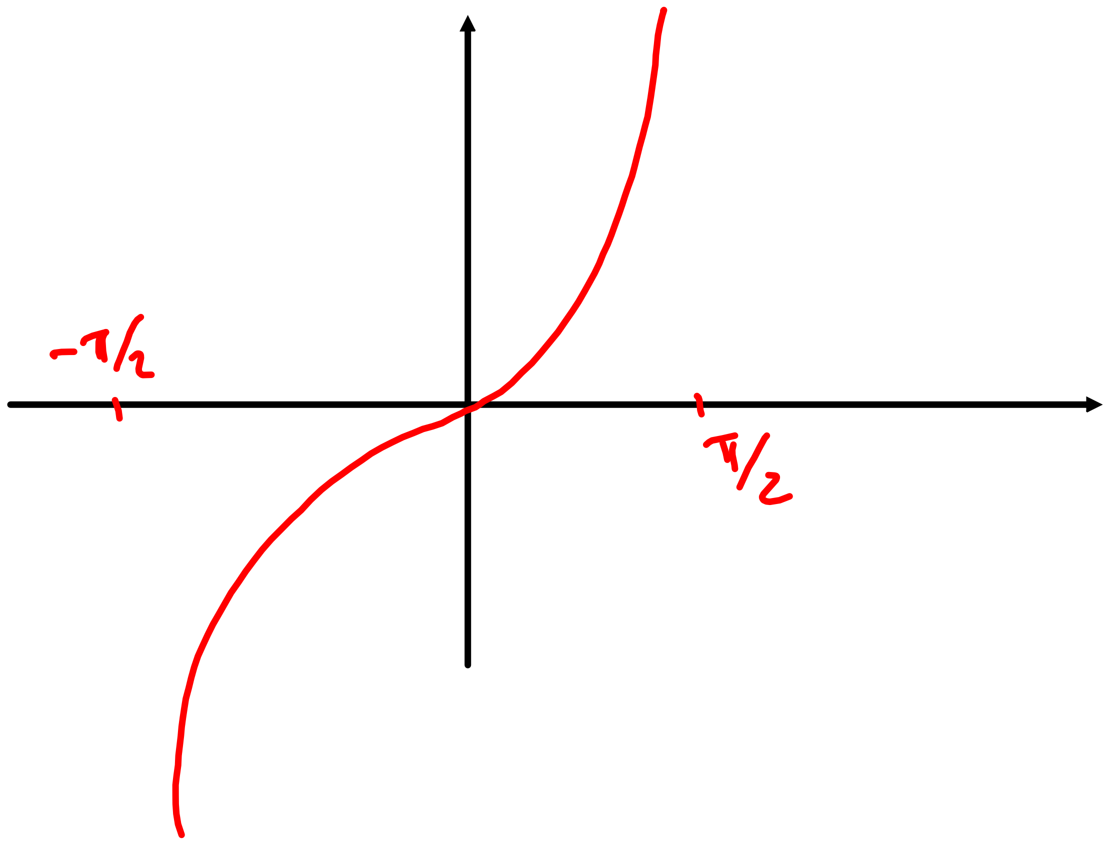
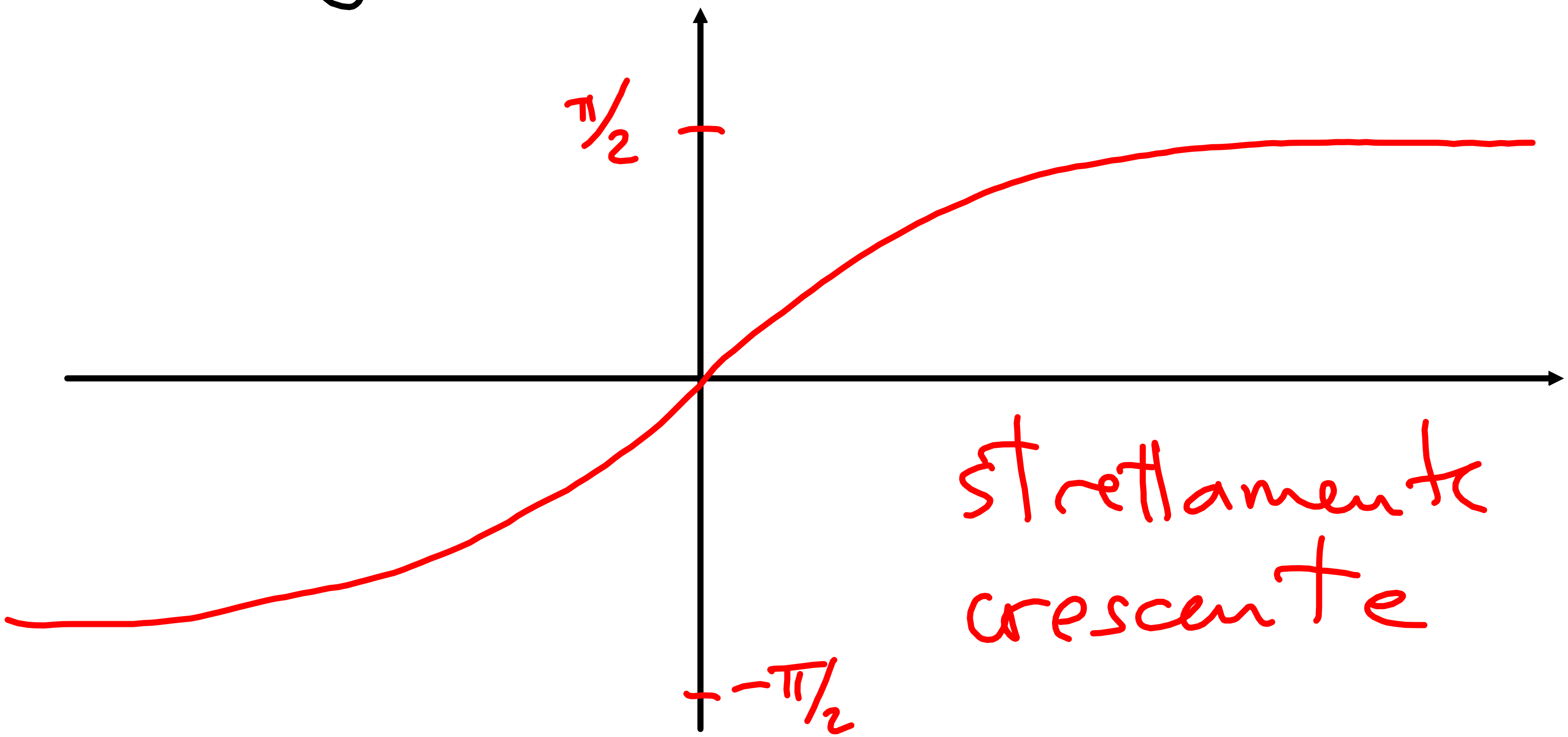
$f : \left(-\pi/2 \, , \, \pi/2\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

