Inversa di una funzione dispari. $f(x) = -f(-x)$

f dispari $f(-x) = -f(x)$

$f: A \longrightarrow B \quad f^{-1}: B \longrightarrow A$

verifichiamo che f^{-1} è dispari

set 29-15:55

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = \text{f è dispari}$$

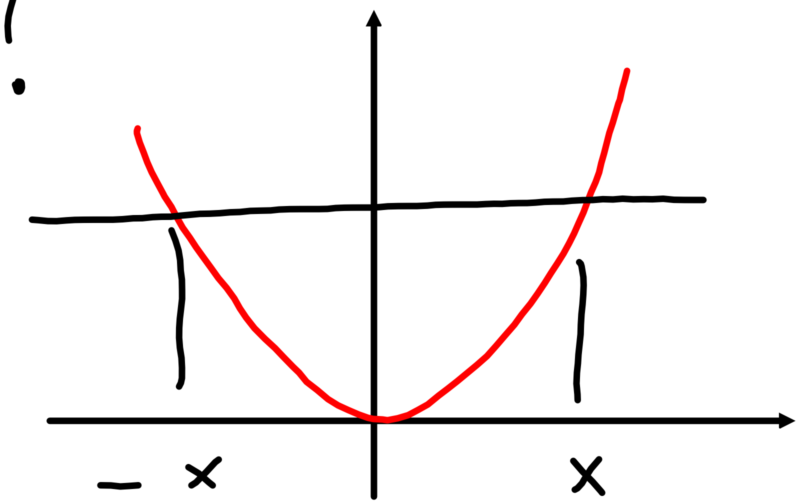
$$= f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

quindi f^{-1} è dispari

L'inversa di una funzione pari?

una funzione pari non è mai iniettiva

$f(x) = f(-x)$



set 29-16:22

Se f è dispari

quanto vale $f(0)$?

$$f(0) = -f(-0) = -f(0)$$

$$\Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Def: L'insieme di definizione di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove le operazioni descritte in f hanno senso.

Es: L'insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$

set 29-16:26

Es: $\log x$

è definita in $(0,+\infty)$

Es: $\log(2x)$ in $(0,+\infty)$

Es: $\log(x^2)$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Es: $2\log x$ in $(0,+\infty)$

$$\log(x^2) = 2\log x$$
$\forall\, x > 0$

set 29-16:29

se $x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$$\log(x^2) = \log((-x)^2)$$

$$= 2\log(-x)$$

$$\log(x^2) = 2\log|x| \quad \forall x \neq 0 .$$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\pi/2, \pi/2\right]$$

