Funzioni monotone

Oss: $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$

$a < b < c$. Se f è monotona dello stesso tipo in $[a,b]$ e in $[b,c]$

Allora f è monotona in $[a,c]$

set 22-16:11

dim: prendiamo $x_1, x_2 \in [a,c]$ qualsiasi. $x_1 < x_2$

Se $x_1, x_2 \in [a,b]$ ovvio.

Lo stesso se $x_1, x_2 \in [b,c]$.

Supponiamo $x_1 \in [a, b]$

e $x_2 \in (b, c]$

supponiamo f strettamente crescente sia in $[a, b]$ che in $[b, c]$.

Per la crescenza in $[a, b)$

$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(b)$

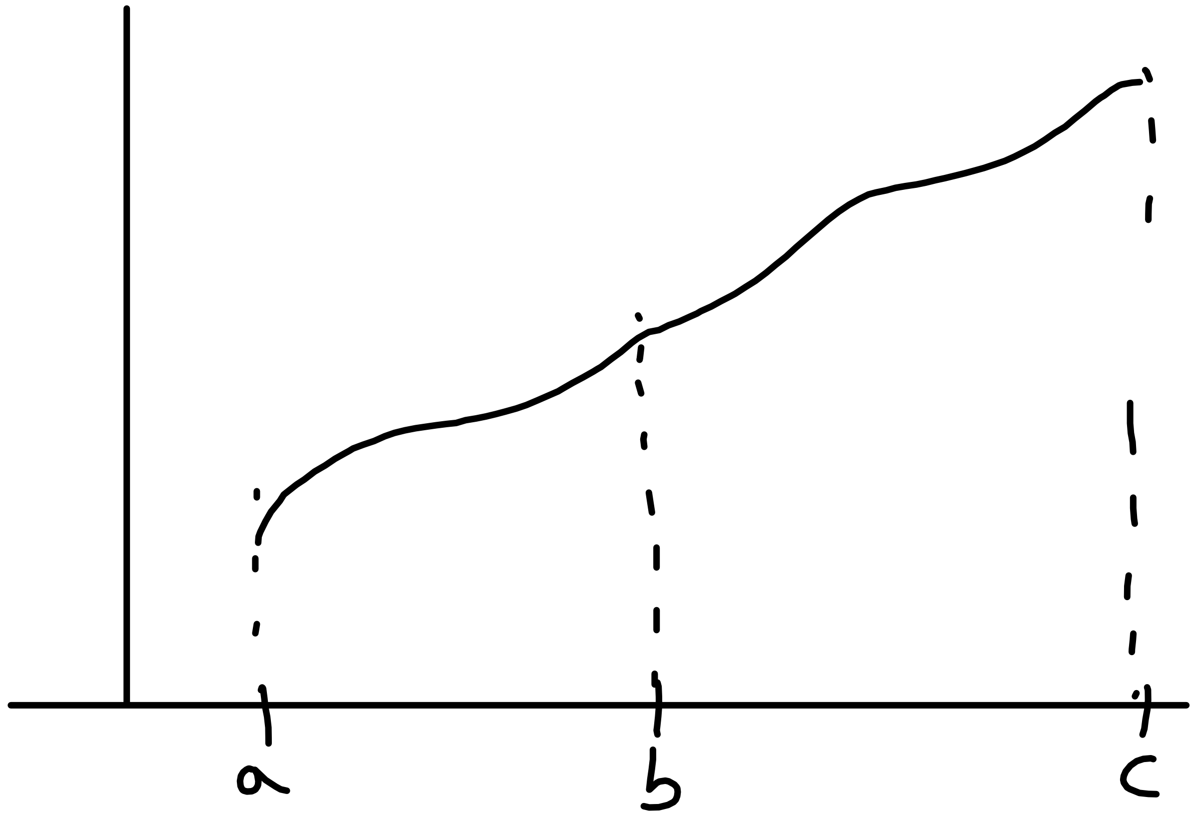
Per la crescenza in $[b, c]$

$\Rightarrow \quad f(b) < f(x_2)$

$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(b) < f(x_2)$

$\square$

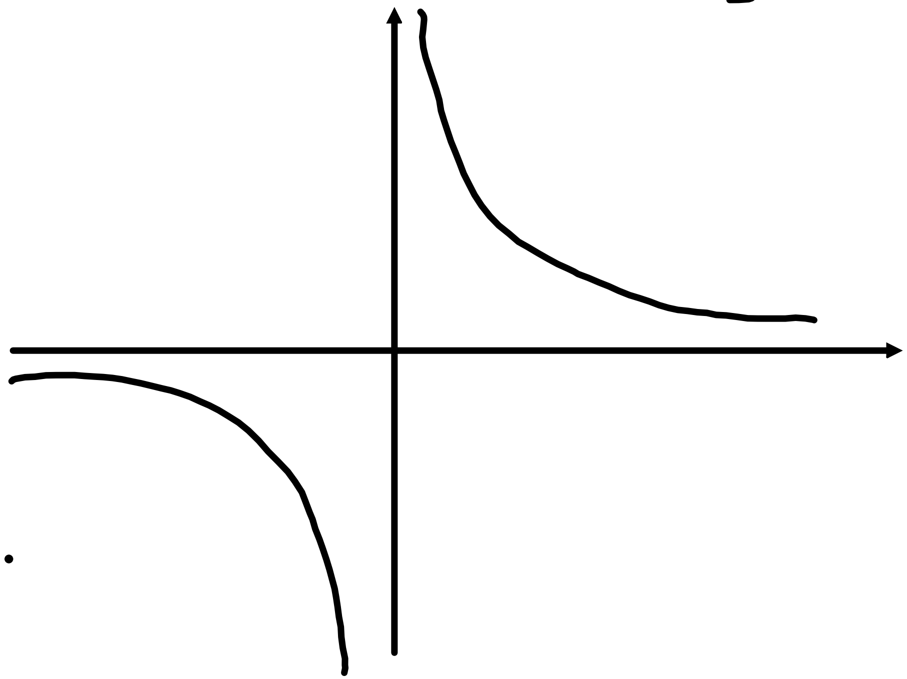
set 22-16:17



Le ipotesi sono tutte necessarie ?

Es: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



f è strett. decresc. in $(-\infty, 0)$

f è strett. decresc. in $(0, +\infty)$

f è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

NO infatti

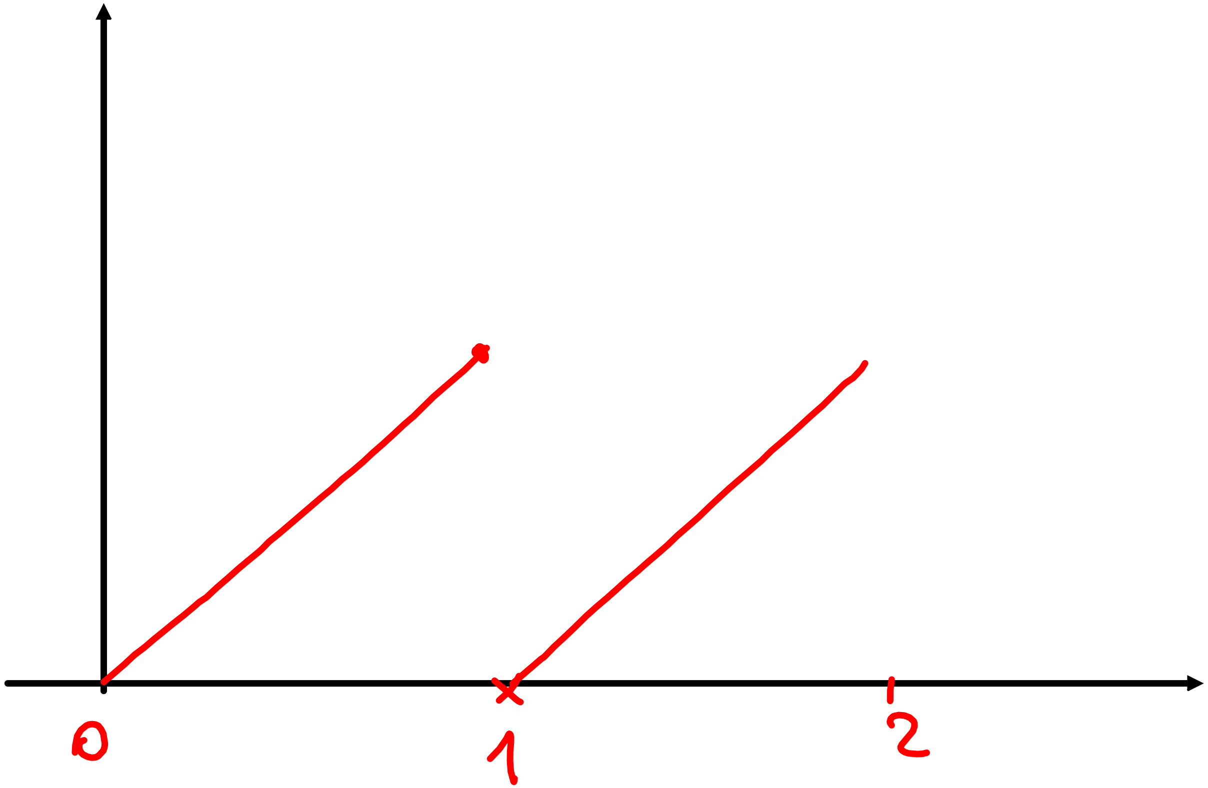
$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3 \qquad x_1 < x_2$

