Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se
A è superiormente limitato
allora A ha massimo, se
è inferiormente limitato
ha minimo.

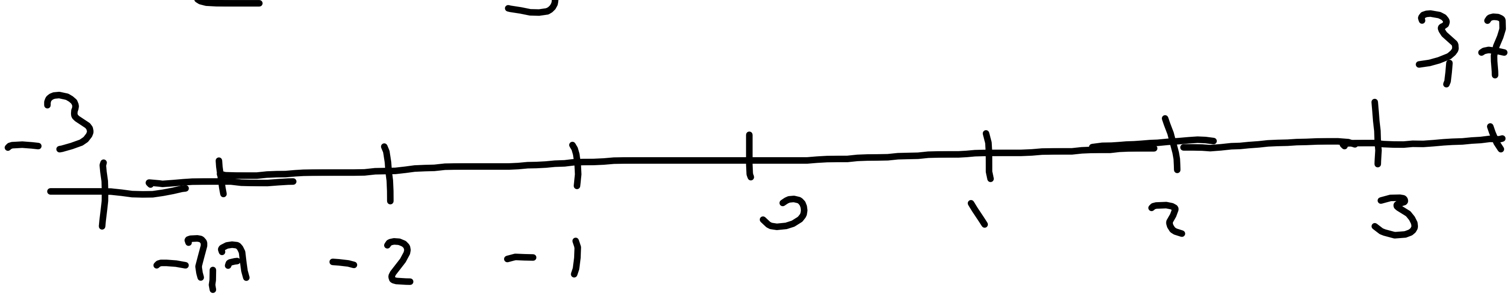
set 28-11:08

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x

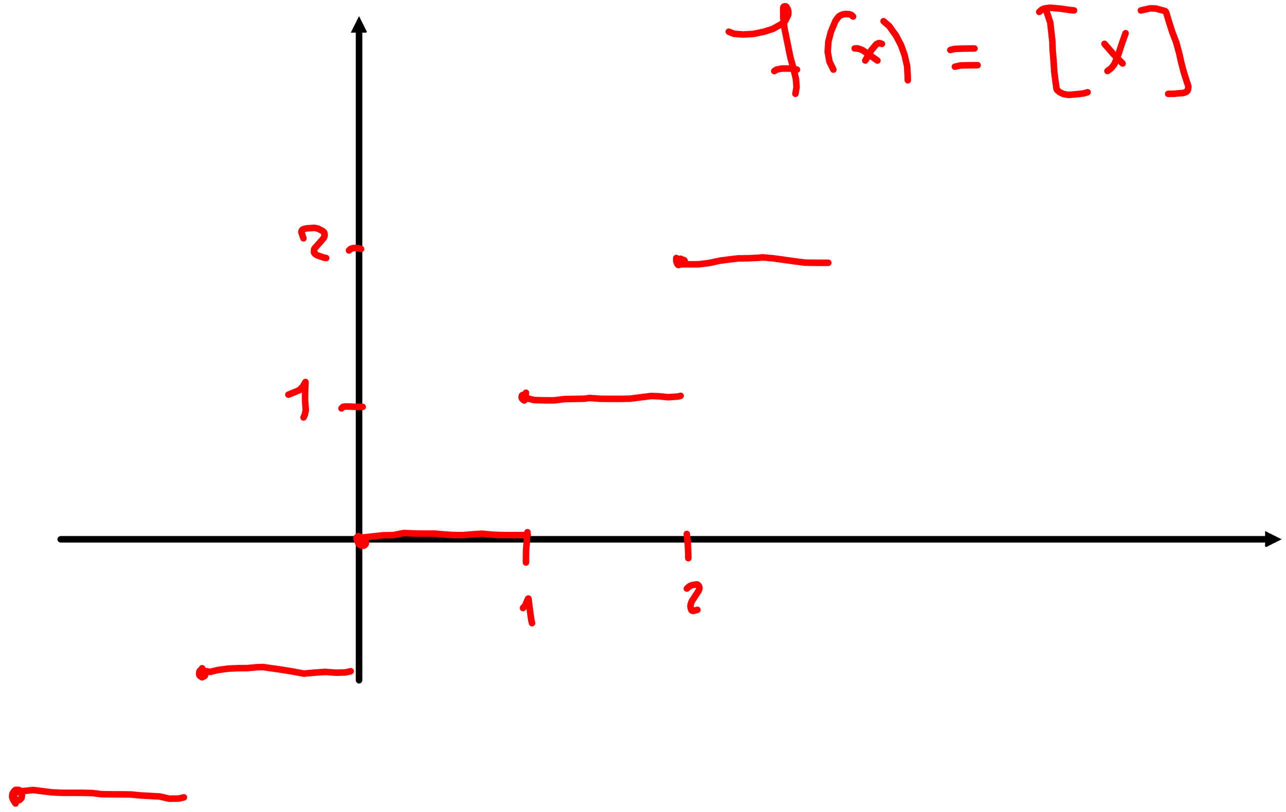
$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