set 29-16:33

$$\arcsin(\sin x) = ?$$

è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$

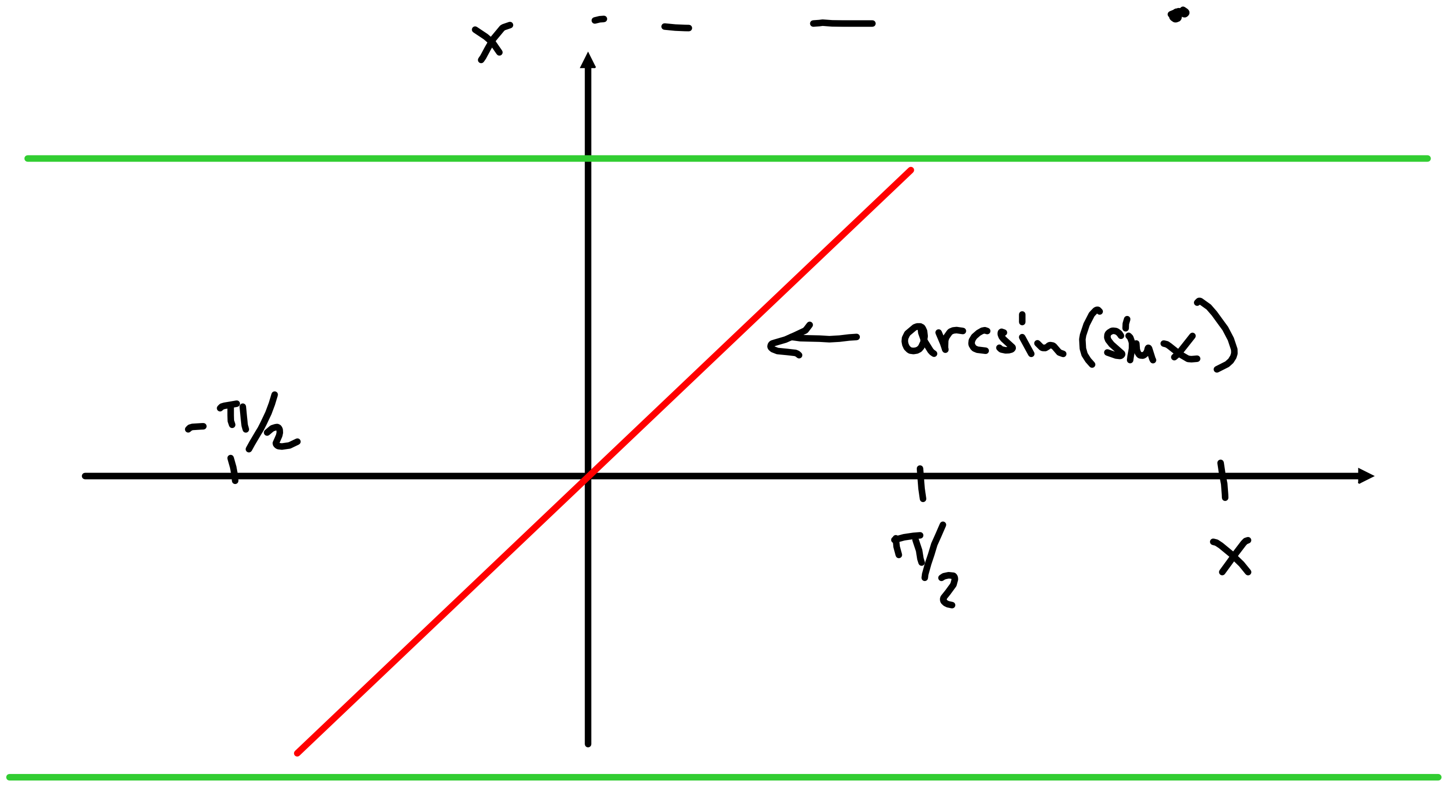
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} [-1,1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

se $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ quanto vale?

non vale x sicuramente

set 29-16:36



set 29-16:39

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n \geq 5 \}$$

$\sup(A), \inf(A), \max(A), \min(A)$?

$$n^2 + 2n - 5 \geq 0$$

$$n^2 + 2n - 5 = 0$$

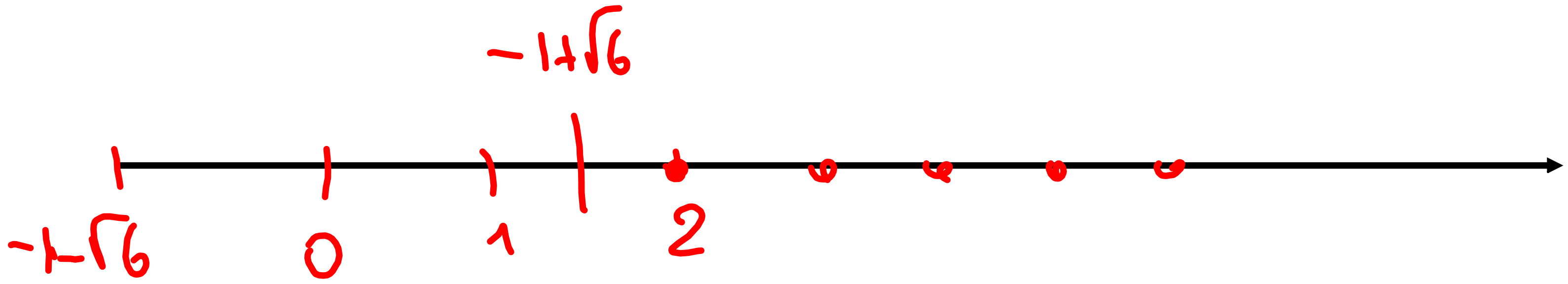
$$n = -1 \pm \sqrt{1+5} = \begin{cases} -1+\sqrt{6} \\ -1-\sqrt{6} \end{cases}$$