$f(x_1) = \frac{1}{-1} = -1 \qquad f(x_2) = \frac{1}{3}$

$f(x_1) < f(x_2)$

set 22-16:22

Es:



f è strett. crescente in $[0,1]$

f è strett. crescente in $(1,2]$

ma non è strett. crescente

in $[0,2] = [0,1] \cup (1,2]$

ma $[0,1] \cap (1,2] = \emptyset$.

Composizione di funzioni monotone.

<u>Prop</u>: $A, B, C \subset \mathbb{R}$

$f: A \longrightarrow B \qquad g: B \longrightarrow C$

Allora

1) Se f è crescente e g è crescente $\Longrightarrow$ $g \circ f$ è cresc.

set 22-16:28

2) Se f è cresente e g
è decrosente $\Rightarrow$ $g \circ f$ è decr.
(e viceversa)

3) Se f è decresente e
g è decresente $\Rightarrow$ $g \circ f$ è cresc.

dim: 3) $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ applico g

ma g è decresente

$\Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$

$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow g \circ f$ è cresente $\square$

set 22-16:31

Es: $h(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(t) = e^t$

$$h = g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \operatorname{arctg} x \arrow[r, "g"] & e^{\operatorname{arctg} x} \end{tikzcd}$$

f e g sono crescenti

$\Rightarrow$ h è crescente.

Attenzione al dominio

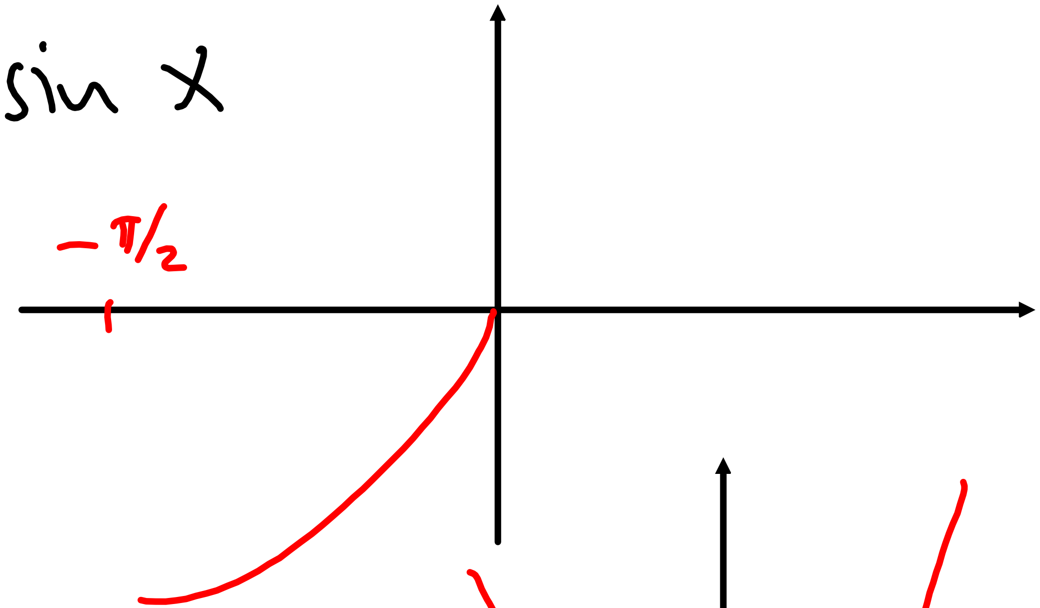
Es: $h(x) = (\sin x)^2$

$h: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

set 22-16:37

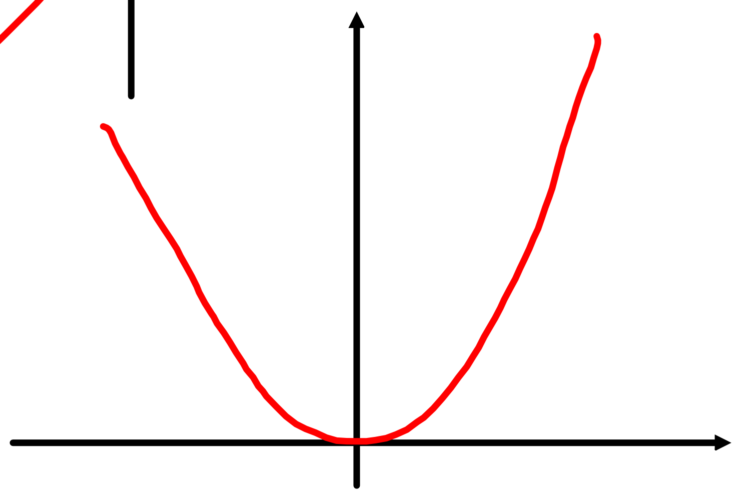
$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x$$



f è crescente

$$g(t) = t^2$$



Se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow$

$\sin x \leq 0$

$g : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$

g è decresente

$\Rightarrow$ h è decresente

set 22-16:41

Oss: Se f è strettamente monotòna allora f è iniettiva.

dim: $x_1, x_2 \in A$

$f : A \to \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$

supponiamo f strett. cresc.

Allora $\forall$ $x_1 \neq x_2$ sarà

$$x_1 < x_2 \quad \text{oppure} \quad x_1 > x_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad\qquad f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

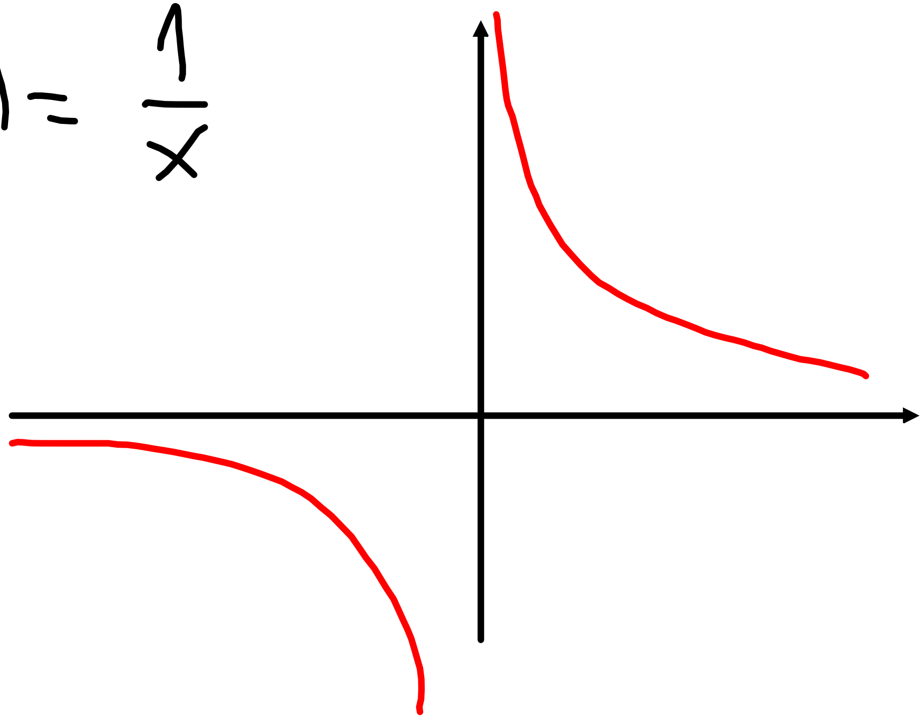
$\Rightarrow f$ è iniettiva $\square$

Il viceversa è vero?