$$[3,7] = 3$$

$$[-2,7] = -3$$



$f(x) = [x]$



<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$

a) f si dice limita sup. se
$f(A)$ è limitato sup.
(limit. inf, limitata).

b) f ha massimo se $f(A)$ ha
massimo. M è il max di f
se $M = \max(f(A))$.
lo stesso per min (f).

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$.

se f non è limitata superiorm.

si scrive $\sup(f) = +\infty$

inf - - - -

d) Se f ha massimo ogni

$x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = \max(f)$

si dice punto di massimo

per f.

set 28-11:24

Oss: Il massimo di f è unico, il punto di massimo potrebbe non esserlo.

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$\max(f) = 1$ $\quad f(A) = [-1, 1]$

$A = \mathbb{R}$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo

$x_1 = \frac{5}{2}\pi$ è punto di massimo

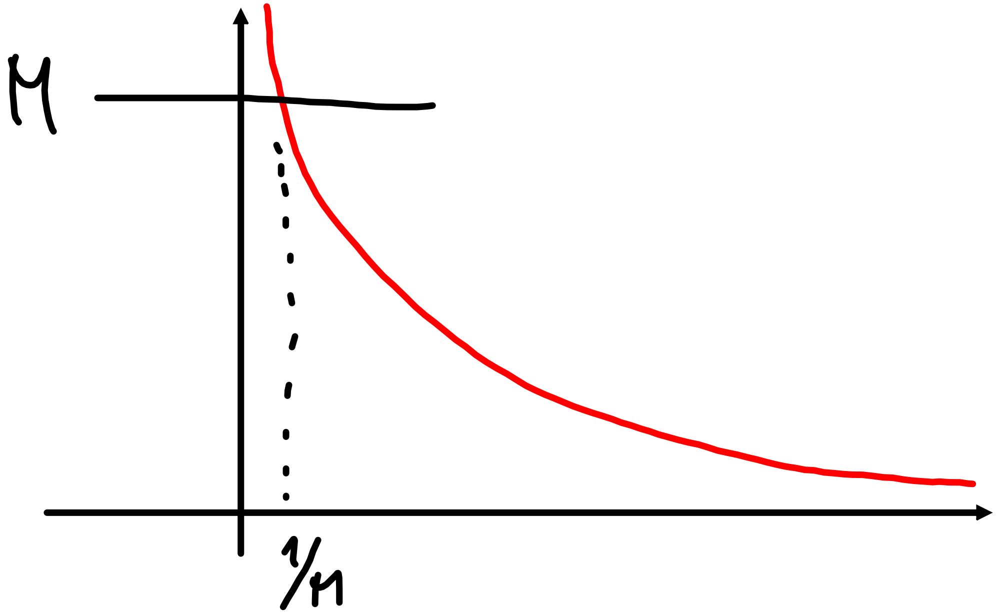
$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ è punto di massimo.