set 29-16:42

quindi $n \geq -1+\sqrt{6}$ $n \in \mathbb{N}$

oppure $n \leq -1-\sqrt{6}$ non serve

$n \geq 0$



$1 = -1+2 < -1+\sqrt{6} < -1+3 = 2$

$A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \}$ $\nexists \max(A)$

$\min(A) = \inf(A) = 2$ $\sup(A) = +\infty$

Es: $A = \{x \in \mathbb{R} : 2\log(x^2) < 3\}$

$x \neq 0$

$\log(x^2) < \frac{3}{2}$

$x^2 < e^{3/2}$

$x^2 - e^{3/2} < 0$

$|x| < e^{3/4}$

$-e^{3/4} < x < e^{3/4}$ $\quad x \neq 0$

set 29-16:50

$$A = (-e^{3/4}, 0) \cup (0, e^{3/4})$$

$$\inf(A) = -e^{3/4}$$

$$\sup(A) = e^{3/4}$$

A non ha né max né min.

A è limitato.

set 29-16:54

Es: $B = \{x \in \mathbb{R} : 4 \log x < 3\}$

$x > 0$

$\log x < \frac{3}{4}$ $\qquad e^{\log x} = x$

$\forall x > 0$

$0 < x < e^{3/4}$

$B = (0, e^{3/4})$

$\inf(B) = 0 \quad \sup(B) = e^{3/4}$

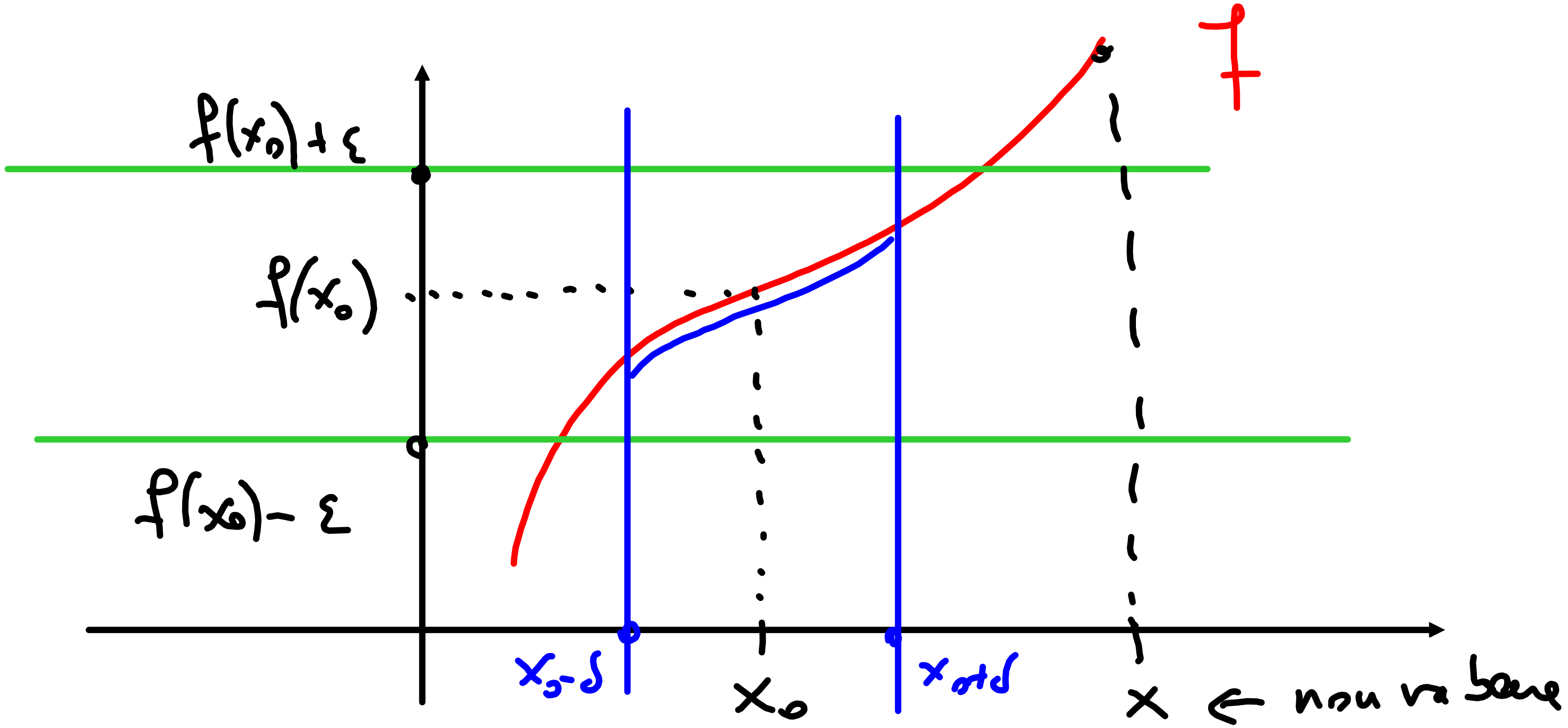
set 29-16:56

Continuità

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ t.c.

$x \in A$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

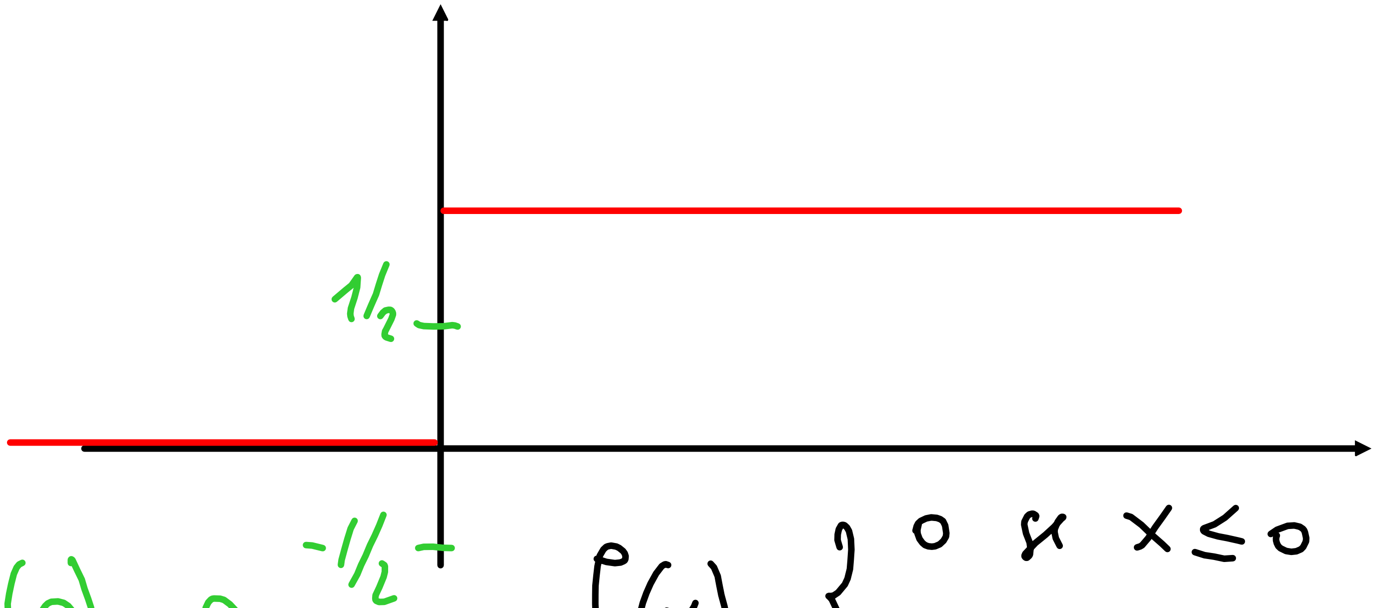


$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{vuol dire}$$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

$$|x-x_0|<\delta \iff x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

Quali funzioni non sono continue?