Se f è iniettiva

$\Rightarrow$ f è monotòna? NO

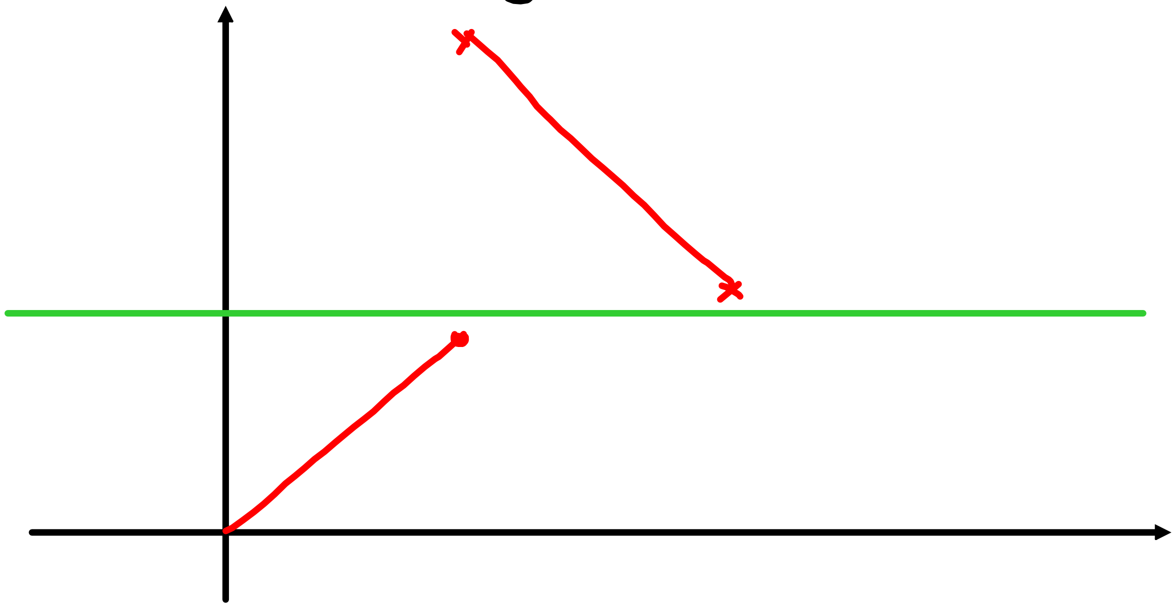
Es: $f(x) = \frac{1}{x}$



è iniettiva
ma non
monotòna

set 22-16:50

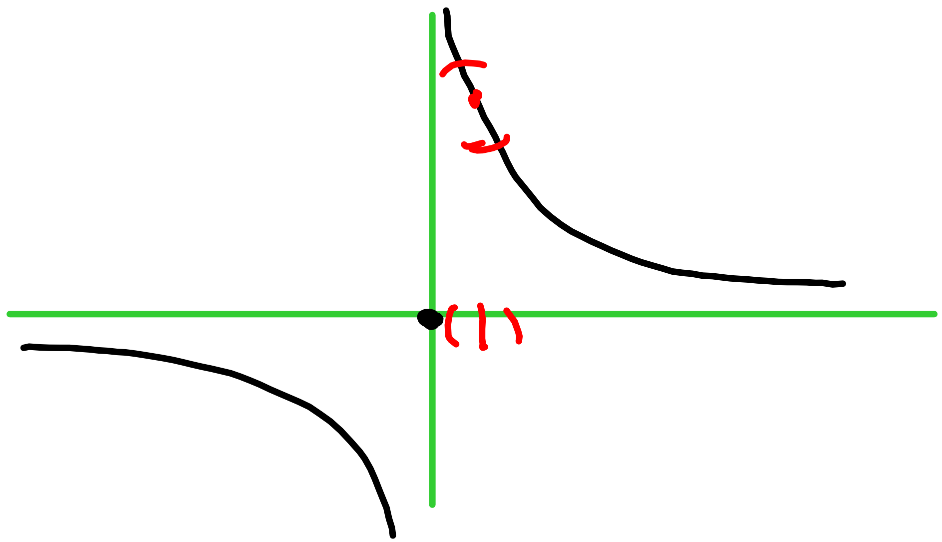
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è discontinua



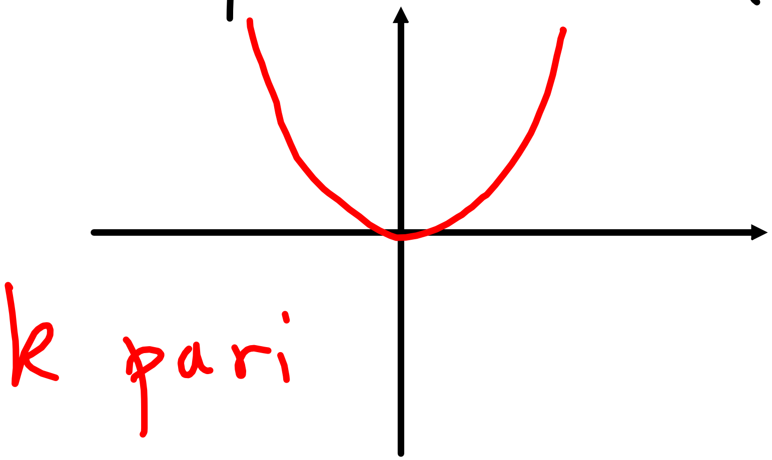
set 22-16:56

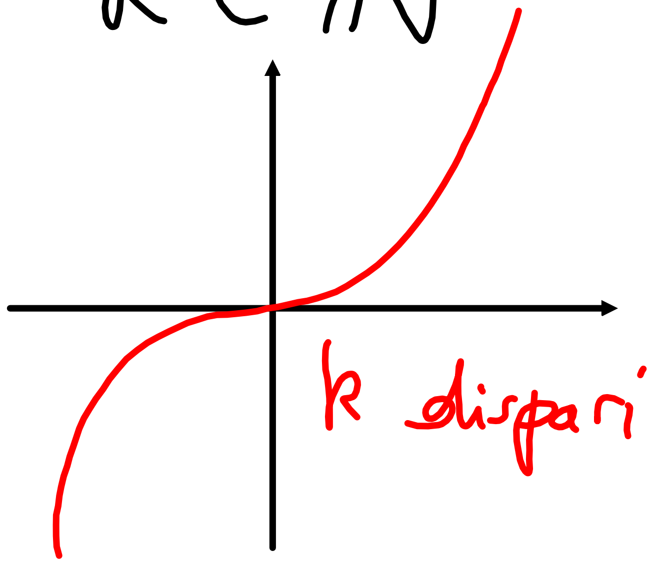
Funzioni elementari

$$f(x) = ax + b \quad , a, b \in \mathbb{R}$$

retta.

