carlo.romano.grisanti@unipi.it

pagine.dm.unipi.it/grisanti

ricevimento

mercoledì 16:00 - 19:00

e-mail

Acerbi - Buttazzo

Analisi Matematica ABC

Buttazzo - Gambini
Santi
Esercizi di Analisi
Matematica 1.

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ numeri naturali
interi positivi
compreso $\emptyset$

$\mathbb{Z}$ numeri interi
positivi e negativi

$\mathbb{Q}$ razionali

"frazioni"

$\frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}$

$q \neq 0$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$\mathbb{R}$ reali

$\mathbb{Q}$ + molto altro

es. $\sqrt{2}$, π, e ....

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>dim</u>: per assurdo supponiamo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ allora $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

posso supporre
p e q non entrambi
pari

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

quindi p^2 è pari

$\Rightarrow p$ è pari

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c

$$p = 2m$$

$$\Rightarrow p^2 = 4m^2$$

$$p^2 = 2q^2$$

$$p^2 = 4m^2$$

$$\cancel{2}q^2 = \cancel{4}m^2$$

$$q^2 = 2m^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari

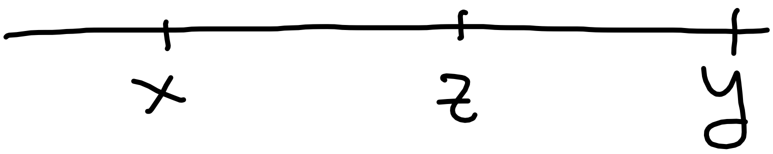
$\Rightarrow q$ è pari

assurdo.

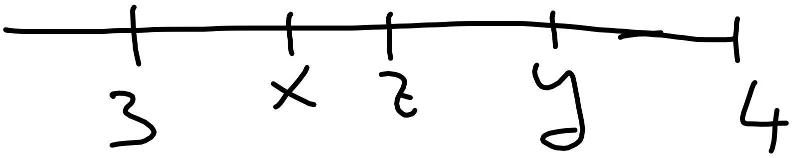
$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$

Intervalli di $\mathbb{R}$

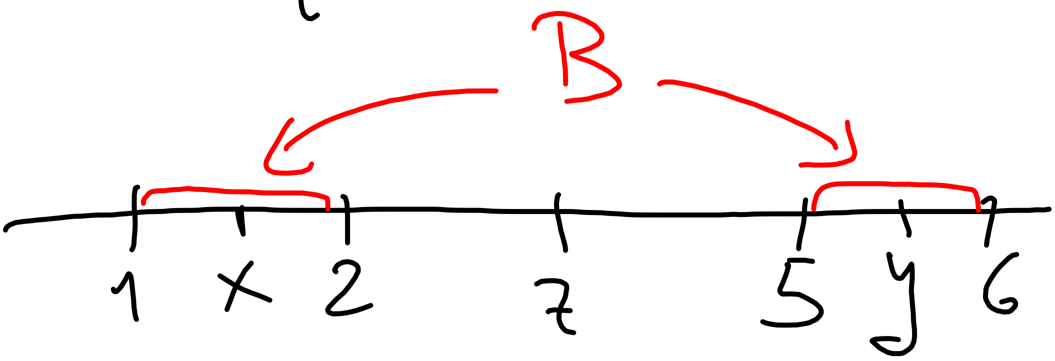
<u>Def</u>: $I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall x, y \in I$ con $x < y$, dato $z : x < z < y$ risulta $z \in I$.