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = 0$



f non ha né max né min

verifichiamo

set 28-11:28

Se f fosse limitata superiorm.
allora $f((0,+\infty))$ sarebbe un
insieme limitato superiorm.
cioè $\exists\ M \in \mathbb{R}$: M è un
maggiorante di $f((0,+\infty))$

$\Longrightarrow\ f(x) \leq M \quad \forall\ x \in (0,+\infty)$
non è possibile perché
sarebbe $\dfrac{1}{x} \leq M \quad \forall x \in (0,+\infty)$

set 28-11:31

assurdo perché se prendo

$x = \frac{1}{2M}$ avrei

$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M$

$\Rightarrow$ $\sup(f) = +\infty$.

verifichiamo che $\inf(f) = 0$.

0 è un minorante

perché $\frac{1}{x} > 0$ $\forall x (0, +\infty)$

set 28-11:33

verifico che è il max dei minoranti:

$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 + \varepsilon = \varepsilon$ non è un minorante perché non è vero che

$$\frac{1}{x} > \varepsilon \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

basta prendere $x = \frac{2}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{x} = \frac{\varepsilon}{2} \not> \varepsilon$$

$\Rightarrow 0 = \inf(f)$

per vedere che f non ha minimo basta verificare che $0 \notin f((0,+\infty))$.

cioè che non è mai $f(x) = 0$

$\frac{1}{x} = 0$ impossibile

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$B \subset A$ si indica con

$$\sup_B (f) = \sup(f(B))$$

$$\inf_B (f) =$$

$$\max_B (f), \ldots \min_B (f)$$

Es: $A = (0, +\infty)$

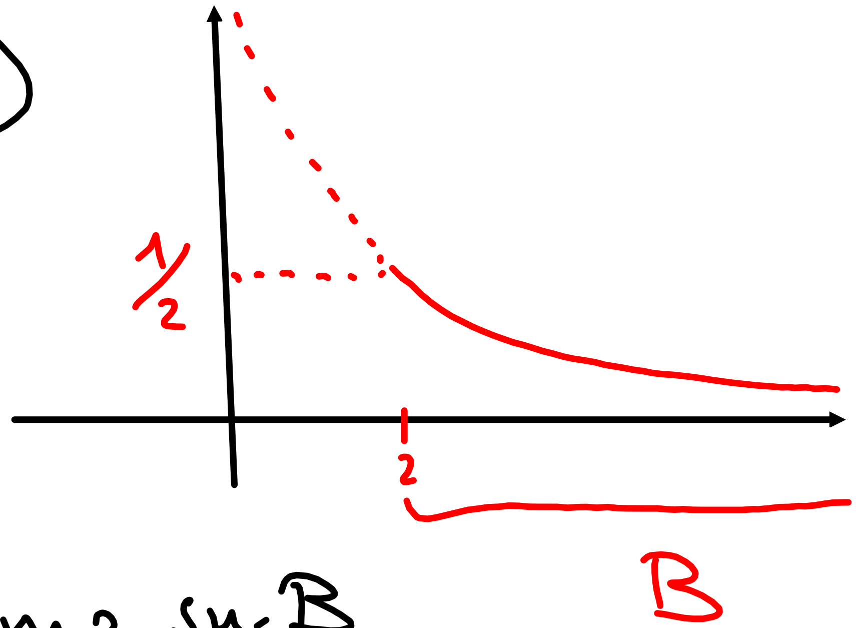
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

$B = [2, +\infty)$

$\max_B (f) = \frac{1}{2}$

$\inf_B (f) = 0$

f non ha minimo su B.