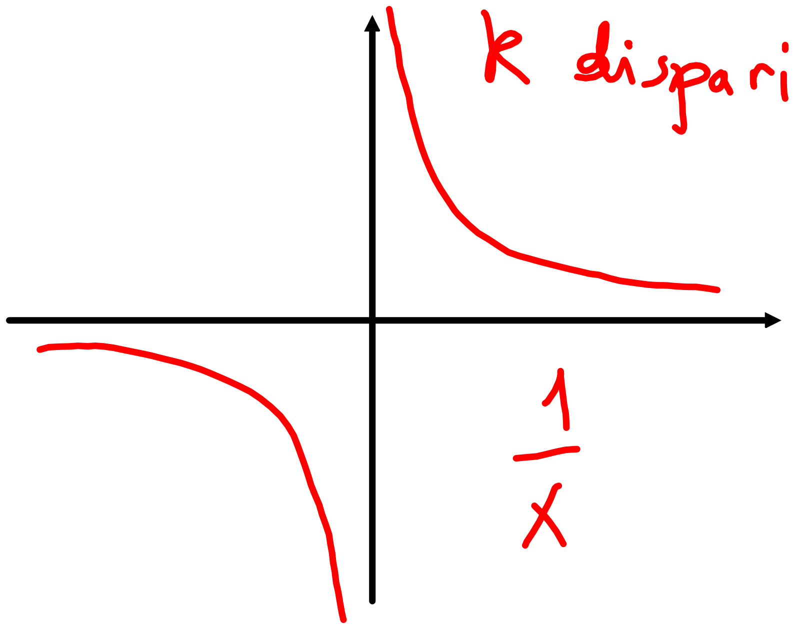
$$f(x) = x^k \qquad k \in \mathbb{N}$$

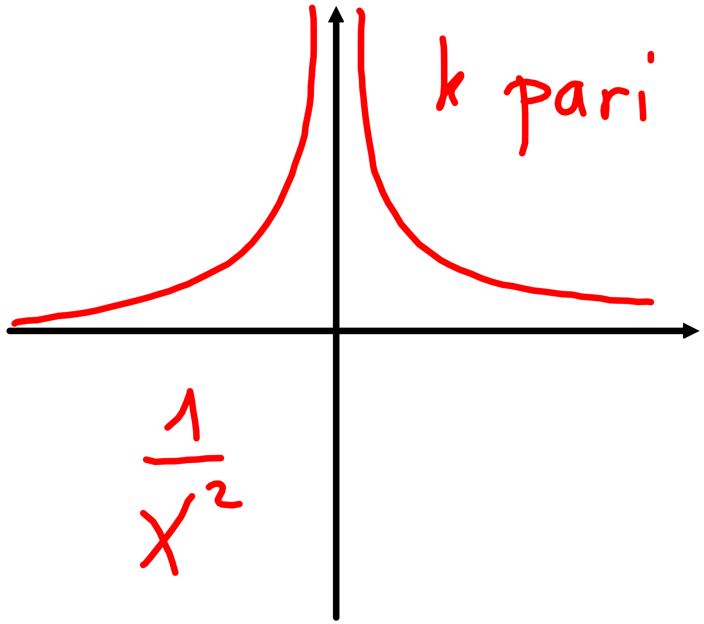




set 22-17:01

$$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{Z},\ k<0$$





$$f(x) = x^{p/q} \qquad p, q \in \mathbb{N} \quad q \neq 0$$

p, q non entrambi pari.

Dominio di f?

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

Se q è dispari

dominio $= \mathbb{R}$

Se q è pari

dominio $= [0, +\infty)$

$$\sqrt{0} = 0$$

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} .$$

$$x^{\pi} \quad , \quad x^{\sqrt{2}} \quad , \ldots$$

$\underline{\text{De}}\,f$: $\quad x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$

