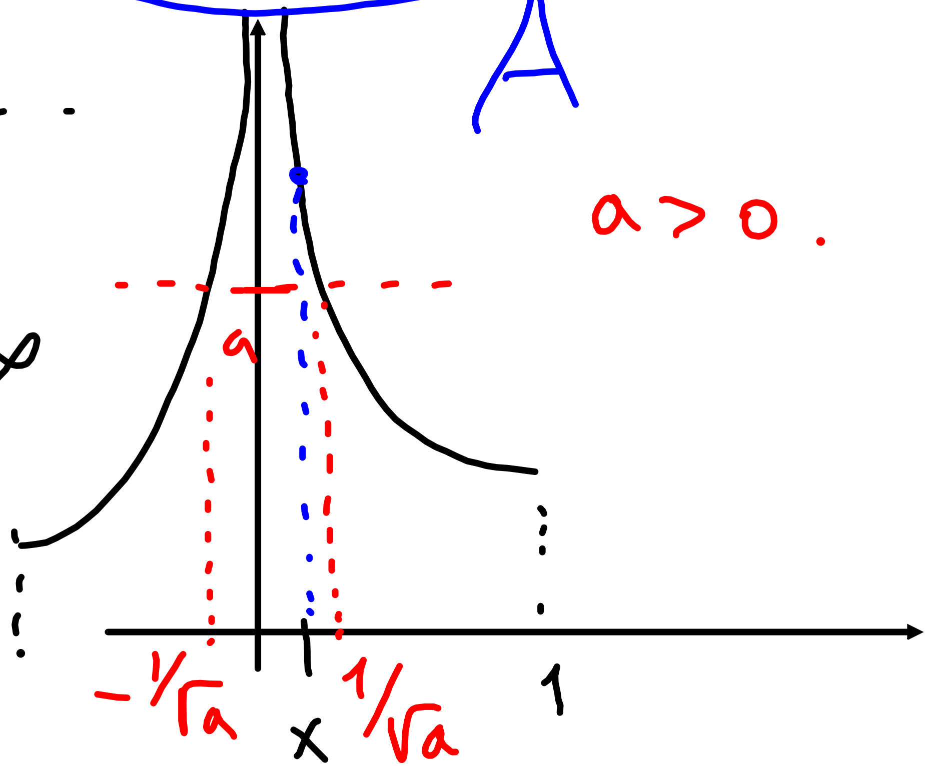
Es: $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ A

$f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$a > 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

verifichiamo:



$V \in \mathcal{I}(+\infty)$

allora $V = (a, +\infty)$

supponiamo per ora $a > 0$.

Se prendo $U = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

$x \in U \cap A \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f(x) > a$ cioè $f(x) \in V$