è invertibile



set 23-08:35

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



set 23-09:12

Def: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

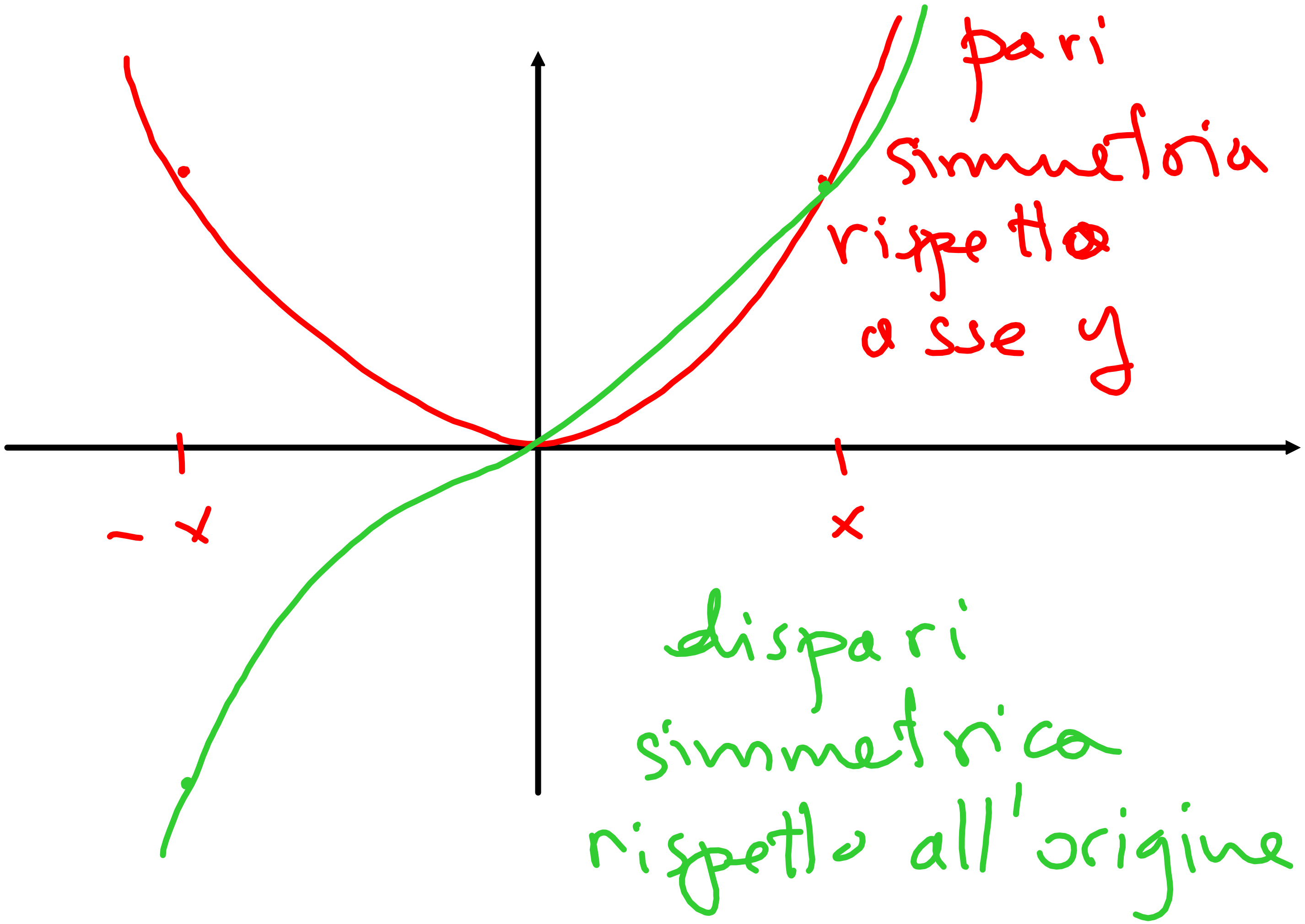
f si dice pari se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si dice dispari