$f(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$

set 29-17:09

se scelgo $\varepsilon = 5$ la definizione di continuità è verificata perchè

$$0 - 5 < f(x) < 0 + 5 \quad \forall x$$

ma deve valere $\forall \varepsilon > 0$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

dovrei trovare $\delta > 0$ t.c. se

set 29-17:12

$$|x-\underset{\substack{\uparrow \\ x_0}}{0}|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-\underset{\substack{\uparrow \\ f(x_0)}}{0}|<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

non lo posso trovare perché

$|x-0|<\delta$ vuol dire

$$-\delta<x<\delta$$

ma $\forall\ x \in (0,d)$

$$\Rightarrow f(x) = 1 > \frac{1}{2}$$

e invece dovrebbe essere

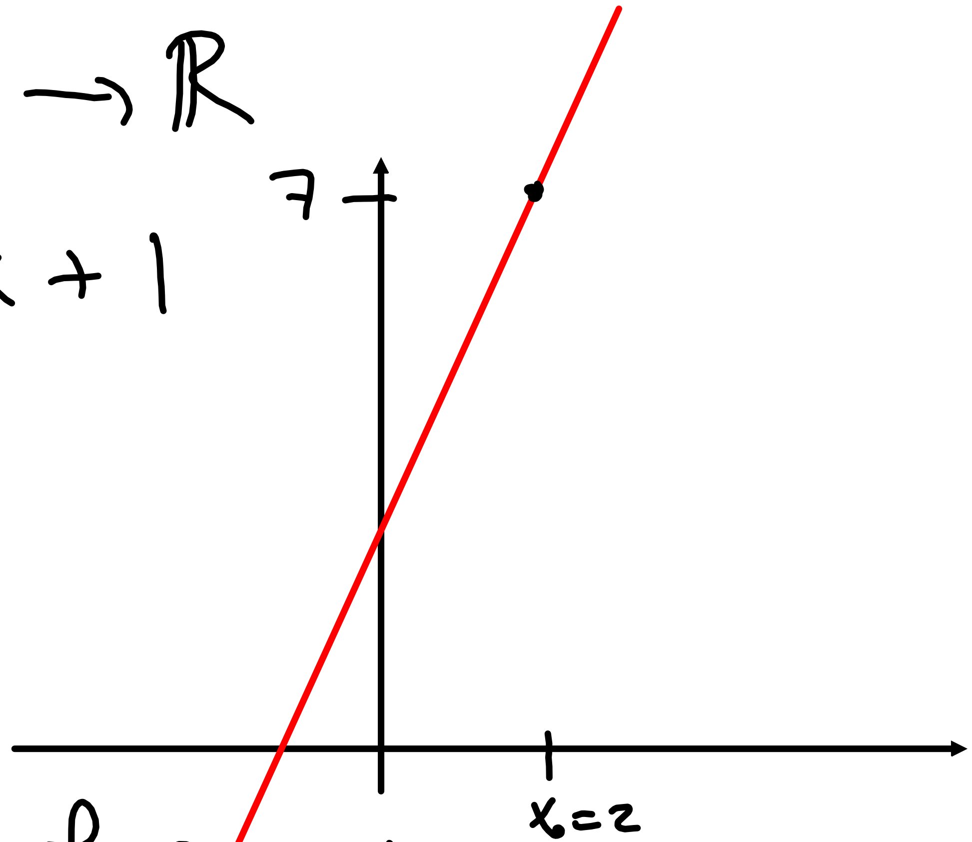
$$-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x + 1$$

$x_0 = 2$

$f(x_0) = 7$



vediamo che f è continua in $x_0 = 2$.

Scelgo $\varepsilon > 0$ qualsiasi.

voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

se $|x-2| < \delta$

$\Rightarrow$ $|f(x)-7| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$|3x+1-7| < \varepsilon$$

$$|3x+\cancel{1}-(3\cdot 2+\cancel{1})| < \varepsilon$$

$$|3(x-2)| < \varepsilon$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

set 29-17:20

basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

se $|x-2| < \delta$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

. - - . -

$|f(x) - 7| < \varepsilon$.

set 29-17:23

Teorema

Se f e g sono continue in x_0

allora

1) $f+g$ è continua in x_0

2) $f \cdot g$ è continua in x_0

3) $|f|$ è continua in x_0

dim: solo 1).

f è continua in x_0 $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\ \delta_1 > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta_1$

e $x \in A$ (A = dominio di f
e dominio di g.)