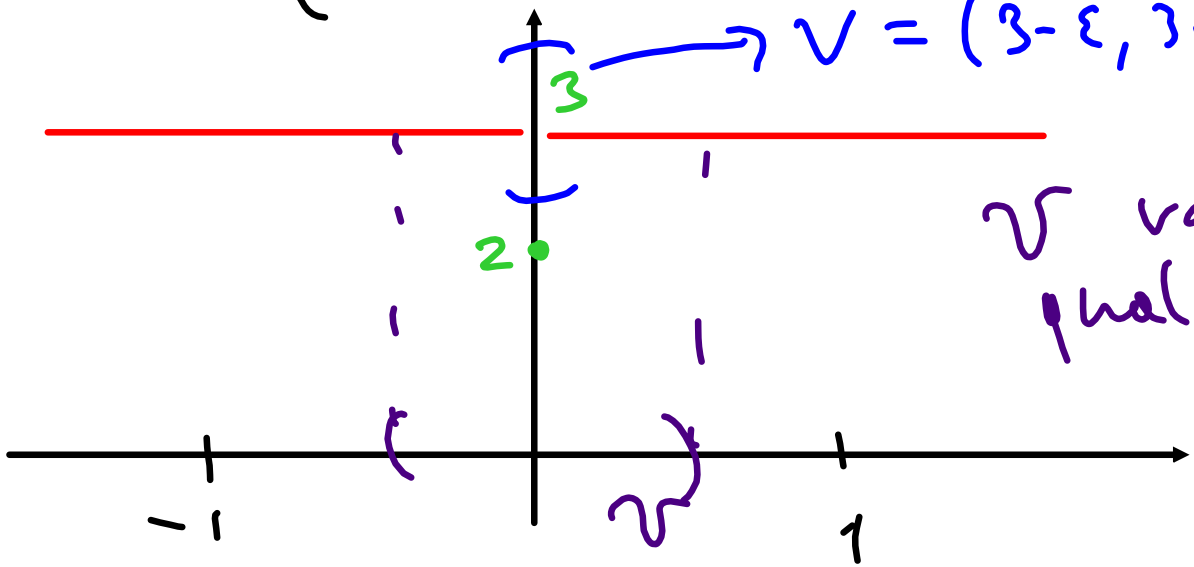
ott 5-12:25

$$A = [-1, 1]$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$V = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$$



V va bene qualsiasi.

ott 5-12:30

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 .$$

perchè $f(x) = 3$

$\forall x \in U \setminus \{0\}$

f non è continua
in 0 perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \neq f(0) = 2$$

<u>Oss</u>: $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$ e supponiamo

che sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(cioè $l \neq \pm\infty$). Allora

la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$\bar{f}$ è continua in x_0.

Nell'esempio di prima

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$l = \lim_{x \to 0} f(x).$$

ott 5-12:41

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

$f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che

$l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite

di f per x che tende a x_0

da destra e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

ott 5-12:43

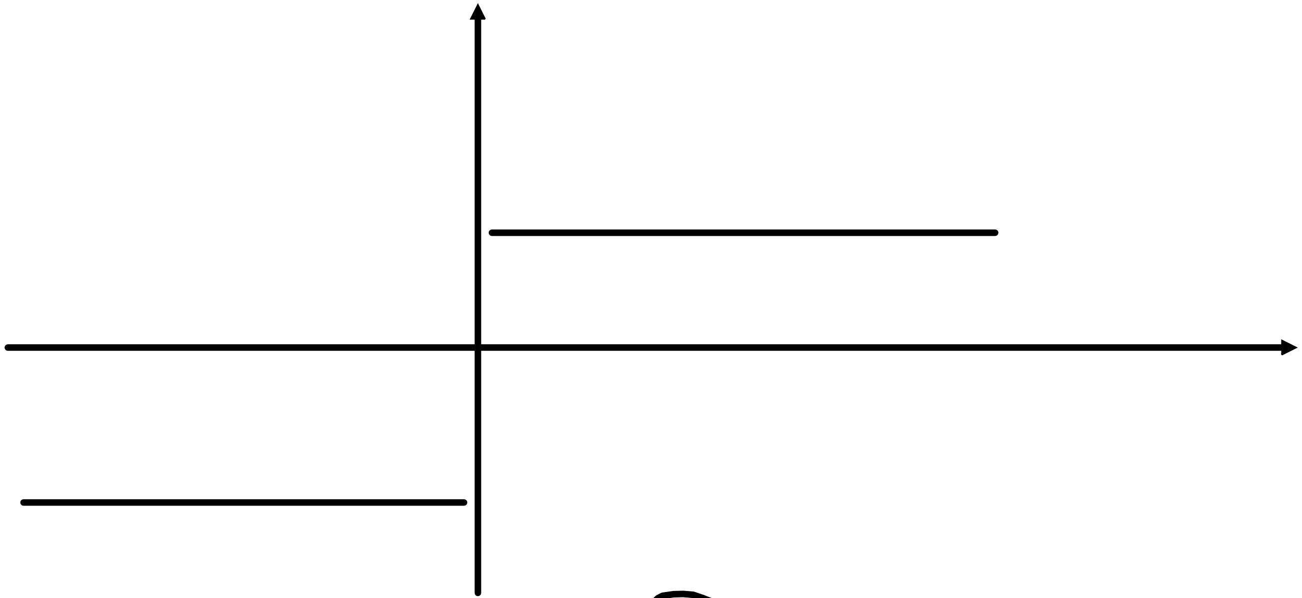
se $\forall V \in \mathcal{I}(\ell)$ $\exists$

U intorno destro di x_0

t.c.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V.$

ott 5-12:44



$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x).$$