set 28-11:40

<u>Oss</u>: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$

a) Se A ha max e f è deb. crescente $\Rightarrow$ f ha max e

$$\max(f) = f(\max(A))$$

b) Se A ha minimo e f è deb. cresente $\Rightarrow$ f ha minimo e

$$\min(f) = f(\min(A))$$

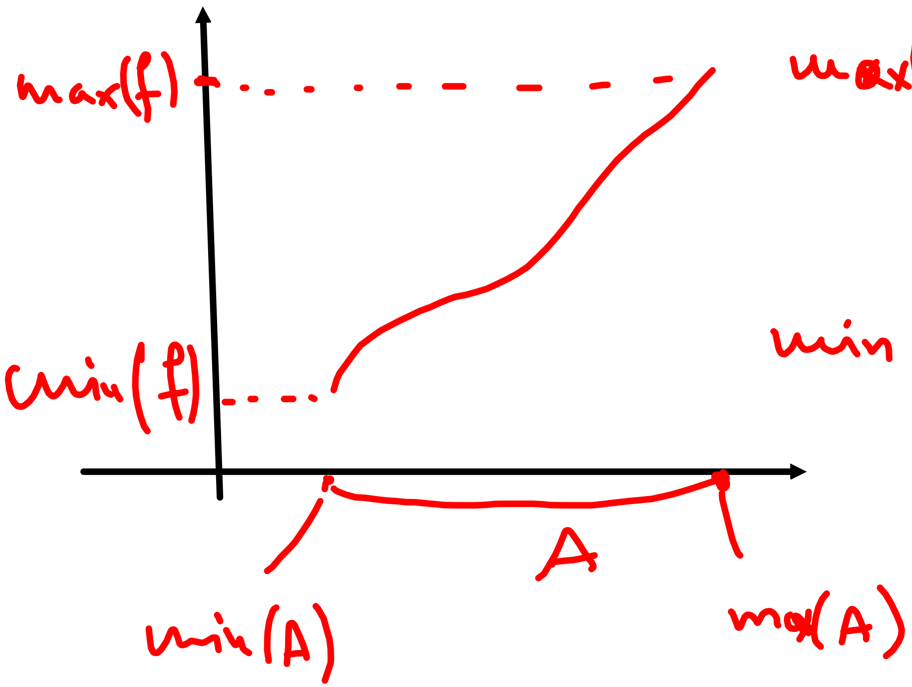
c) Se A ha max e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha minimo e

