

**Corso di studi in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare**

**Matematica II**

**A.A. 2002 – 2003**

Carlo Romano Grisanti



<b>1</b>	<b>Funzioni di <math>n</math> variabili</b>	1
1.1	Lo spazio $\mathbb{R}^n$	1
1.2	Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$	1
1.3	Intorni, insiemi aperti e chiusi	2
1.4	Successioni in $\mathbb{R}^n$	6
1.5	Limiti di funzioni	6
1.6	Curve in $\mathbb{R}^n$	10
1.7	Composizione di funzioni	11
1.8	Continuità	13
1.9	Derivate parziali	13
1.10	La matrice Hessiana	14
1.11	Regola della catena	23
1.12	Integrali multipli	25
<b>2</b>	<b>Serie di funzioni</b>	30
2.1	Convergenza	30
2.2	Serie di Fourier	33
2.3	Equazione della corda vibrante	44
<b>3</b>	<b>Funzioni di variabile complessa</b>	49
3.1	La funzione esponenziale e il logaritmo	49
3.2	Le funzioni trigonometriche	51
3.3	Integrali curvilinei complessi	52
3.4	Funzioni olomorfe	53
<b>4</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	58
4.1	Definizioni e prime proprietà	58
4.2	Inversione della trasformata	63
4.3	La trasformata di Fourier in $L^2$	70
4.4	Funzioni a decrescenza rapida	71
<b>5</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	74
5.1	Definizioni e prime proprietà	74
5.2	Trasformata assoluta	76
5.3	Trasformata bilatera	86
5.4	Inversione della trasformata	88
<b>6</b>	<b>Equazioni differenziali alle derivate parziali</b>	91
6.1	Introduzione	91
6.2	Equazioni del secondo ordine	93
6.3	Condizioni al contorno	95
6.4	Condizioni iniziali	96

<b>6.5</b>	L'equazione delle onde .....	97
<b>6.6</b>	L'integrale di Poisson .....	100

# Capitolo 1

## Funzioni di $n$ variabili

### 1.1. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ .

Dato un numero intero positivo  $n$  indichiamo con  $\mathbb{R}^n$  il prodotto cartesiano di  $\mathbb{R}$   $n$ -volte:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . Indichiamo con  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un generico vettore di  $\mathbb{R}^n$  che rappresenteremo come vettore colonna.

Dati due vettori  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  e  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  e un numero reale  $k$  indichiamo con  $x + y$  la somma vettoriale e con  $kx$  il prodotto di un vettore per uno scalare, cioè:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad kx = \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}.$$

Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  è così dotato di una naturale struttura di spazio vettoriale.

### 1.2. Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.2.1.** *Dati due vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$  indichiamo con una delle tre seguenti notazioni il loro prodotto scalare:*

$$x \cdot y \quad (x|y) \quad \langle x, y \rangle.$$

*Il prodotto scalare di due vettori è un numero reale dato dalla formula:*

$$(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  gode delle seguenti proprietà:

- $(ax + by|z) = a(x|z) + b(y|z)$
- $(x|y) = (y|x)$
- $(x|x) \geq 0$  e  $(x|x) = 0$  se e solo se  $x = 0$ .

**Definizione 1.2.2.** Dati due vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$  diremo che sono **ortogonali** se  $(x|y) = 0$ .

**Osservazione 1.2.3.** La definizione di ortogonalità fra  $x$  e  $y$  corrisponde in dimensione  $n = 2$  o  $n = 3$  alla consueta relazione geometrica di perpendicolarità fra le rette che congiungono i punti di coordinate  $x$  e  $y$  con l'origine.

Al prodotto scalare possiamo associare la **norma** di un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  definita in questo modo:

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Per analogia al caso  $n = 1$  indicheremo anche la norma di  $x$  semplicemente con  $|x|$ . La norma gode delle seguenti proprietà:  $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$

$\|kx\| = |k|\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

L'ultima di queste proprietà è nota con il nome di **disuguaglianza triangolare**.

La norma in  $\mathbb{R}^n$  induce in modo naturale una distanza detta anche **metrica euclidea** su  $\mathbb{R}^n$ . La distanza fra due vettori  $x$  e  $y$  di  $\mathbb{R}^n$  è data da:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

La distanza gode delle seguenti proprietà:

$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$

$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ .

Anche in questo caso l'ultima di queste proprietà è nota con il nome di **disuguaglianza triangolare** ed esprime, nel caso  $n = 2$  la ben nota proprietà geometrica che in un triangolo la lunghezza di un lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati.

### 1.3. Intorni, insiemi aperti e chiusi.

**Definizione 1.3.1.** Dato  $x \in \mathbb{R}^n$  e un numero reale  $r > 0$  indichiamo con  $B(x, r)$  la **palla aperta di centro  $x$  e raggio  $r$** :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}.$$

**Osservazione 1.3.2.** Nel caso  $n = 1$ ,  $B(x, r)$  è semplicemente l'intervallo aperto (estremi esclusi)  $(x - r, x + r)$ .

Nel caso  $n = 2$ ,  $B(x, r)$  è il disco aperto (privato del bordo) di centro  $x$  e raggio  $r$ .

Nel caso  $n = 3$ ,  $B(x, r)$  è la sfera solida aperta (senza il guscio sferico) di centro  $x$  e raggio  $r$ .

**Definizione 1.3.3.** Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $x \in A$  è un **punto interno** ad  $A$  se esiste un numero  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subset A$ .

L'insieme dei punti interni ad  $A$  si dice **parte interna di  $A$**  e si indica con  $\mathring{A}$  oppure  $\text{int}(A)$ .

**Definizione 1.3.4.** Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $x \in \mathbb{R}^n$  è un **punto di frontiera per  $A$**  se per ogni  $\varepsilon > 0$  la palla aperta di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$  contiene sia punti di  $A$  che punti che non appartengono ad  $A$ , cioè:

$$A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, \quad B(x, \varepsilon) \setminus A \neq \emptyset.$$

Indicheremo la frontiera di  $A$  con  $\partial A$ .

**Definizione 1.3.5.** Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice **aperto** se è formato solo da punti interni, cioè:

$$\forall x \in A, x \text{ è interno ad } A.$$

**Definizione 1.3.6.** Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  si definisce **chiusura di  $A$**  l'insieme:

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

**Definizione 1.3.7.** Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice **chiuso** se  $\bar{A} = A$ .

**Osservazione 1.3.8.**  $A$  è aperto se e solo se  $A \cap \partial A = \emptyset$ .  $A$  è chiuso se e solo se  $\partial A \subset A$ .

**Osservazione 1.3.9.** Per ogni sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  risulta  $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ .

**Dim.** Essendo  $\mathring{A} \subset A$  si ha immediatamente la prima inclusione:

$$(\mathring{A} \cup \partial A) \subset (A \cup \partial A) = \bar{A}.$$

Per l'inclusione opposta prendiamo  $x \in A$  tale che  $x \notin \mathring{A}$ . Allora per ogni  $r > 0$  risulta  $B(x, r) \not\subset A$ , cioè  $B(x, r) \setminus A \neq \emptyset$ . Ma anche  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  per ogni  $r > 0$  (dato che  $x \in A$ ) quindi  $x \in \partial A$ . Ne segue che  $A \subset (\mathring{A} \cup \partial A)$  e, di conseguenza:

$$\bar{A} = (A \cup \partial A) \subset (\mathring{A} \cup \partial A)$$

che è l'inclusione cercata. ■

**Osservazione 1.3.10.** Ogni insieme di  $\mathbb{R}^n$  ha la frontiera in comune con il suo complementare, cioè:

$$\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

**Osservazione 1.3.11.** Per ogni  $A \subset \mathbb{R}^n$  risulta che  $A$  è aperto se e solo se  $\mathbb{R}^n \setminus A$  è chiuso (e viceversa).

**Definizione 1.3.12.** Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $x \in A$  è un **punto isolato di  $A$**  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$ .

**Osservazione 1.3.13.** Se  $x$  è un punto isolato per  $A$  allora è un punto di frontiera per  $A$ .

**Definizione 1.3.14.** Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $x \in \mathbb{R}^n$  è un **punto di accumulazione per  $A$**  se  $x \in \overline{A}$  ma non è un punto isolato di  $A$ .

**Definizione 1.3.15.** Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice **limitato** se esiste  $R > 0$  tale che  $A \subset B(0, R)$ .

**Osservazione 1.3.16.** Non c'è nessuna relazione fra la definizione di limitato e di chiuso. Ad esempio l'insieme  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}^2$  ma non è limitato. L'insieme  $B(0, 1)$  è invece limitato in  $\mathbb{R}^2$  ma non è chiuso.