$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 6\}$$



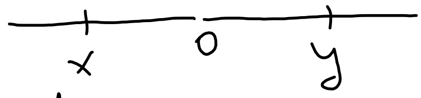
$$x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{11}{2}$$

$$z = 3 \qquad x < z < y$$

$$z \notin B.$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \}$$

non è un intervallo



Notazione

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$

intervallo chiuso

$$(a,b) =]a,b[=$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

intervallo aperto

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$$

$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \}$$

$$[a,+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \}$$

semiretta chiusa

$$(a,+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}$$

semiretta aperta

$$(-\infty,b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq b \}$$

$$(-\infty,b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$$

set 21-11:41

Funzioni

Terna di ogetti

due insiemi

A = dominio

B = codominio

f legge

$$f : A \longrightarrow B$$

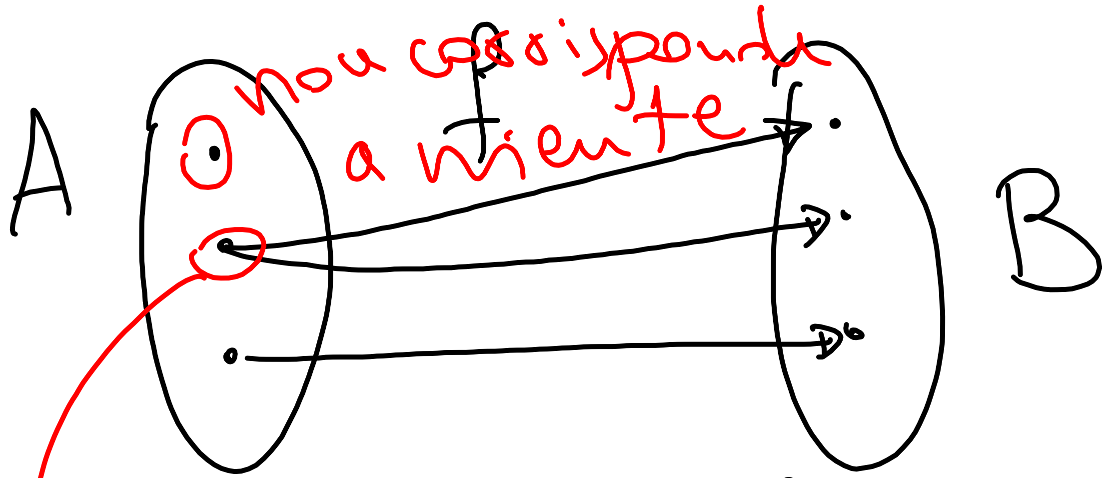
f mette in corrispond.

ogni elemento di A

con uno e un solo

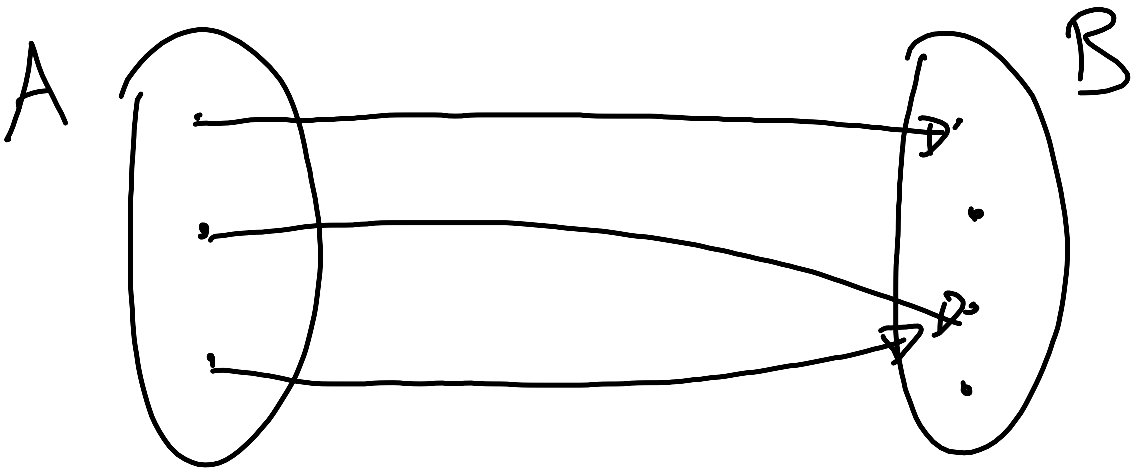
elemento di B.