se $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

set 23-09:14


pari
simmetria
rispetto
asse y
$-x$
x
dispari
simmetrica
rispetto all'origine

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$$

$$ \, \| $$

f è pari $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(x)$

set 23-09:18

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -1 \cdot x^3$$

$$= -x^3 = -f(x)$$

f è dispari

set 23-09:20

Assioma di Dedekind

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$

t.c.

$\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b$

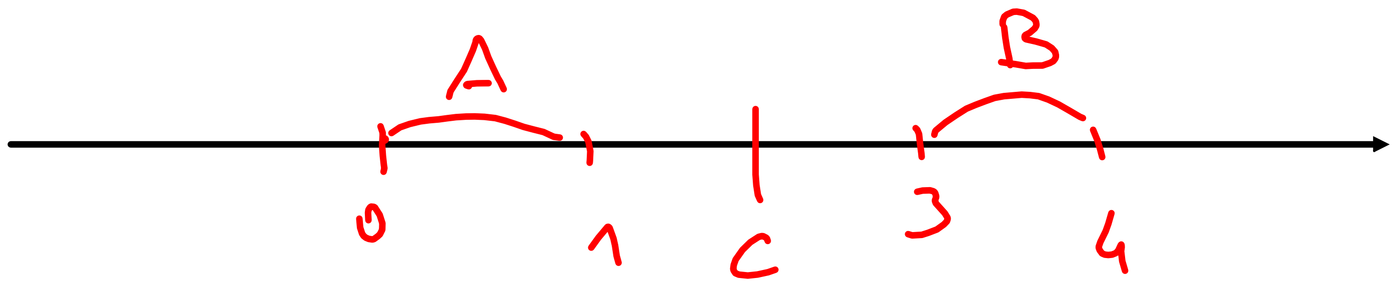
allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b$.

c si dice elemento separatore

Es: $A = [0,1]$

$B = [3,4]$

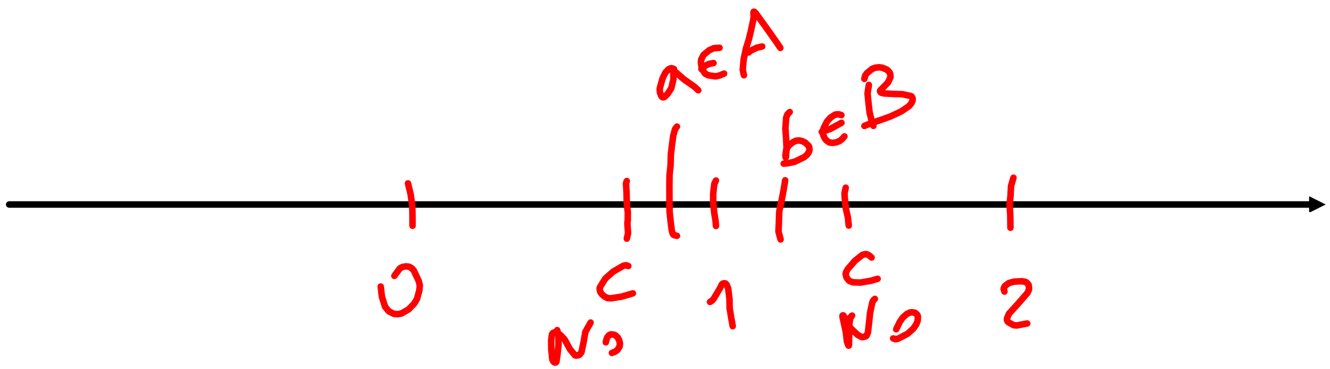


ci sono infiniti elementi separatori.

Es: $A = [0,1]$

$B = (1,2]$

$c = 1$ è l'unico elemento separatore



<u>Es</u>: $A = [0,1]$

$B = [1,2]$

$c = 1$ è l'unico elemento separatore

Oss: In $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di Dedekind.