$$e^{\alpha \log x} = \left(e^{\log x}\right)^{\alpha}$$

$$= x^{\alpha}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^5$$

$$(x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

set 22-17:11

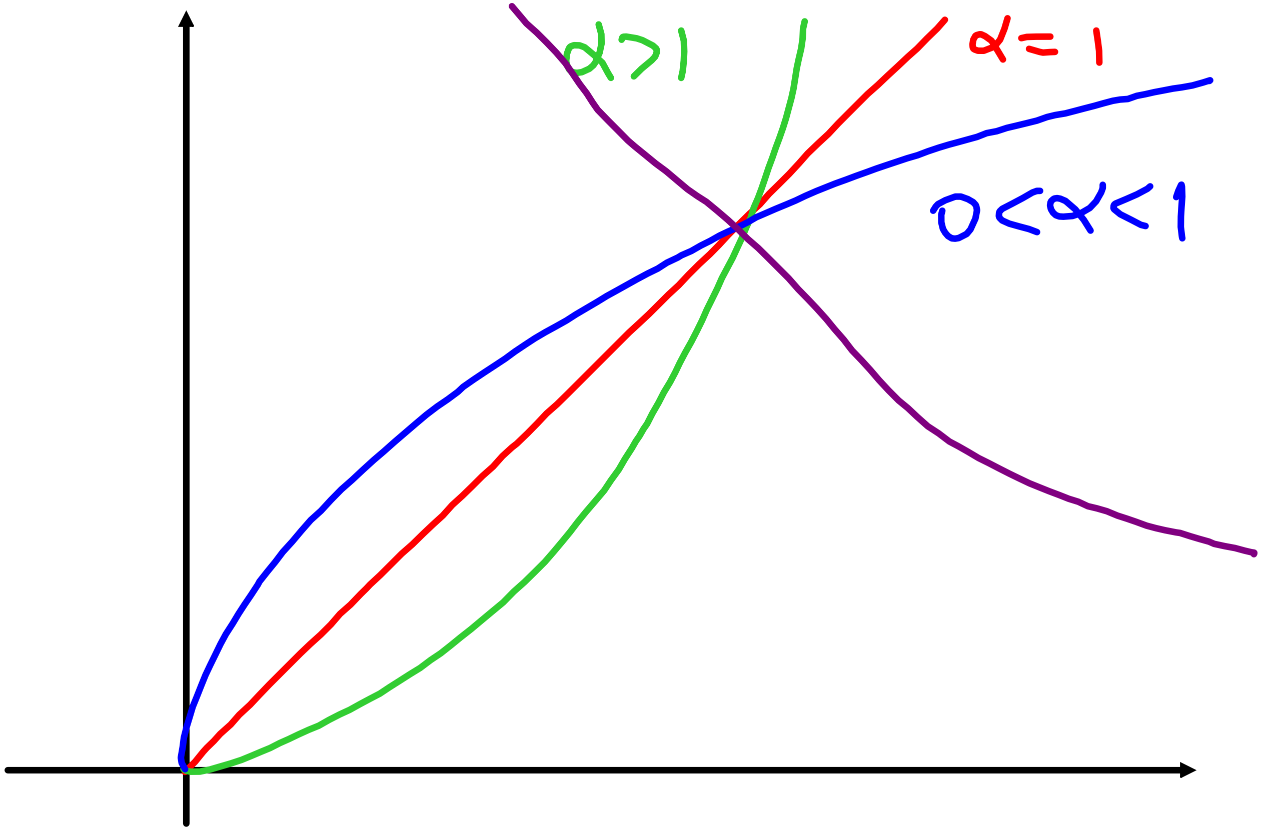
Dominio di x^{α}

se $\alpha \notin \mathbb{Q}$

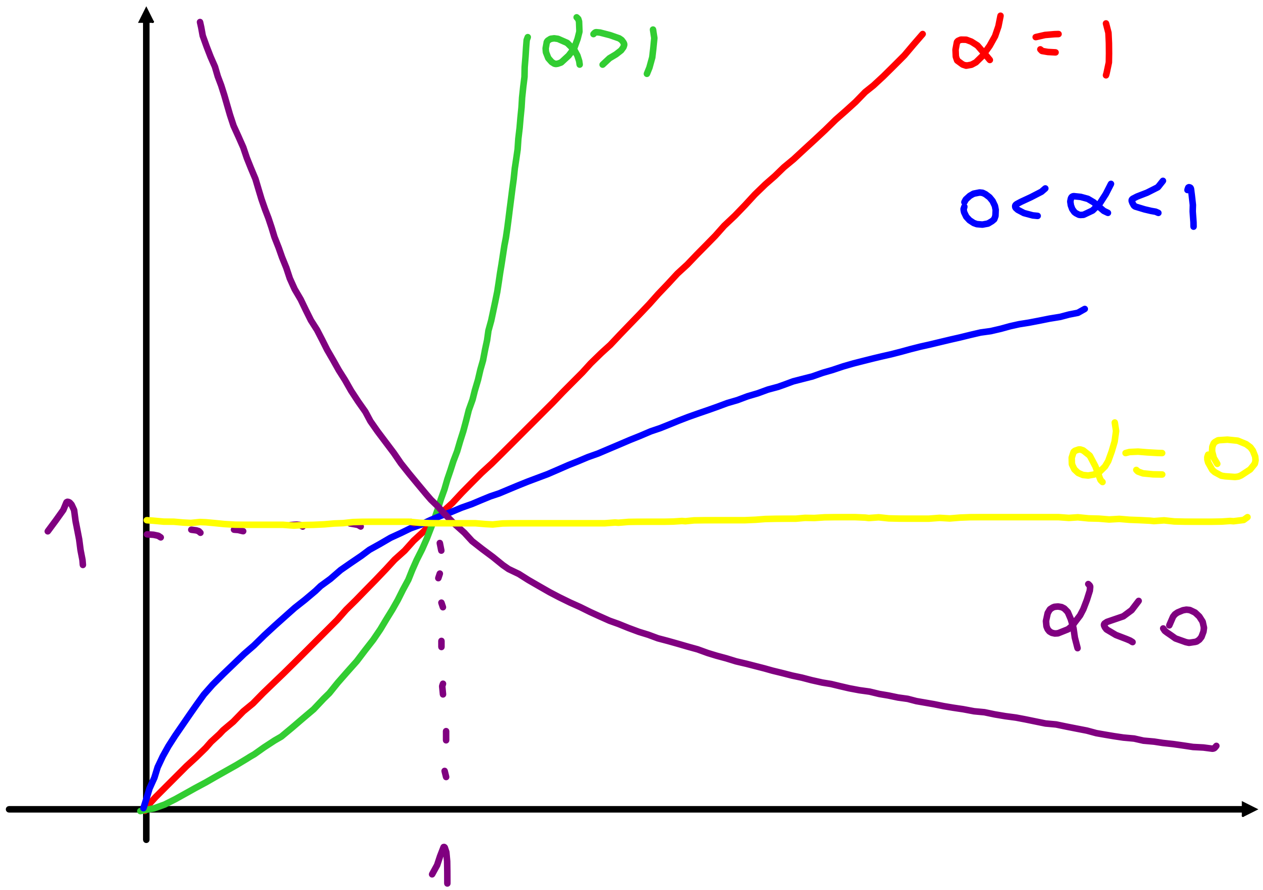
dominio $= (0, +\infty)$

per via del logaritmo

x^{α}



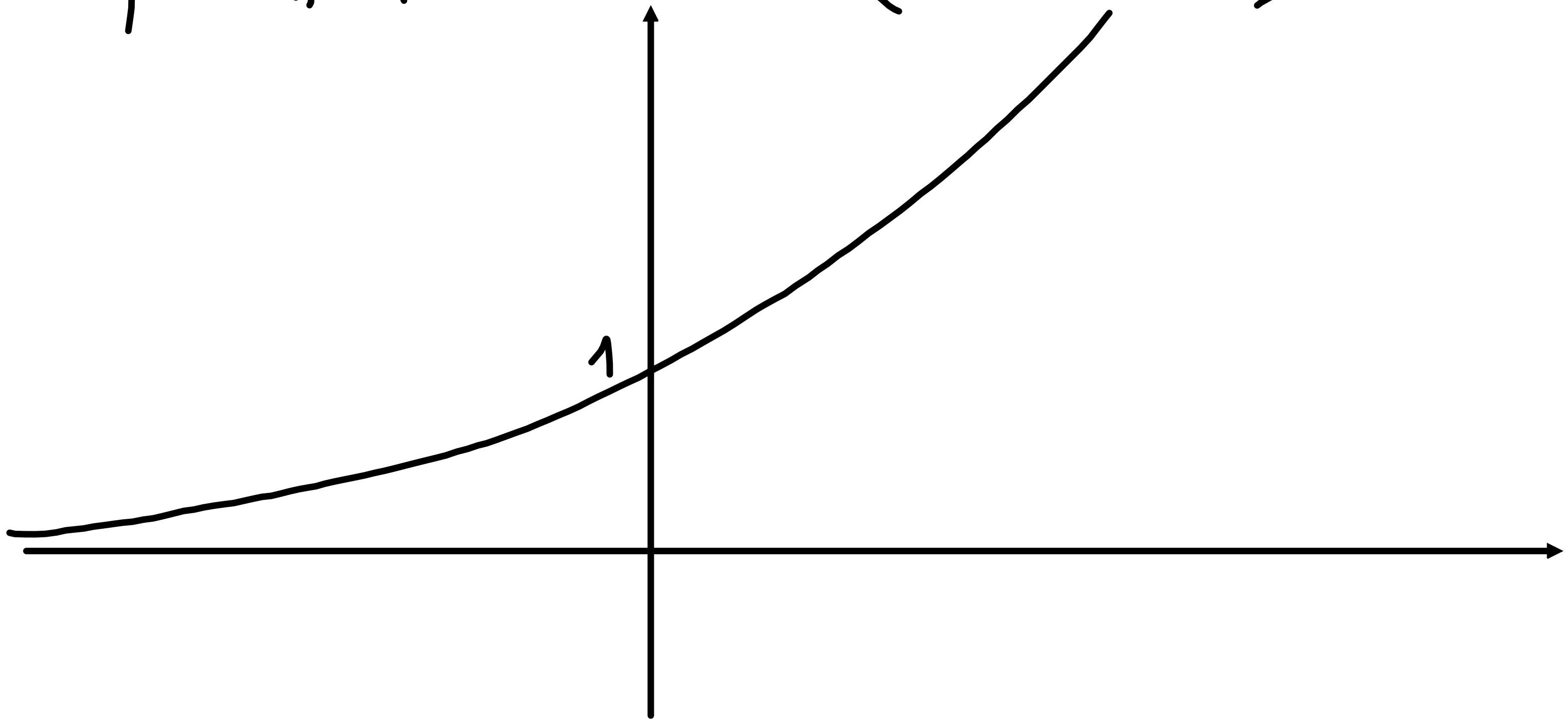
set 22-17:14



set 22-17:16

$$f(x) = e^x$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$

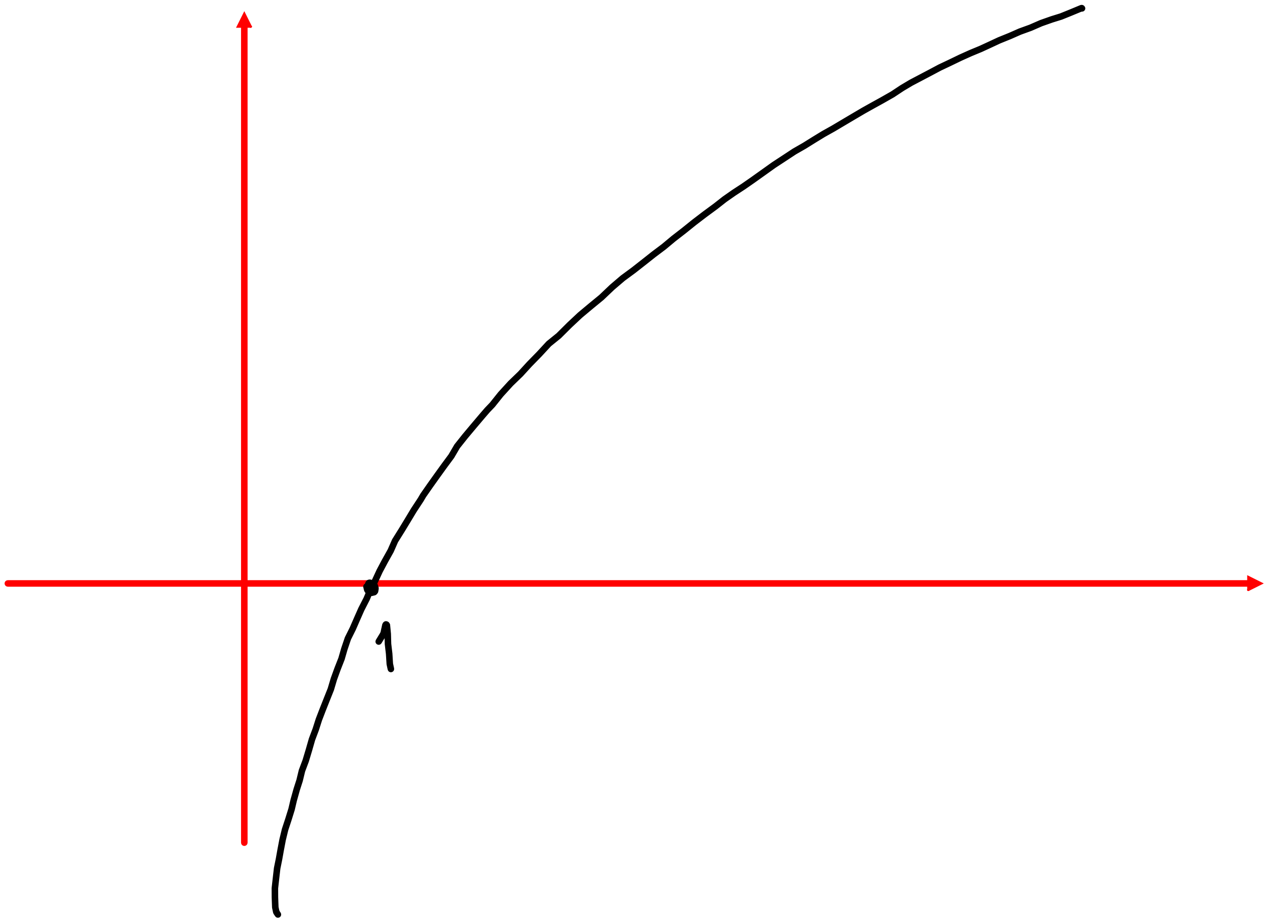


e^x è invertibile

la sua inversa è il

logaritmo (naturale)