set 21-11:48



non è una funzione

> corrisponde a due elementi



è una funzione

Grafico di f

$$\mathrm{graph}(f) = \{(a,b) \in A \times B \text{ t.c. } b = f(a)\}$$

Es: $A, B = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

$$(3,6) \in \mathrm{graph}(f)$$

$$6 = f(3) = 2 \cdot 3$$

$$(3,7) \notin \mathrm{graph}(f)$$

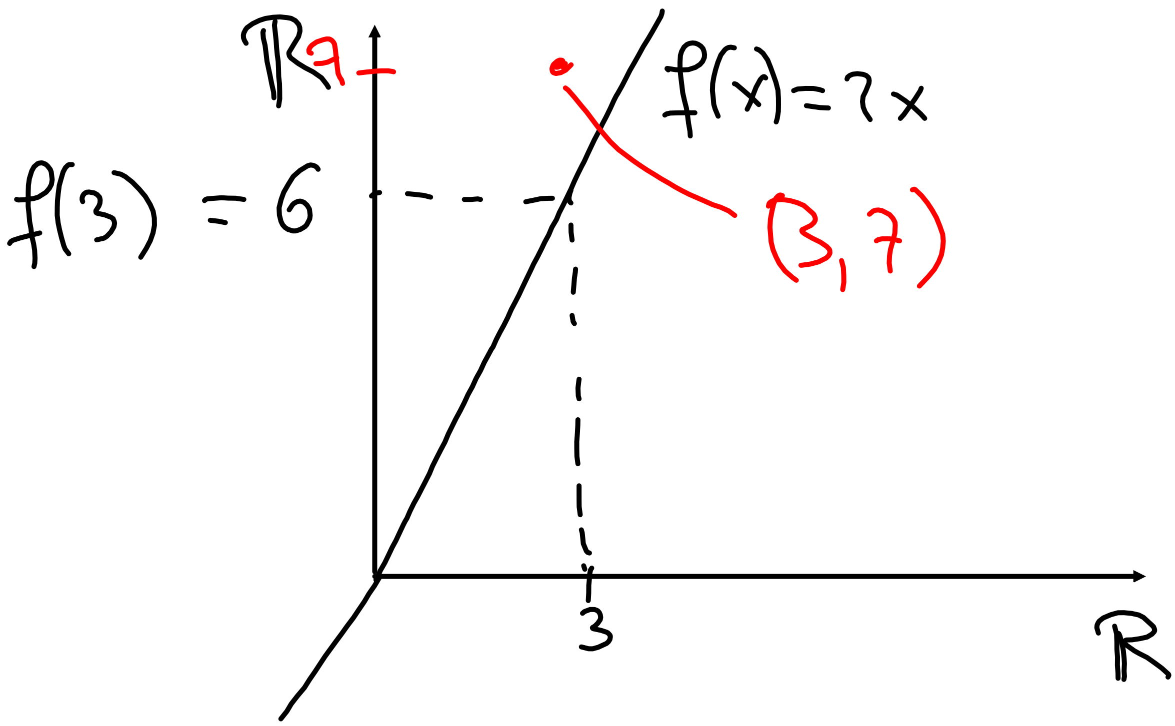
$$7 \neq f(3) = 6$$

set 21-11:53

$$A = \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{R}$$

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

piano Euclideo



Def: $f : A \to B$

$D \subset A$

$f(D) = \{ f(a) : a \in D \}$

si dice <u>immagine</u>

di D attraverso f

$f(D) \subset B$

<u>Es</u>: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$D = [1, 3]$

$f(D) = [1, 9]$

$\text{Imm}(f) = f(A)$

Immagine di f

<u>Es</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$\text{Imm}(f) = [0, +\infty)$

set 21-11:59

<u>Def</u>: $f: A \to B$
si dice <u>iniettiva</u>
se $\forall\, a_1, a_2 \in A$ con
$a_1 \neq a_2$ risulta
$f(a_1) \neq f(a_2)$

