Permanenza del segno.

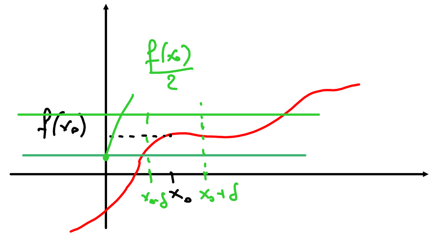
Teorema: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$
$x_0 \in A$. Se f è continua in x_0
e $f(x_0) > 0$ allora $\exists\, \delta > 0$
t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$
allora $f(x) > 0$.
Stesso risultato se $f(x_0) < 0$.

set 30-08.43

dim: $f(x_0) > 0$
scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ nella definizione
di continuità. Allora $\exists\, \delta > 0$
t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$
risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
cioè $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \square$$

set 30-09.16



set 30-09.19

Corollario: Se f è continua
in x_0 e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$
allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se
$|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ allora
$f(x) > M$

dim: applico il teorema
precedente a $g(x) = f(x) - M$. $\square$

set 30-09.22

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$
$x_0 \in A$. Se f è continua in x_0
e $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è
continua in x_0.

Oss: Il teorema sulla permanenza
del segno mi permette di dire
che $\frac{1}{f}$ è definita in un intervallo

set 30-09.24

intorno a x_0
$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
$\Rightarrow$ ha senso parlare di continuità
in x_0.

set 30-09.27

Corollario: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f e g continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$

allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

dim: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ □

set 30-09.28

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

$f : I \to B$. Se f è continua in I e invertibile

allora f^{-1} è continua in B.

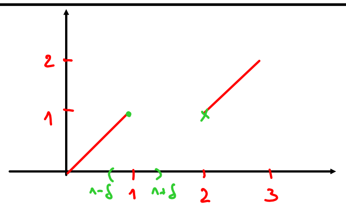
L'ipotesi che il dominio sia un intervallo è necessaria.

set 30-09.30

Es: $f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

set 30-09.34



f è iniettiva? sì.

f è continua?

In $x_0 = 2$ f non è definita quindi non ha senso domandarsi se è continua.

set 30-09.35

f è continua in $x_0 = 1$?

devo verificare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$A = [0,1] \cup (2,3]$

se scelgo δ piccolo (cioè < 1)

$\Rightarrow (1-\delta, 1+\delta) \cap A = (1-\delta, 1]$

set 30-09.40

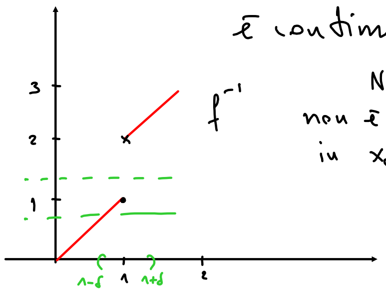
quindi non devo verificare niente a destra di $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 1$.

f è surgettiva.

Chi è l'inversa?

set 30-09.43



è continua?

No
non è continua
in $x_0 = 1$.

set 30-09.46

Continuità delle funzioni elementari

polinomi sono continui

funzioni razionali sono continue nell'insieme di definizione

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad p, q \text{ polinomi}$$

$$f(x) = \frac{5x^2 + 7}{x^3 + 4x + 2}$$

set 30-09.52

Assumeremo che

e^x, $\sin x$, $\cos x$

sono continue

di conseguenza lo sono anche

$\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

set 30-09.54

Teorema: $f : A \to B$

$g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora

$g \circ f$ è continua in x_0

Es: $e^{\sin x}$ è continua

$f(x) = \sin x$ $g(y) = e^y$

set 30-09.56

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\sin x}$$

set 30-09.59

Oss: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

continua in $[a,b]$. Allora

$$\sup_{(a,b)} (f) = \sup_{[a,b]} (f)$$

$$\inf_{(a,b)} (f) = \inf_{[a,b]} (f)$$

set 30-10.01

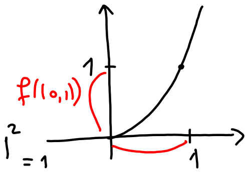
Es: $f(x)=x^2$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$\sup\limits_{[0,1]} f(x) = \max\limits_{[0,1]} f = 1^2 = 1$

$\sup\limits_{(0,1)} f(x) = \sup(f((0,1))) = \sup(0,1) = 1$

non è un max.

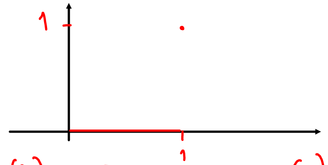


set 30-10.04

Es: L'ipotesi di continuità è necessaria.