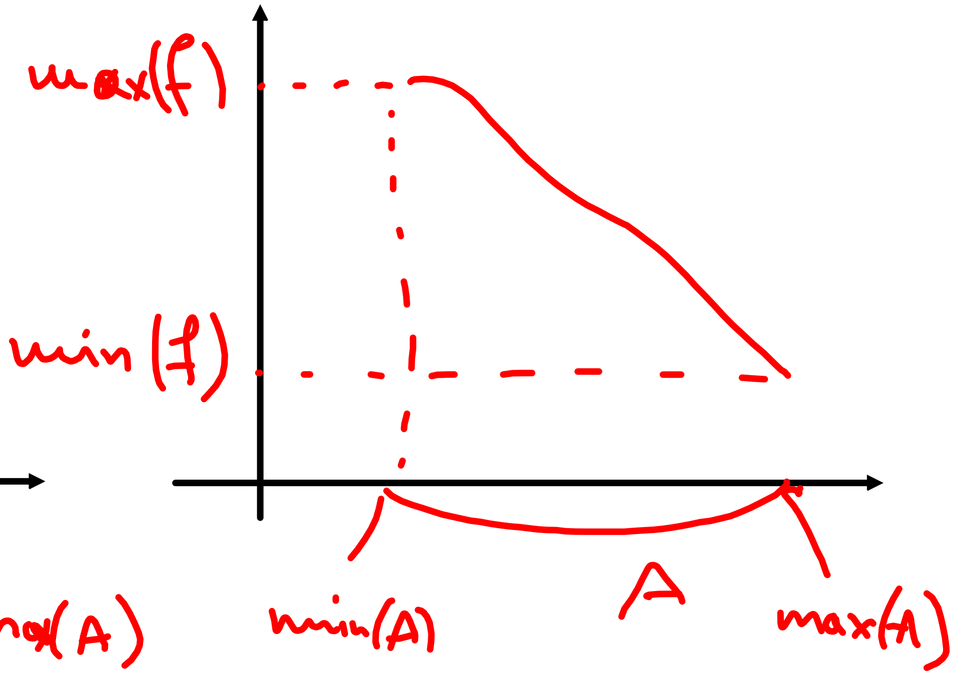
$$\min(f) = f(\max(A))$$

d) Se A ha min e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha max e

$$\max(f) = f(\min(A)).$$

set 28-11:47





set 28-11:48

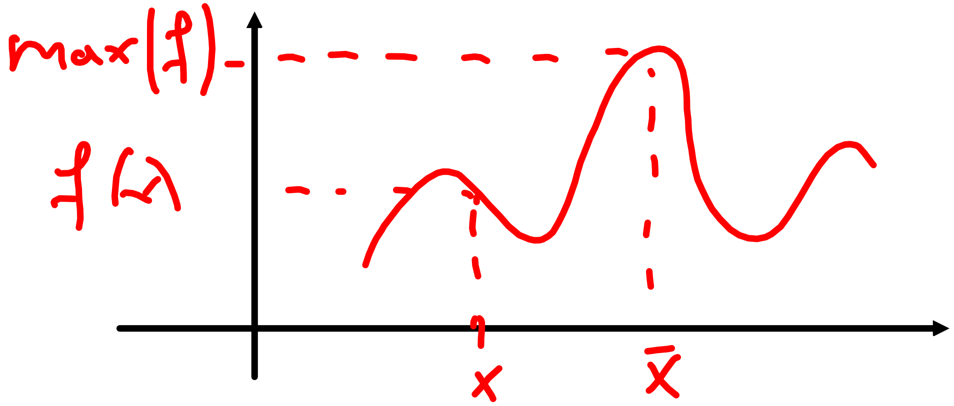
dim. a) A ha max e f è deb. crescente.

Sia $m = \max(A) \Rightarrow x \leq m$ $\forall x \in A$, $m \in A$. $\Rightarrow$ posso calcolare $f(m)$

$f(m) \geq f(x)$ $\forall x \in A$ perché f è deb. crescente

$\Rightarrow f(m) = \max(f)$. $\square$

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ f ha max se e solo se $\exists\ \bar{x} \in A$ t.c. $f(x) \leq f(\bar{x})\ \forall x \in A$.