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

g è continua in x_0 quindi

$\exists\ \delta_2 > 0$ t.c. se

$|x - x_0| < \delta_2$ e $x \in A$ allora

set 29-17:28

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

perché se

$|x - x_0| < \delta$ allora

$|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$

quindi

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| =$$

triangolare

$$= |f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quindi $f+g$ è continua in x_0.

$\square$

Con questo teorema posso dire che tutti i polinomi sono continui.

$f(x) = x$ è continua.

$\Rightarrow$ $x^2 = x \cdot x$ è continua.

$x^3, x^4, \dots, x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sono continue

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} +$$

$$+ \dots + a_1 x + a_0$$

è somma di funzioni continue.

Def.: $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

diciamo che f è continua in B se f è continua in x_0 $\forall x_0 \in B$.

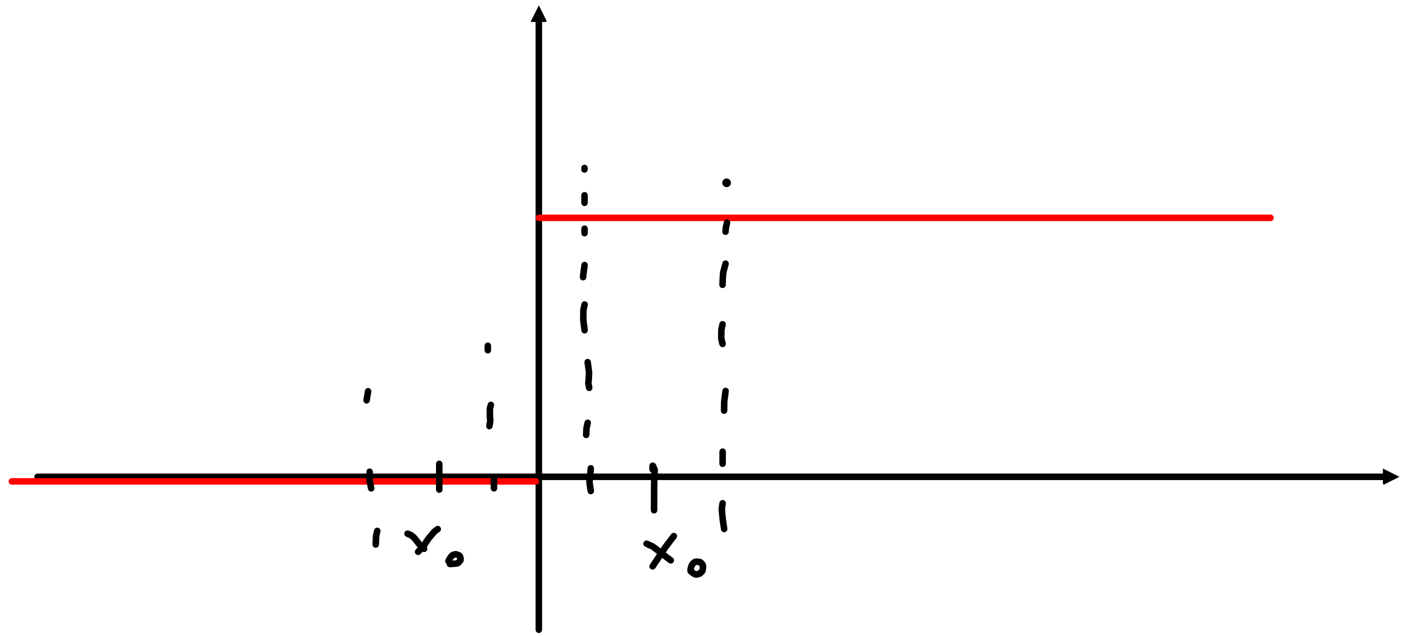
Se dico semplicemente che f è continua intendo continua in tutto il suo insieme di definizione.

Es: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Es: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

è continua in tutto il suo insieme di definizione che è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



set 29-17:43