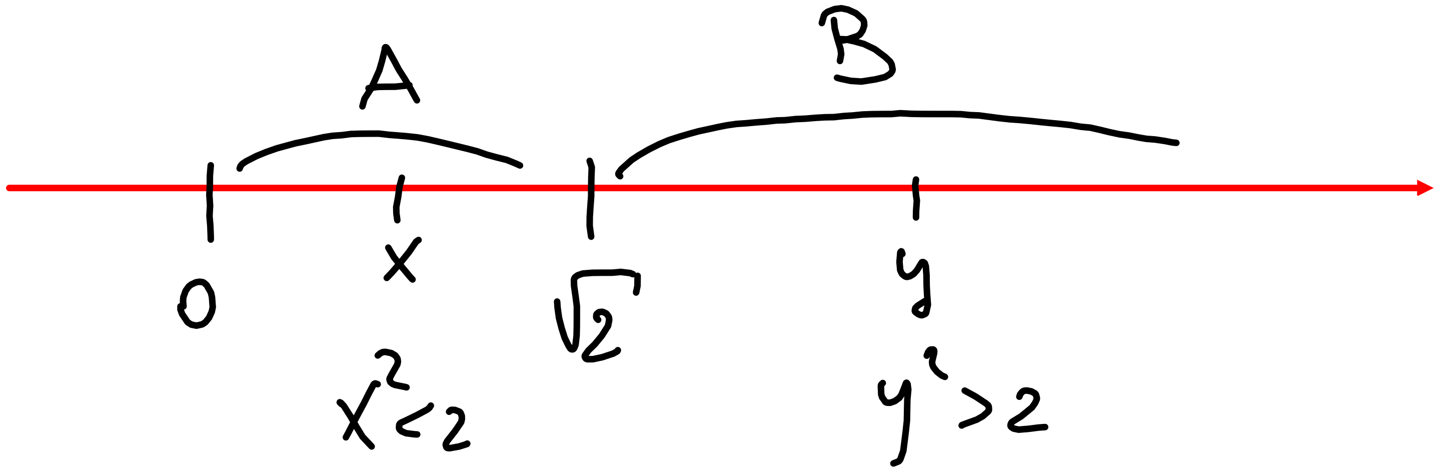
Infatti

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 , x^2 < 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 , x^2 > 2 \}$$

set 23-09:31

$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$



l'unico elemento separatore possibile sarebbe $c = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a \ \forall a \in A$ e $m \in A$.

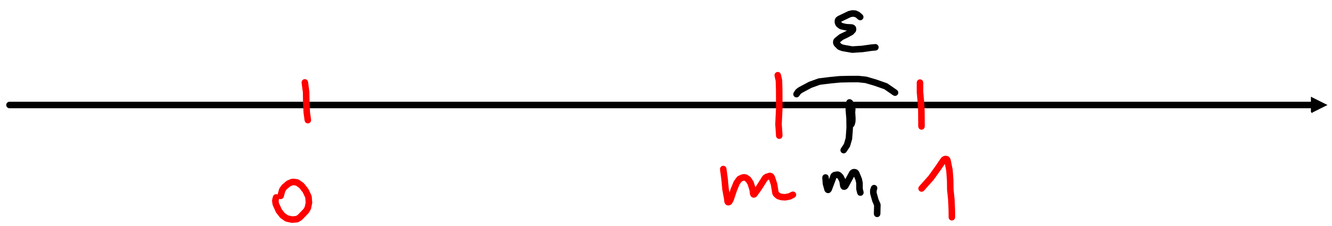
Es: $A = [0,1]$

$\max(A) = 1$

set 23-09:37

$B = [0,1)$

B non ha massimo perché



se m fosse il massimo di B

$\Rightarrow m \in B \Rightarrow m < 1$

poniamo $\varepsilon = 1 - m > 0$

sia $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2} > m$

$m_1 \in B \Rightarrow m$ non è il massimo di B.

$\Rightarrow B$ non ha max.

set 23-09:40

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a \ \forall a \in A$.

Con $\mathcal{M}_A = \{\text{maggioranti di } A\}$

Es: $A = [0,1]$

$2 \in \mathcal{M}_A$ è un maggiorante

$1 \in \mathcal{M}_A$, $\frac{1}{2} \notin \mathcal{M}_A$

Oss: Se esiste un maggior. ne esistono infiniti.

Infatti se $m \in \mathcal{M}_A$

set 23-09:44

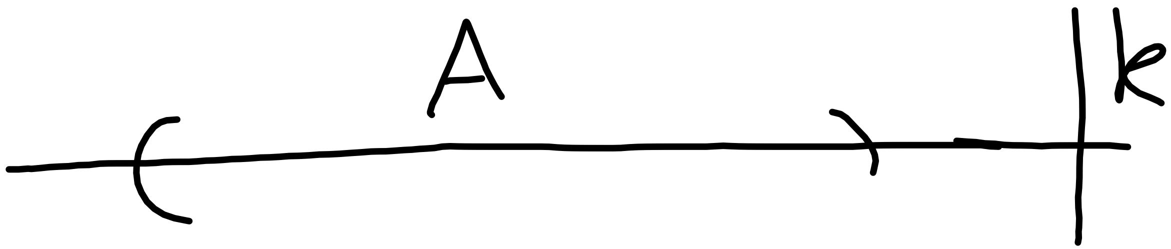
allora ogni $k \geq m$
è ancora un maggiorante.