set 28-11:54

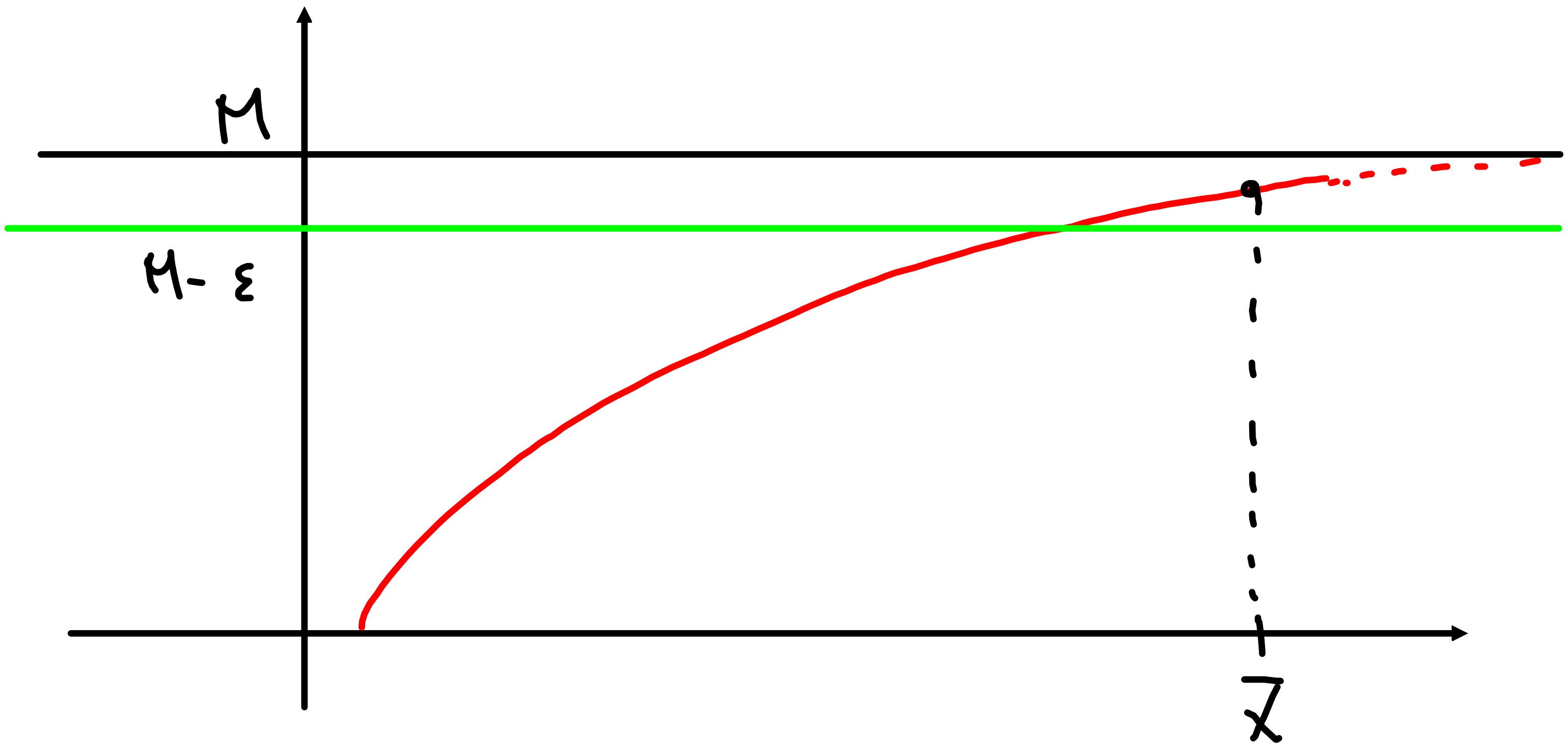
Oss: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$M = \sup(f)$ se e solo se valgono

1) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{x} \in A$ t.c.

$f(\bar{x}) > M - \varepsilon$



set 28-11:58

Valore assoluto

Def: $\forall x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Proprietà.

1) $x \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$. –

$|x| = -x$ se $x \leq 0$. – .