$$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$



set 22-17:23

Cambio di base

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

faccio il logaritmo naturale

$$y \log a = \log x$$

$$\log_a x \cdot \log a = \log x$$

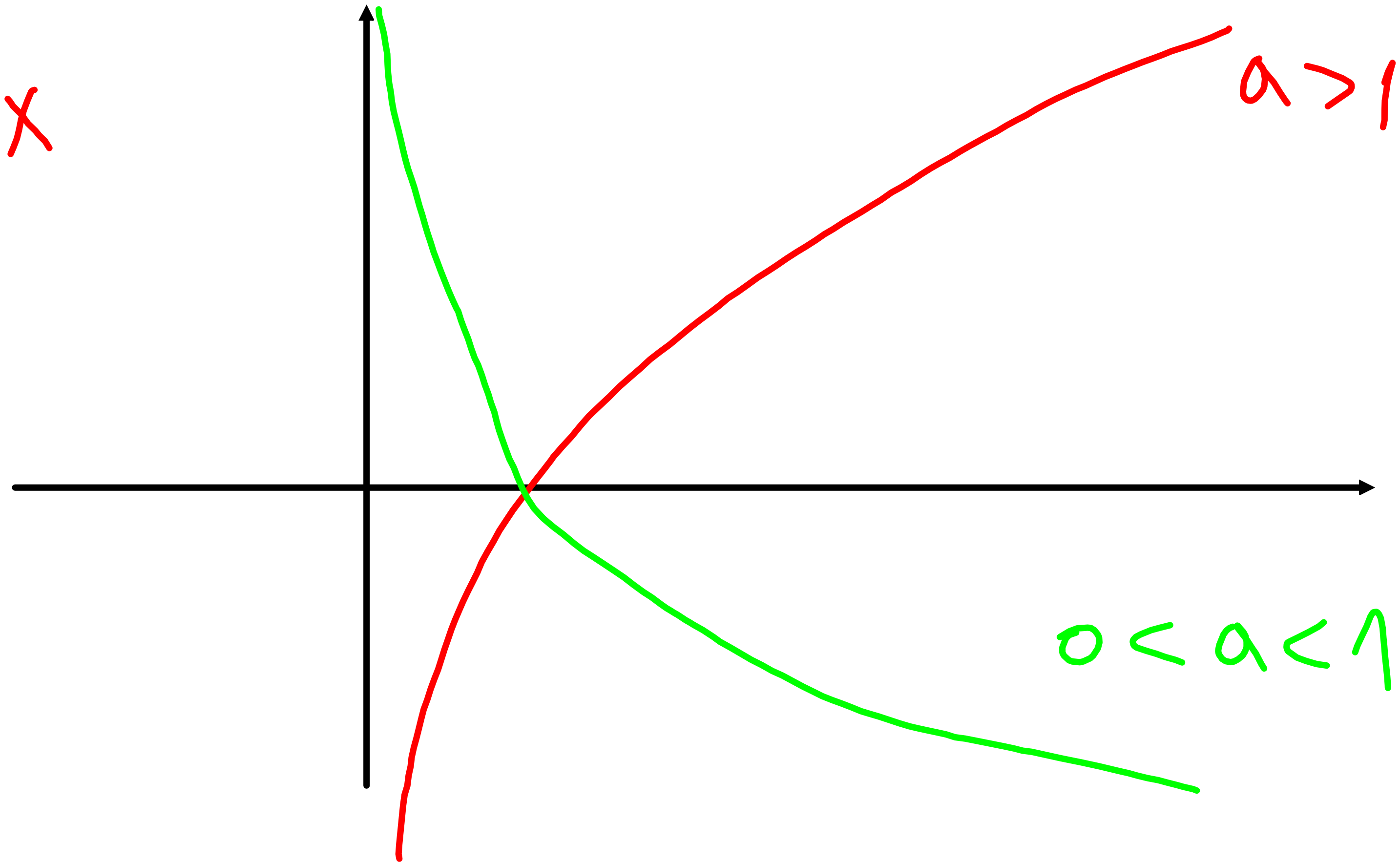
set 22-17:24

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

1) se $a > 1 \Rightarrow \log a > 0$

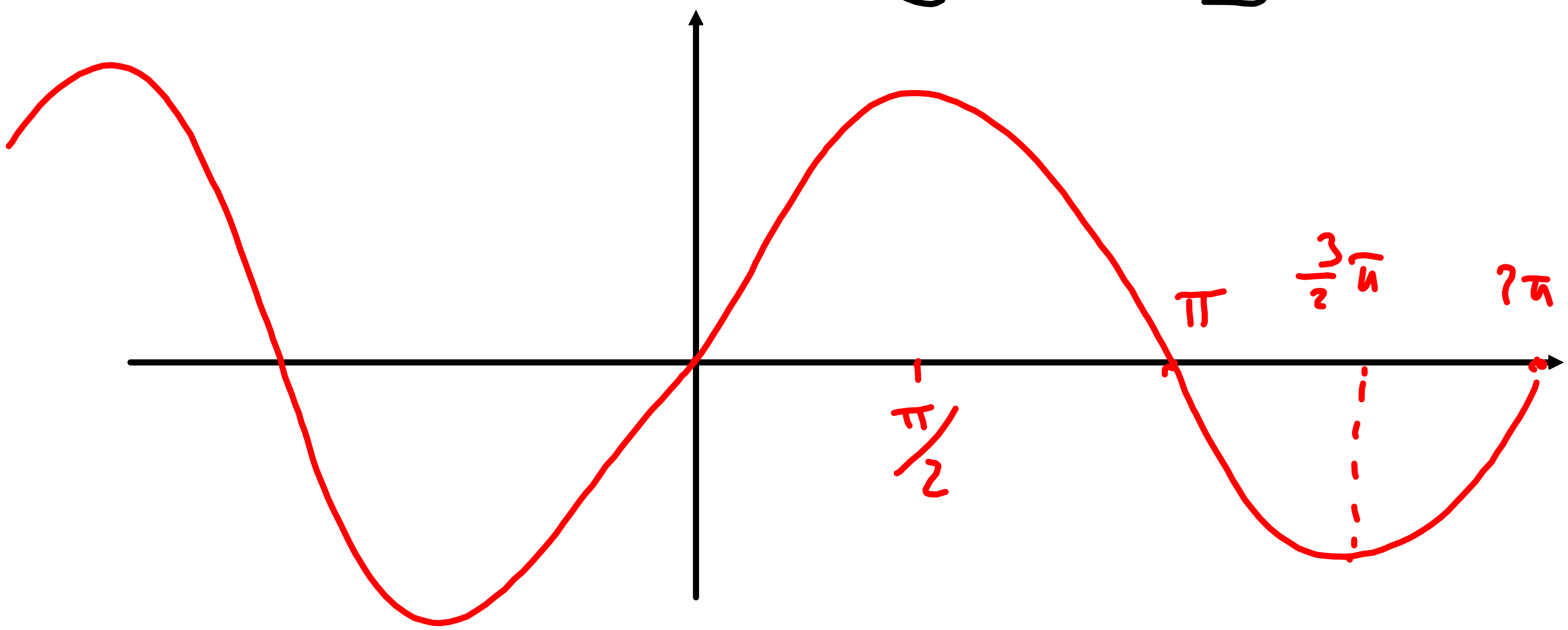
2) se $0 < a < 1 \Rightarrow \log a < 0$