Es: $A = \mathbb{R}$ non ha maggioranti

$A = [3, +\infty)$ non ha maggioranti

$A = \mathbb{N}$ non ha maggioranti

Def: Se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ l'insieme A si dice limitato superiormente.



Oss: Il massimo di A se esiste è unico.

dim: se $\exists$ m_1 e m_2 max di A $\Rightarrow$ $m_1 \leq m_2$ ma anche $m_2 \leq m_1$ $\Rightarrow$ $m_1 = m_2$.

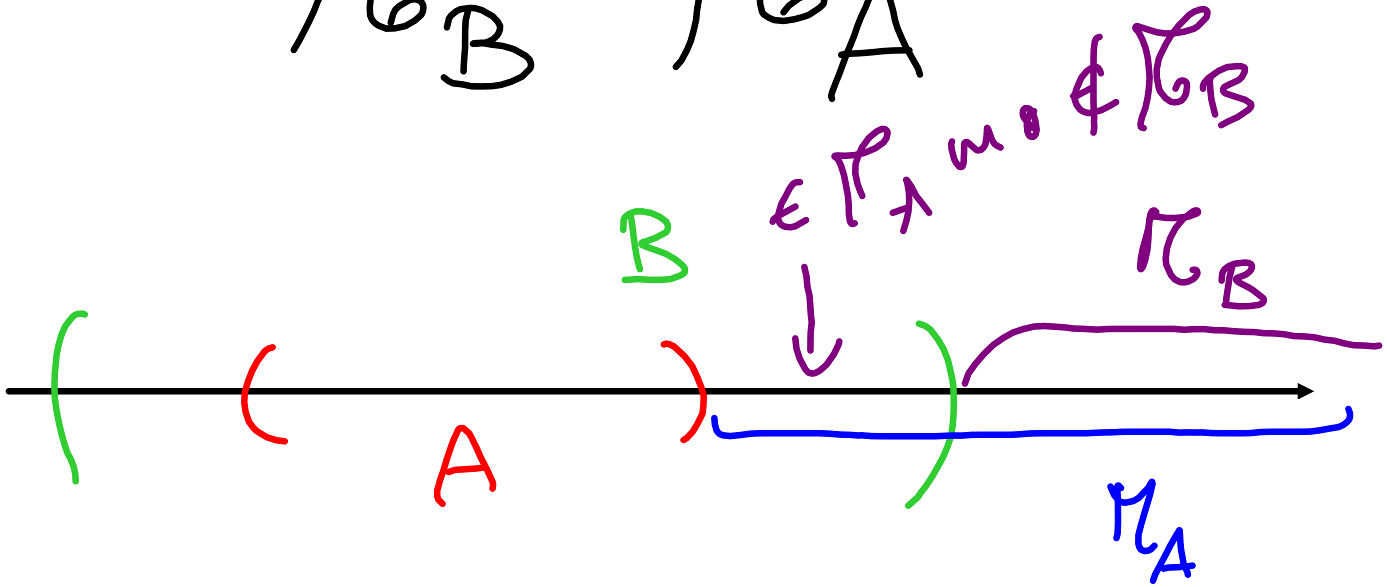
$\square$

set 23-09:50

Oss: $A, B \neq \emptyset$

$A \subset B$

$\Rightarrow \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}_A$



set 23-09:53

Definizioni analoghe per minoranti e minimo di un insieme e insiemi inferiormente limitati.

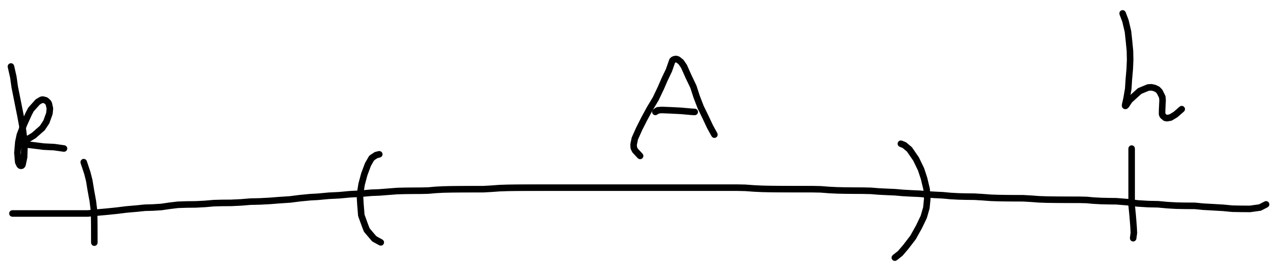
set 23-09:55

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
se A è sia superiormente
che inferiormente
limitato $\Rightarrow$ A si dice
limitato.

set 23-09:57

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, k, h \in \mathbb{R}$ t.c.

$$k \le a \le h \quad \forall a \in A.$$



<u>Teorema</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

A superiormente limitato.