3) $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4) $|x| = 0 \iff x = 0$

5) $|-x| = |x|$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$

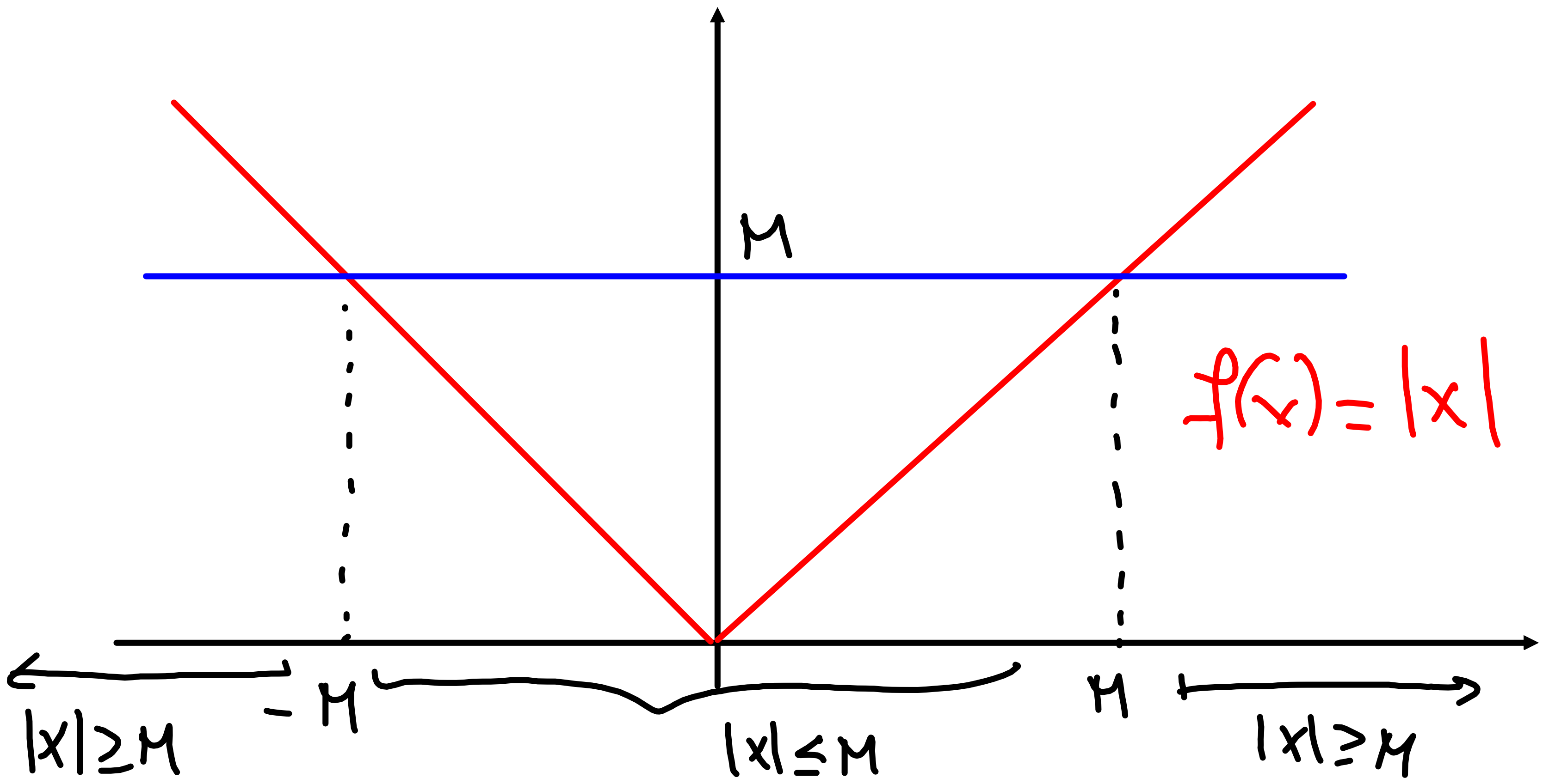
set 28-12:03

7) $|x| \leq M$ se e solo se

$-M \leq X \leq M$

8) $|x| \geq M$ se e solo se

$X \geq M$ oppure $X \leq -M$



$$|x| \geq M \iff x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$$

$M \geq 0$

Se $M < 0$

$|x| \geq M$? $x \in \mathbb{R}$

$|x| < -3$ $\emptyset$

Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|$$

dim:

$$a \le |a|$$
$$b \le |b| \quad \Rightarrow \quad a+b \le |a|+|b|$$

$$-|a| \le a$$
$$-|b| \le b \quad \Rightarrow \quad -|a|-|b| \le a+b$$

$$-|a|-|b| \le a+b \le |a|+|b| \qquad M$$

$$-M$$

$$|a+b| \le M$$

$$\Rightarrow \quad |a+b| \le |a|+|b|$$

dimostriamo la seconda

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$

per la propietà che ho appena dimostrato

$$|a| - |b| \leq |a-b| \quad *$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a|$$

$$= |a-b| + |a|$$

$$|b| - |a| \leq |a-b| \quad **$$

set 28-12:18

$$\boxed{|a|-|b| \le |a-b|} \quad *$$

$$|b|-|a| \le |a-b| \quad **$$

$$\boxed{|a|-|b| \ge -|a-b|}$$

$$\underbrace{-|a-b|}_{-M} \le |a|-|b| \le \underbrace{|a-b|}_{M}$$

$$\big||a|-|b|\big| \le M = |a-b|$$

$\square$

Oss: $|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$

$\leq |a| + |b| + |c|$

Es: $\left| x - |x^2+x+2| \right| < 4$

per quali x vale?