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

$a_1 = -3$, $a_2 = 3$
$f(a_1) = 9 = f(a_2)$
non è iniettiva

$g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$
g è iniettiva

set 21-12:03

<u>Def</u>: $f : A \to B$
si dice <u>surgettiva</u>
se $\forall b \in B \ \exists a \in A$
t.c. $f(a) = b$

<u>Es</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$
non è surgettiva

$b = -4$
$\nexists \, a \in \mathbb{R} : a^2 = -4$

<u>Oss</u>: $f : A \to B$
è surgettiva se e solo se

$Imm(f) = B$

set 21-12:06

Es: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$

è surgettiva.

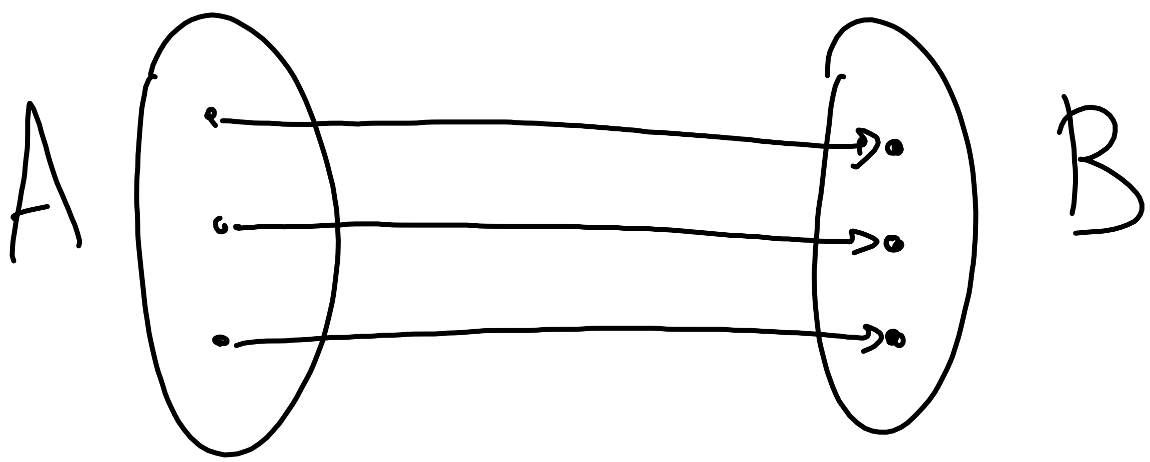
Def: $f: A \to B$

se è f è sia

iniettiva che surgettiva

si dice biunivoca

o invertibile.



set 21-12:10

Posso costruire
la funzione inversa
$f^{-1} : B \longrightarrow A$
$f^{-1}(b) = a$ se e solo
se $f(a) = b$
esiste almeno un $a \in A$
perché f è surgettiva
ne esiste <u>solo</u> uno
perché f è iniettiva