Allora esiste il minimo di $\mathcal{M}_A$.

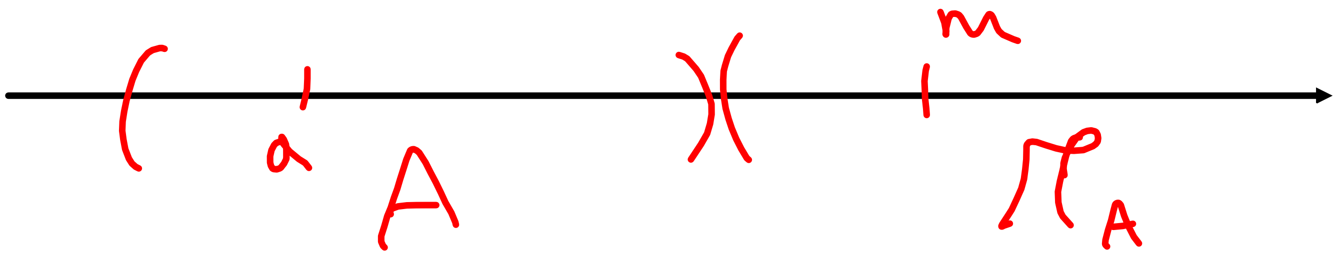
set 23-09:59

dim: $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ perché

A è limitato superiormente

Risulta che

$$\forall a \in A, \ \forall m \in \mathcal{M}_A \Rightarrow a \le m$$



per l'assioma di Dedekind

$\exists\ c \in \mathbb{R}$ elemento separatore cioè

$$\underbrace{a \leq c}_{\Downarrow} \underbrace{\leq m}_{} \quad \forall a \in A \quad \forall m \in \mathcal{M}_A$$

$c \in \mathcal{M}_A$

c è il minimo di $\mathcal{M}_A$

c è il minimo di $\mathcal{M}_A$ $\square$

<u>Def</u>: Il minimo dei maggioranti di A si dice estremo superiore di A e si scrive

$$\sup(A).$$

Se A è superiormente limitato $\Rightarrow$ ha un estremo superiore.

Es: $A = [0, 1)$

$M_A = [1, +\infty)$

$\sup(A) = 1$.

set 23-10:06

$$B = [0,1]$$

$$\mathcal{M}_B = [1, +\infty)$$

$$\sup(B) = 1$$

Oss: Se $\exists \max(A)$

$\Rightarrow \max(A) = \sup(A)$.

Def: Se A non è superiormente limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty$