$\log_a x$



$$f(x) = \sin x$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$



set 22-17:29

è periodica di periodo

2π cioè

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x$$

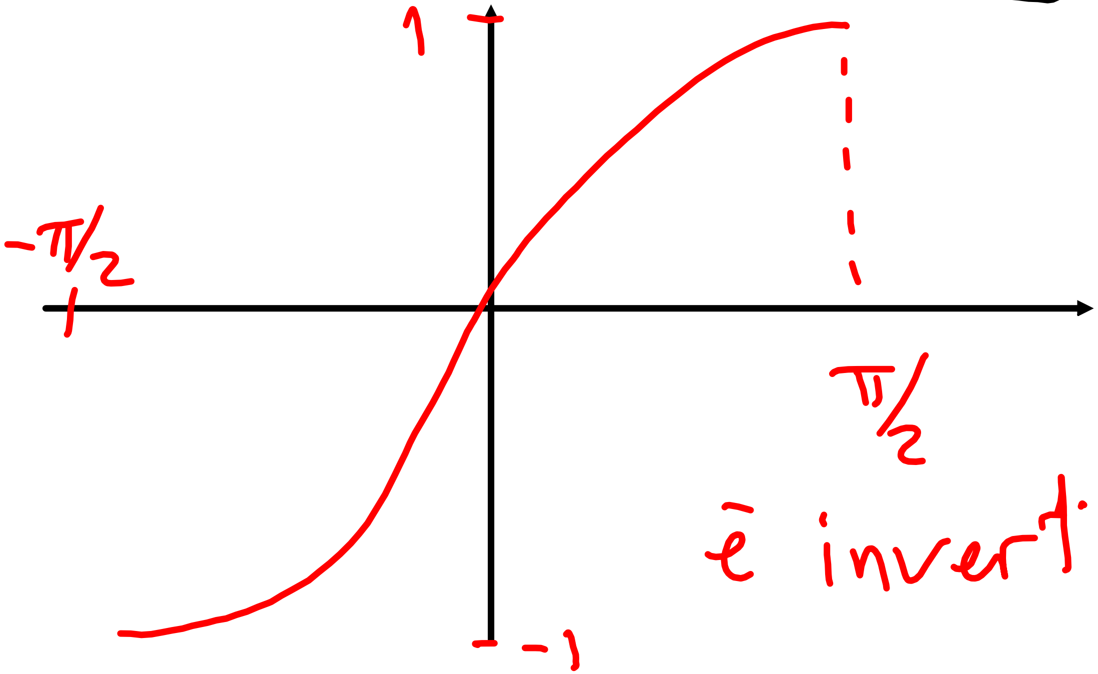
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)$$

è invertibile ?

set 22-17:31

$$f(x) = \sin x$$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$



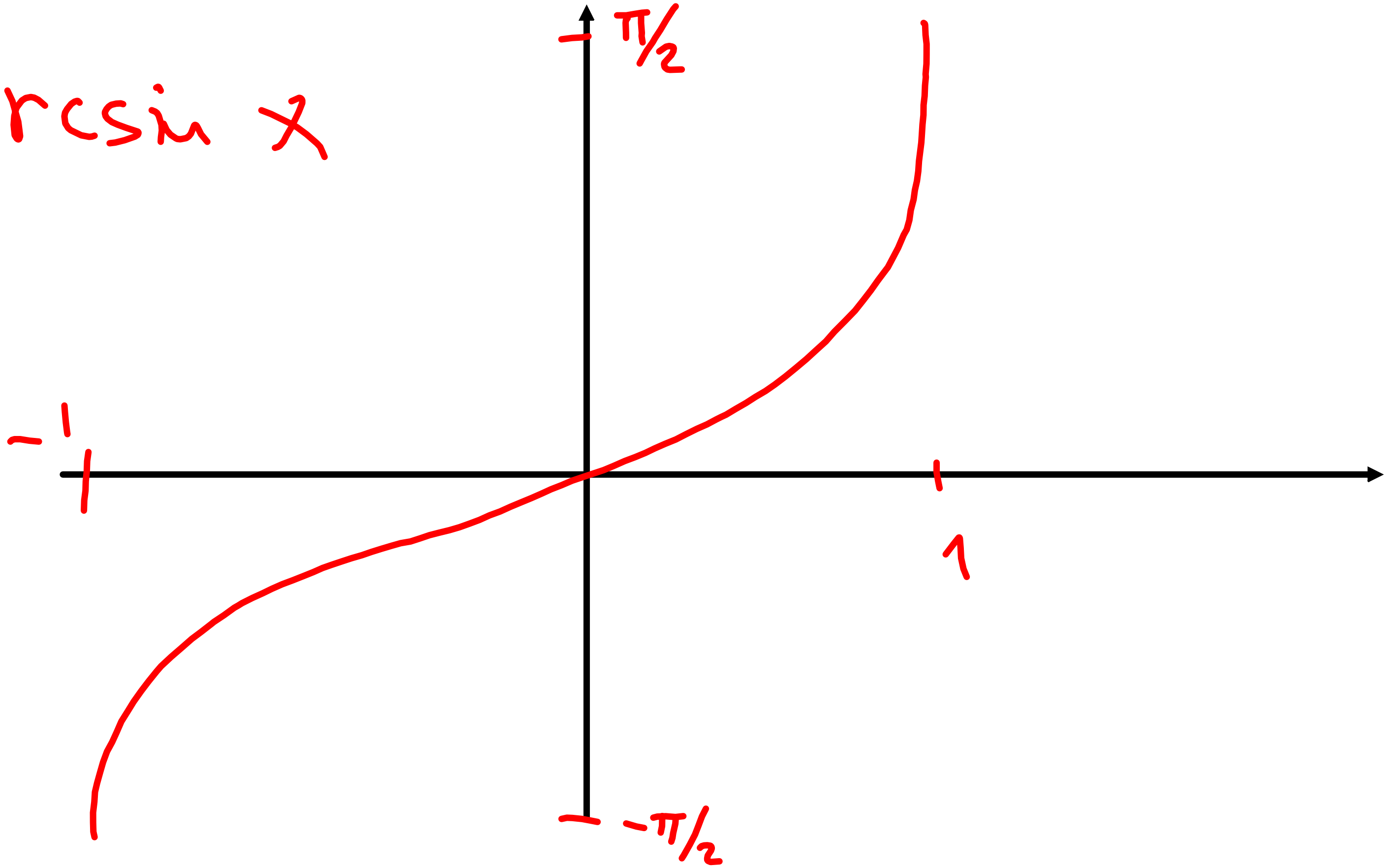
è invertibile

set 22-17:32

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

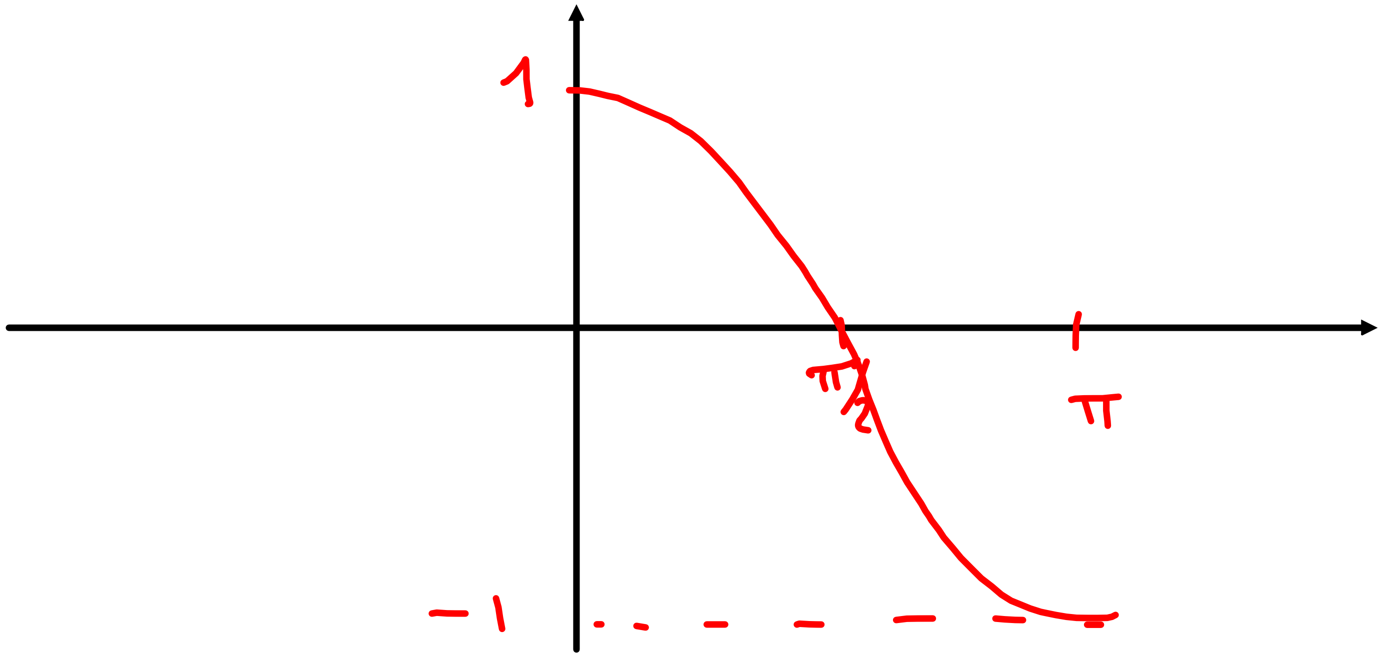
La funzione arcoseno è l'inversa della funzione seno definita da $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a valori in $[-1,1]$