set 21-12:13

Es: $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$

è invertibile

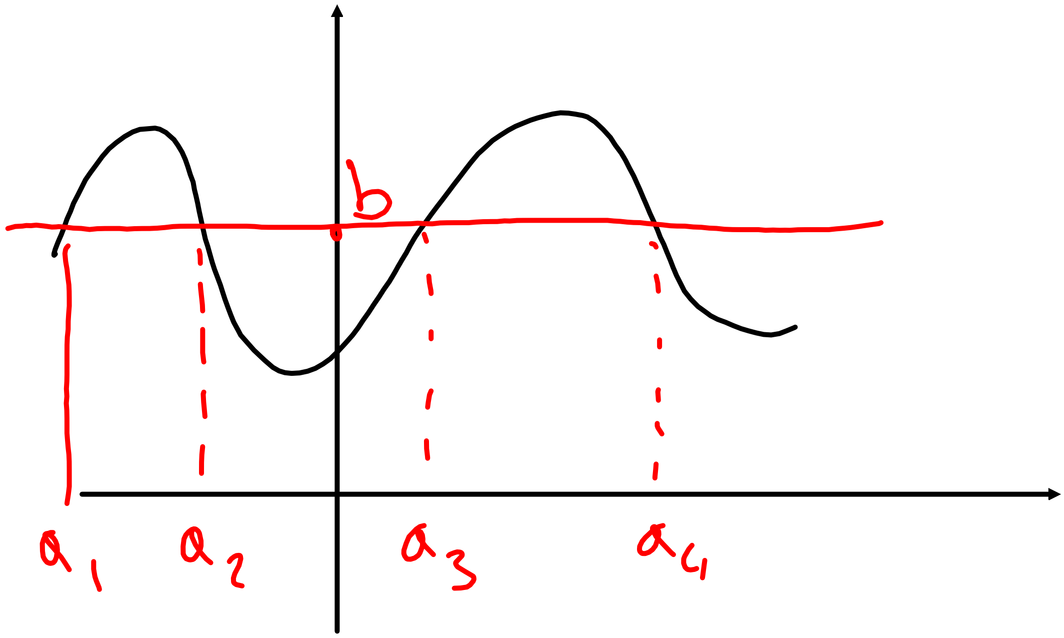
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$