set 23-10:09

Oss: $A \neq \emptyset$ superiorm. limitato. $m = \sup(A)$ se e solo se valgono

1) $a \leq m \quad \forall a \in A$

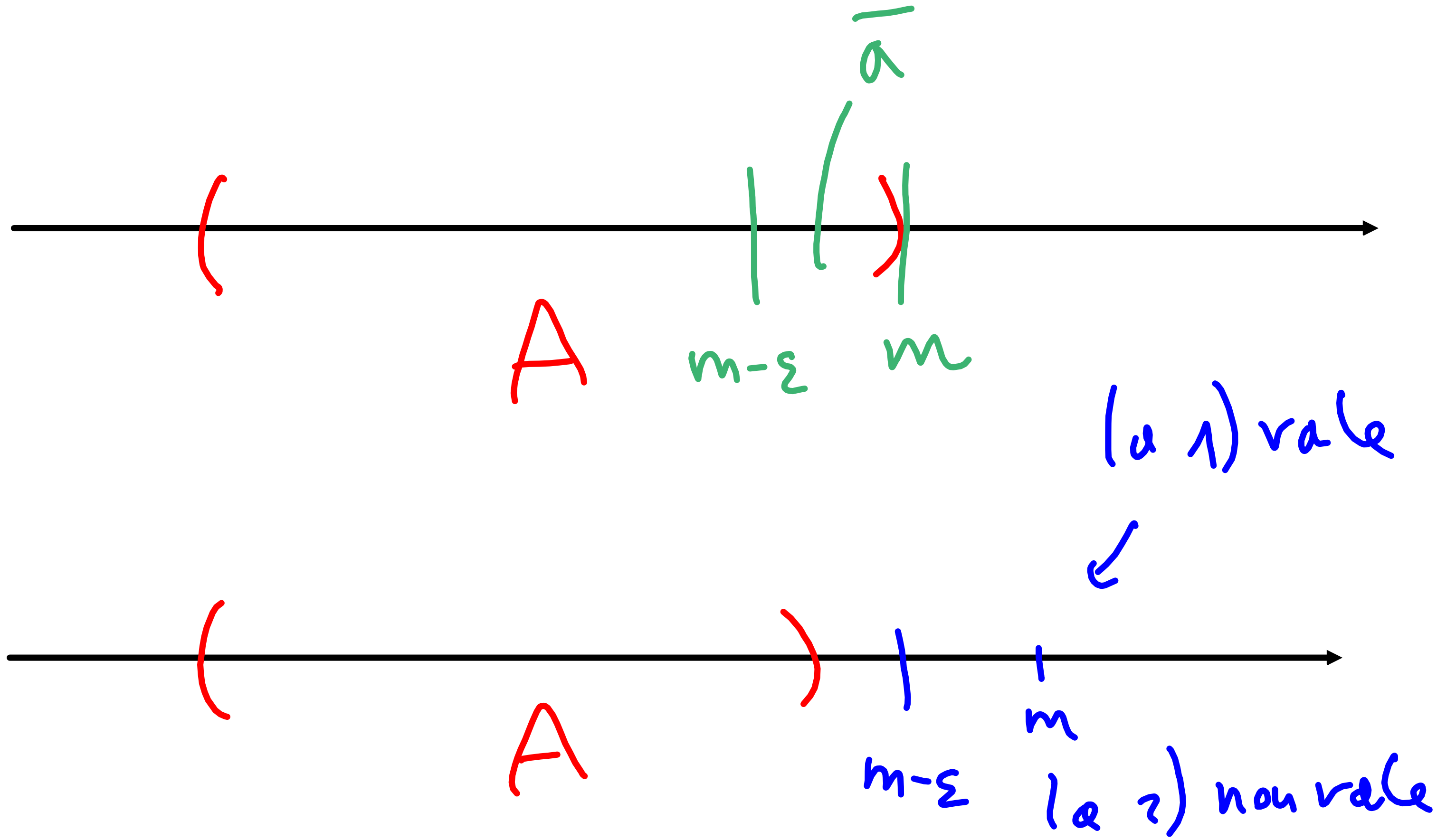
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A$ t.c. $\bar{a} > m - \varepsilon$

set 23-10:12

dim: la condizione 1) dice che m è un maggiorante. La condizione 2) dice che m è il minimo dei maggioranti perché se ne scelgo uno più piccolo $m-\varepsilon$ $\Rightarrow$ non è più un maggiorante

set 23-10:14

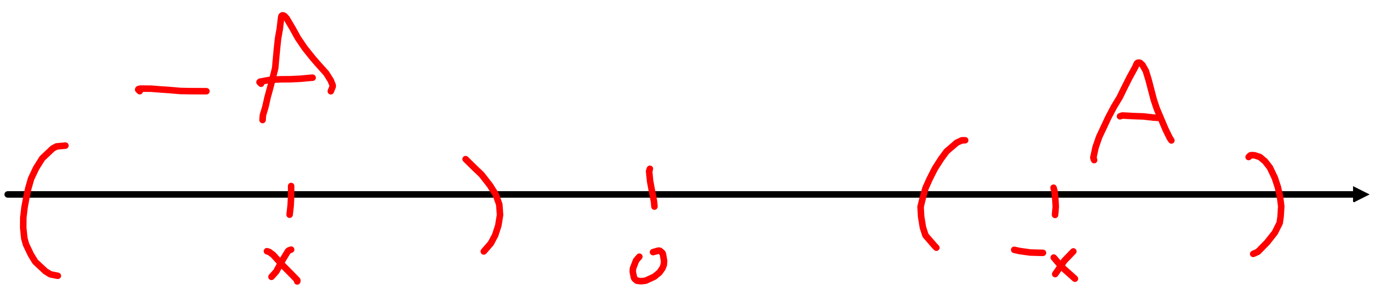
perché $\exists\ \bar{a} > m-\varepsilon\ ,\ \bar{a} \in A$



Def. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

poniamo

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$$

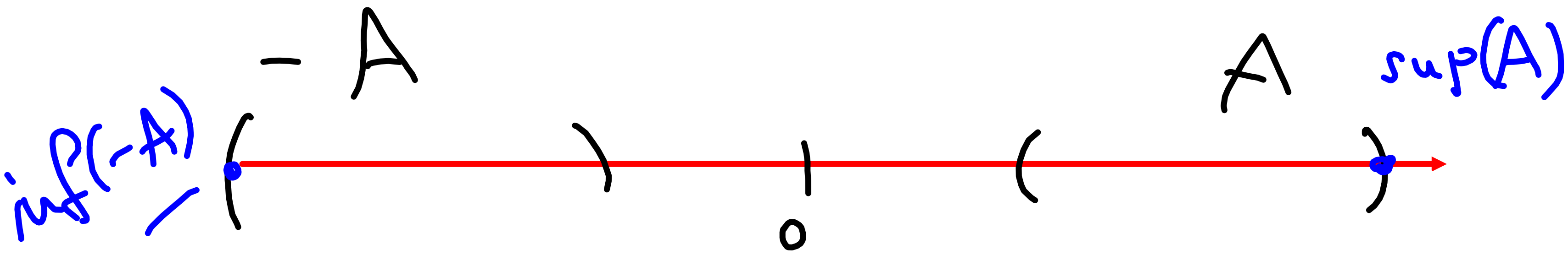


$A = [3,4)$ $\qquad$ $-A = (-4,-3]$

set 23-10:19

Oss: $\sup(A) = -\inf(-A)$

$\inf(A) = -\sup(-A)$



set 23-10:21

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

quindi se $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty$$

Es: La scrittura

$\sup(A) < +\infty$ vuol dire che A è superiorm. limitato.