$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1) \\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$

g non è continua in $[0,1]$



$\sup\limits_{(0,1)}(g) = 0$ $\sup\limits_{[0,1]}(g) = 1$

set 30-10.08

Teorema degli zeri

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.

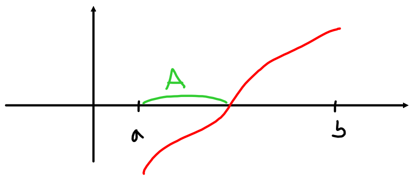
Se $f(a)\cdot f(b)<0$ allora $\exists\, c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=0$.

set 30-10.14

dim: supponiamo che sia $f(a)<0$ e $f(b)>0$.

Definisco

$A=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}$



set 30-10.16

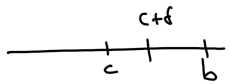
Sia $c=\sup(A)$. Voglio dimostrare che $f(c)=0$.

Per assurdo. Se fosse $f(c)<0$

$\Rightarrow$ $c<b$ (perché $f(b)>0$).

$\Rightarrow$ posso trovare $\delta>0$ t.c.

$c+\delta<b$



Applico il teorema sulla permanenza

set 30-10.18

del segno in $x_0=c$.

Trovo $\delta_1>0$ t.c.

$f(x)<0$ in $(c-\delta_1, c+\delta_1)$.

Posso anche supporre che sia $\delta_1\le\delta$.

$\Rightarrow$ $f(x)<0$ a destra di c

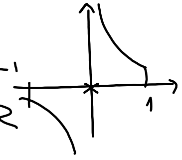
$\Rightarrow$ c non sarebbe un maggiorante di A. assurdo.

set 30-10.21

Se invece fosse $f(c)>0$.
allora per gli stessi motivi
(permanenza del segno)
$f(x)>0$ in $(c-\delta, c+\delta)$
in particolare $f(x)>0$ a sinistra
di c. Allora c non sarebbe
il minimo dei maggioranti
assurdo. $\Rightarrow f(c)=0$. $\square$

set 30-10.23

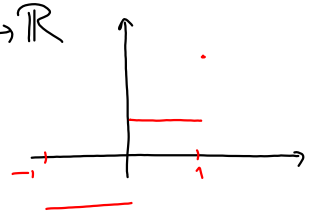
Es: L'ipotesi che f sia
definita su un intervallo
è necessaria.
Infatti $f(x)=\frac{1}{x}$
$f:[-1,0)\cup(0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



f è continua $f(-1)=-1$
$f(1)=1$
ma $\nexists\, c : f(c)=0$.

set 30-10.26

L'ipotesi di continuità è
necessaria.
$f(x)=[x]+\frac{1}{2}$
$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$
$f(-1)=-\frac{1}{2}$
$f(1)=\frac{3}{2}$



set 30-10.29

f assume valori discordi
agli estremi ma non si
annulla mai.

set 30-10.32

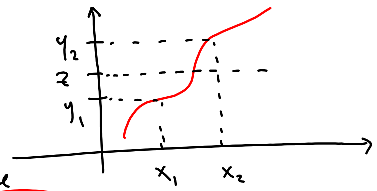
Teorema dei valori intermedi

$I\subset\mathbb{R}$ intervallo $f: I\to\mathbb{R}$
continua. Allora
$f(I)$ è un intervallo.

dim: Siano y_1 e $y_2 \in f(I)$
$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in I$ t.c.
$f(x_1)=y_1$ e $f(x_2)=y_2$

set 30-10.33

supponiamo
$y_1<y_2$
devo
verificare che



$\forall z: y_1<z<y_2$ risulta $z\in f(I)$
considero $g(x)=f(x)-z$
$g(x_1)=f(x_1)-z=y_1-z<0$
$g(x_2)=f(x_2)-z=y_2-z>0$

set 30-10.36

applico il teorema degli zeri alla funzione g nell'intervallo di estremi x_1 e x_2.

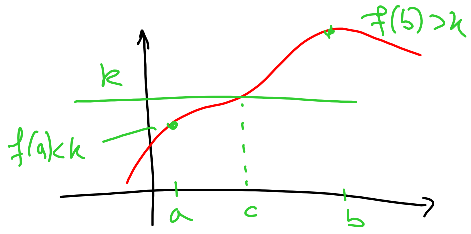
$\Rightarrow \exists\, c$ t.c. $g(c)=0$

cioè $f(c)-z=0 \Rightarrow f(c)=z$

$\Rightarrow z \in f(I)$.

$\Rightarrow f(I)$ è un intervallo $\square$

set 30-10.39



$\Rightarrow \exists\, c:\ f(c)=k$

set 30-10.42