$\sqrt{4} = 2$

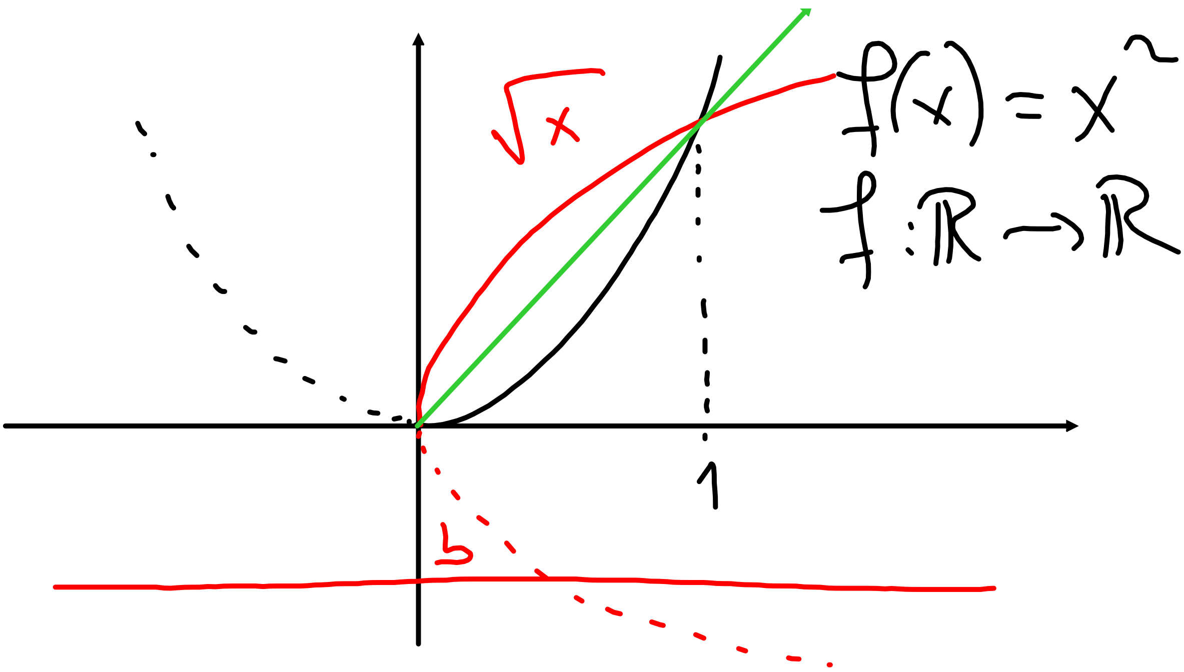
$\sqrt{x} \geq 0$ <u>sempre</u>

set 21-12:16



$f(a_1) = f(a_2) = \dots f(a_4) = b$

f non è iniettiva



$\sqrt{x}$
$f(x) = x^2$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
1
b

Trovare l'inversa.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

scrivo

$$y = 3x + 2$$

risolvo in x

$$y - 2 = 3x$$

$$\frac{y-2}{3} = x$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+2) =$$

$$\frac{(3x+2) - 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f^{-1} \circ f = Id = \text{identità}$$

set 21-12:26

$$Id : A \longrightarrow A$$

$$Id(x) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Funzioni monotòne

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$

Se $\forall x_1, x_2 \in A$ con

$x_1 < x_2$ risulta

1) $f(x_1) < f(x_2)$
f si dice strettamente crescente

2) $f(x_1) \leq f(x_2)$ f si dice debolmente crescente

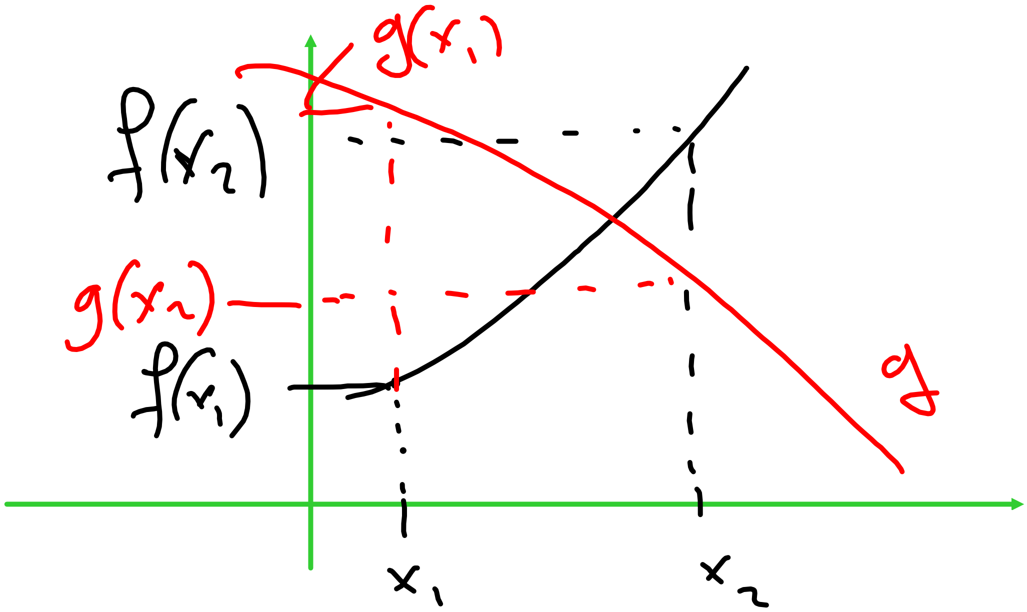
3) $f(x_1) > f(x_2)$
strettamente decrescente