Operazioni con $\pm\infty$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora

$$x + (-\infty) = -\infty$$

2) Se $x \neq -\infty$ allora

$$x + (+\infty) = +\infty$$

3) Se $x > 0$ allora

$$x \cdot (+\infty) = +\infty$$

e $x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) se $x < 0$ allora

$$x(-\infty) = +\infty$$

$$x(+\infty) = -\infty$$

Operazioni vietate

$$(+\infty)+(-\infty) = ?$$

$$0\cdot(+\infty) = ?$$

$$0\cdot(-\infty) = ?$$

Operazioni valide

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

set 23-10:31

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

set 23-10:32

Es: $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup(A) = ? = 1.$

$A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$

set 23-10:34

dimostriamo che $\sup(A) = 1$.

1) $a \leq 1 \quad \forall a \in A$.

cioè $\frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n \leq n+1 \Rightarrow 0 \leq 1$

vera sempre.

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > 1 - \varepsilon$

set 23-10:37

devo verificare che $\exists\ \bar{a} \in A$

t.c. $\bar{a} > 1-\varepsilon$ cioè

$\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} > 1-\varepsilon$$

risolvo in $\bar{n}$

$$\bar{n} > (1-\varepsilon)(\bar{n}+1)$$

set 23-10:39

$$\bar{n} > (1-\varepsilon)\bar{n} + 1-\varepsilon$$

$$\bar{n}\left[1-(1-\varepsilon)\right] > 1-\varepsilon$$

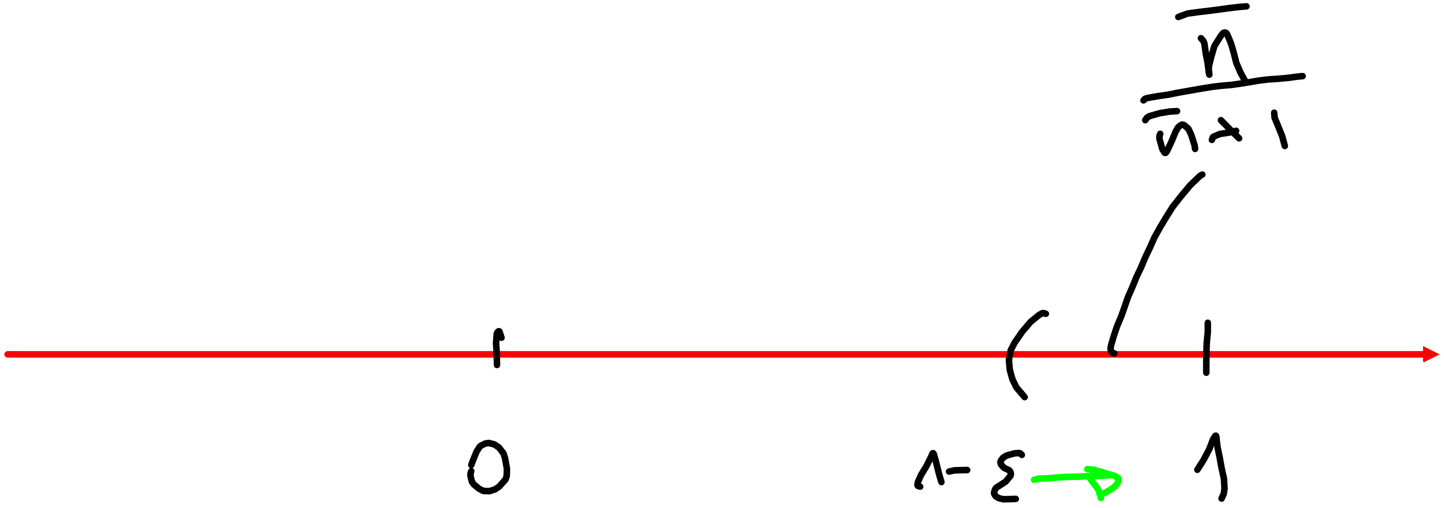
$$\bar{n}\cdot\varepsilon > 1-\varepsilon \Rightarrow \bar{n} > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

esiste sempre un naturale

$$> \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$\square$

set 23-10:41



$$\varepsilon = \frac{1}{10} \qquad \bar{n} > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 9$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100} \qquad \bar{n} > \frac{\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}} = 99$$