arcsin x



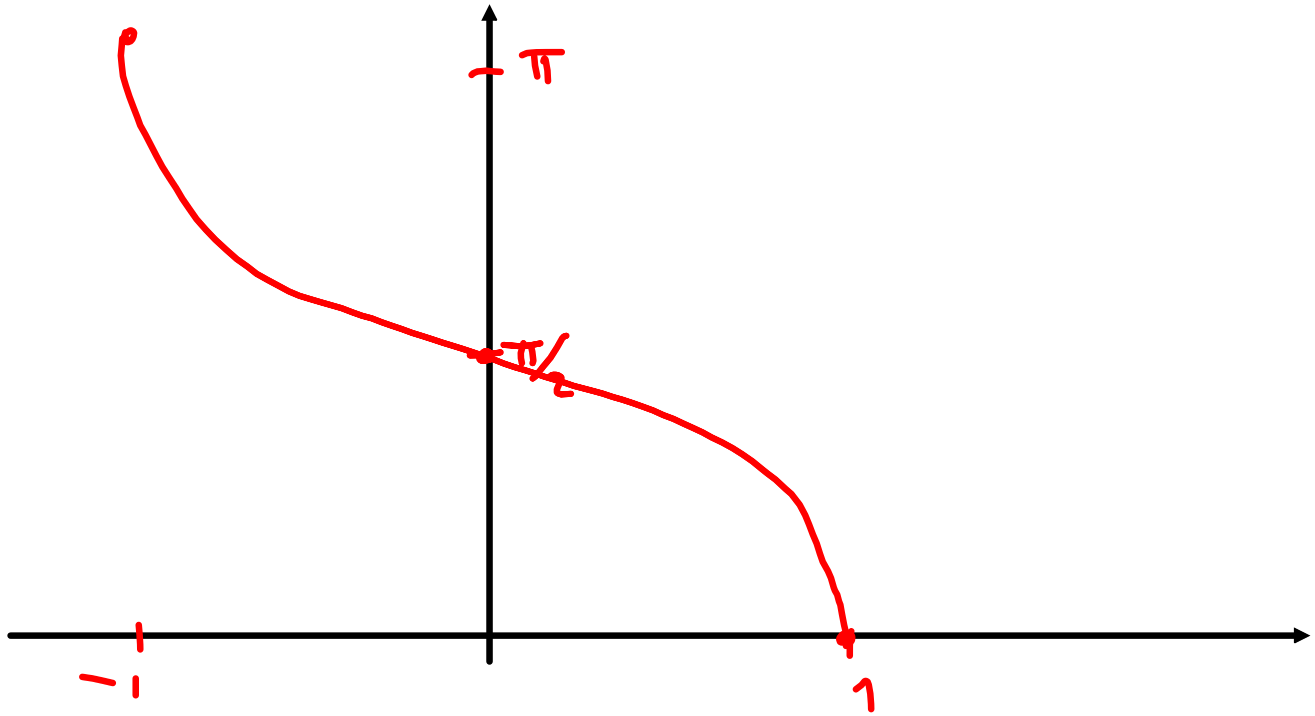
set 22-17:36

$$\cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$



set 22-17:38

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$



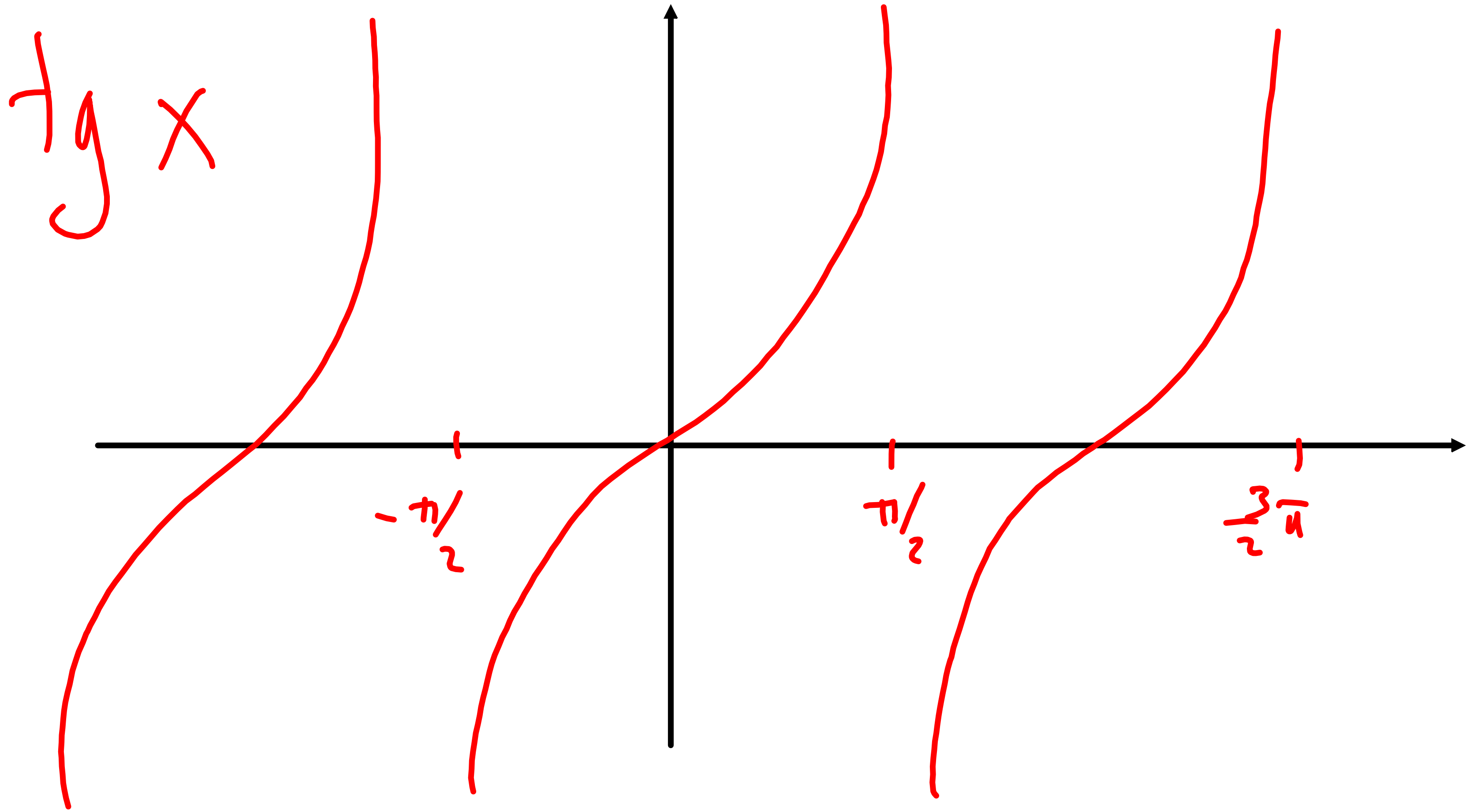
set 22-17:39

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

non è definita se

$\cos x = 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$



set 22-17:43