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$
debolmente decrescente

Se si verificano 1) o 3)
f si dice strettamente monotòna

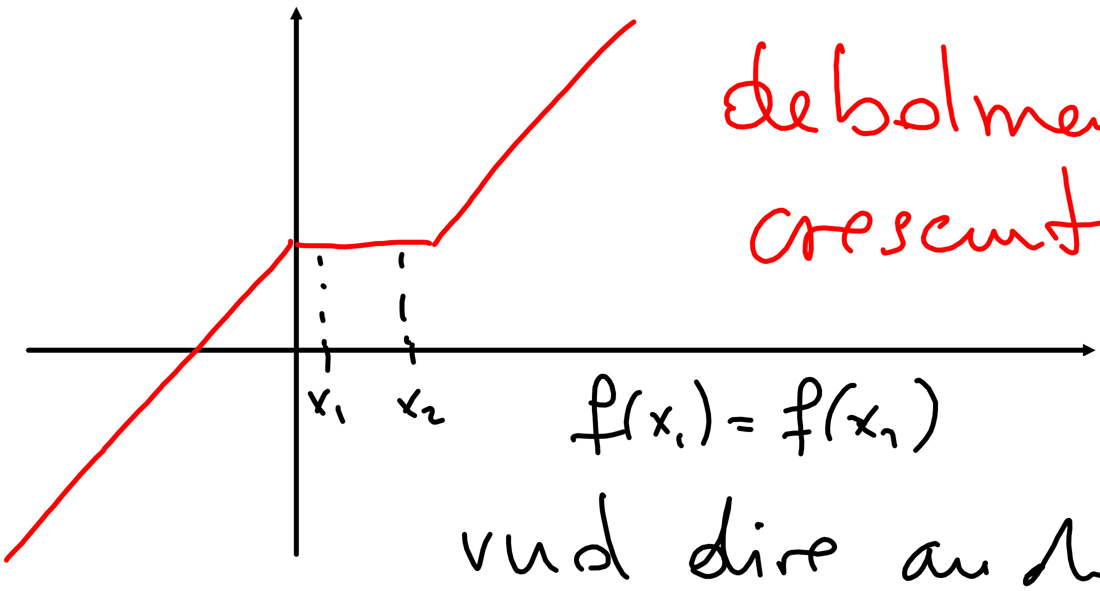
Se si verificano 2) o 4)
debolmente monotòna

set 21-12:34



$g(x_1)$
$f(x_2)$
$g(x_2)$
$f(x_1)$
g
x_1
x_2

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



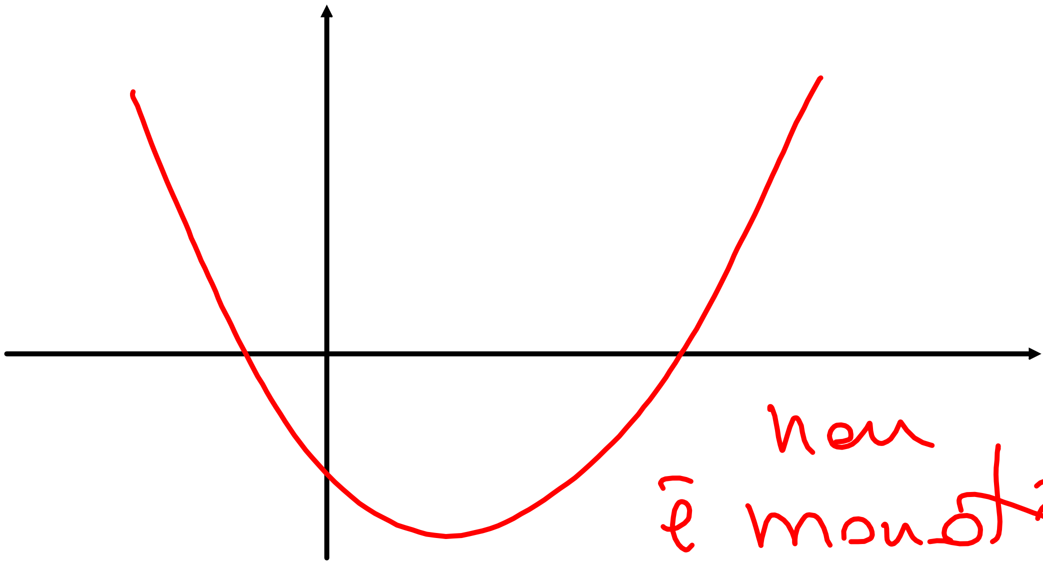
debolmente crescente.

$f(x_1) = f(x_2)$

vuol dire anche

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

set 21-12:41



non
è monotona