$$-4 < x - |x^2+x+2| < 4$$

è un sistema di 2 disuguaglianze

moltiplico per -1

$$4 > |x^2+x+2| - x > -4$$

sommo x

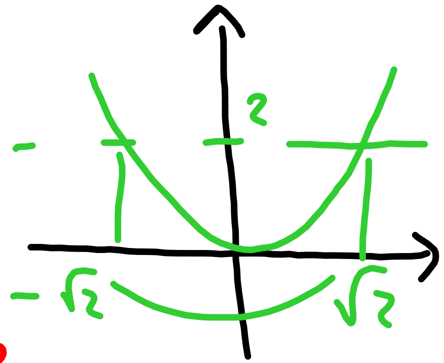
$$4+x > |x^2+x+2| > -4+x$$

A B

$$\begin{cases} 4+x > |x^2+x+2| & \text{A} \\ |x^2+x+2| > -4+x & \text{B} \end{cases}$$

A $\quad -4-x < x^2+x+2 < 4+x$

$$A \begin{cases} x^2 + \cancel{x} + 2 < 4 + \cancel{x} & A_1 \\ x^2 + x + 2 > -4 - x & A_2 \end{cases}$$



A_1 $\quad x^2 + 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 2$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

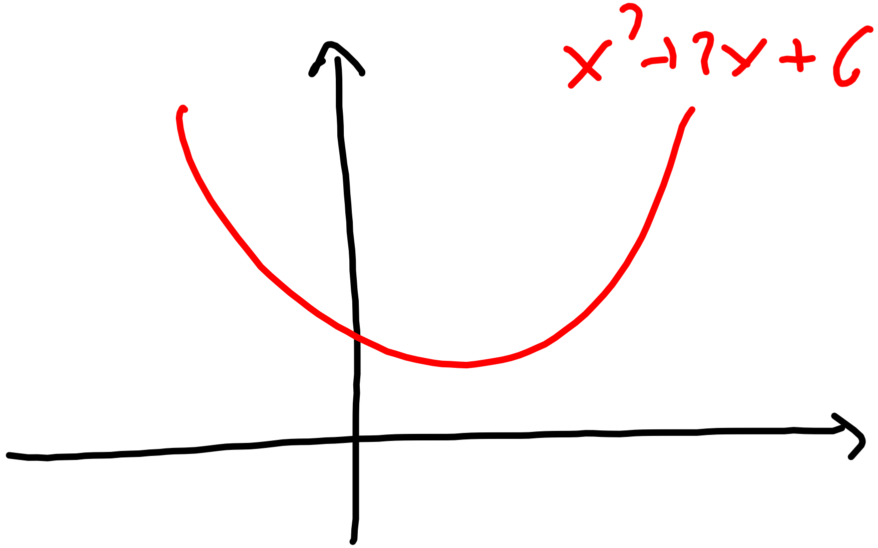
A_2 $\quad x^2 + 2x + 6 > 0$

$$x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{2}$$

< 0

non ho soluzioni reali

quindi A_2 vale $\forall x \in \mathbb{R}$



$A_1 \cap A_2$

$(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \cap \mathbb{R}$

$= (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$B \quad |x^2+x+2| > x-4$

$B_1 \quad x^2+\cancel{x}+2 > \cancel{x}-4$ oppure

$B_2 \quad x^2+x+2 < +4-x$

$B = B_1 \cup B_2$

$B_1 \quad x^2+2>-4 \qquad x^2+6>0$

$B_1 = \mathbb{R}, \quad B = B_1 \cup B_2 =$

$= \mathbb{R} \cup B_2 = \mathbb{R}$

set 28-12:43

soluzioni sono

$$A \cap B =$$

$$= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{R} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$