**Esempio 1.3.17.** L'insieme  $[0, 1] \times [0, 1]$  è chiuso in  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 1.3.18.** L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$  è aperto in  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 1.3.19.** L'insieme  $[0, 1) \times [0, 1]$  non è né aperto né chiuso in  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 1.3.20.** Tutto lo spazio  $\mathbb{R}^2$  è sia aperto che chiuso.

**Esempio 1.3.21.** Dato  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\}$ , la frontiera di  $A$  è:

$$\begin{aligned} \partial A = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\} \setminus \\ & \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4\}. \end{aligned}$$

L'insieme  $A$  è chiuso, non è aperto, non è limitato.



**Esempio 1.3.22.** Dato

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 9\} \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

la frontiera di  $A$  è l'insieme:

$$\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 9\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

L'insieme  $A$  non è chiuso, non è aperto, è limitato.

**Esempio 1.3.23.** Sia  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è razionale}\}$ . La frontiera di  $A$  è tutto l'intervallo  $[0, 1]$ . L'insieme  $A$  non è aperto, non è chiuso, è limitato. La parte interna di  $A$  è l'insieme vuoto.

**Definizione 1.3.24.** Due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^n$  si dicono **separati** se  $\bar{A} \cap B = \emptyset$  e  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ .

**Esempio 1.3.25.**  $[0, 1)$  e  $(1, 2)$  sono due sottoinsiemi separati di  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 1.3.26.**  $[0, 1]$  e  $(1, 2)$  non sono due sottoinsiemi separati di  $\mathbb{R}$ .

**Osservazione 1.3.27.** Due insiemi aperti disgiunti sono separati.

**Dim.** Siano  $A$  e  $B$  aperti tali che  $A \cap B = \emptyset$ . Se  $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$  allora esiste  $x \in \bar{A} \cap B$ . Essendo  $x \in B$  e  $B$  aperto, allora esiste  $\rho > 0$  tale che  $B(x, \rho) \subset B$ . Ma  $x \in \bar{A}$ , quindi  $B(x, \rho) \cap A \neq \emptyset$ . Ne segue che  $A \cap B \neq \emptyset$  e questo è assurdo. Analogo risultato se fosse  $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ . ■

**Definizione 1.3.28.** Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice **connesso** se non è possibile trovare due sottoinsiemi separati ed entrambi non vuoti di  $\mathbb{R}^n$  la cui unione sia  $A$ .

**Esempio 1.3.29.**

- L'intervallo  $[0, 2)$  è un sottoinsieme connesso di  $\mathbb{R}$ .
- La semiretta  $[2, +\infty)$  è un sottoinsieme connesso di  $\mathbb{R}$ .
- L'insieme  $[0, 1) \cup [3, 5)$  non è connesso.
- L'insieme  $[0, 1) \cup (1, 2]$  non è connesso.
- L'insieme  $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$  non è connesso.

### 1.4. Successioni in $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.4.1.** Diremo che una successione  $\{x_k \in \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$  converge a un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  risulta  $x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ . In questo caso scriveremo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

Indicheremo la successione  $\{x_k \in \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$  anche con il simbolo  $(x_k)$ .

**Osservazione 1.4.2.** Una successione  $(x_k)$  in  $\mathbb{R}^n$  converge a  $\bar{x}$  se e solo se ogni sua componente converge, cioè:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k)_j = \bar{x}_j, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

dove con  $(x_k)_j$  si intende la  $j$ -esima componente del vettore  $x_k \in \mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.4.3.** Si consideri la successione  $(x_k) \subset \mathbb{R}^2$  definita da  $x_k = \begin{pmatrix} \frac{\sin k}{k} \\ \frac{k+1}{k+2} \end{pmatrix}$ . Risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin k}{k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$$

quindi  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Osservazione 1.4.4.** Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è di accumulazione per  $A$  se e solo se esiste una successione  $(x_k) \subset A \setminus \{x\}$  che converge a  $x$ .

### 1.5. Limiti di funzioni.

**Definizione 1.5.1.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $f$  una funzione definita su  $A$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Sia  $x$  un punto di accumulazione per  $A$ . Diremo che un numero reale  $l$  è il limite di  $f$  per  $y$  che tende a  $x$ , e scriveremo:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = l$$

se, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero reale  $r > 0$  tale che:

$$y \in B(x, r) \cap A \setminus \{x\} \implies |f(y) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che  $f$  diverge a  $+\infty$ , e scriveremo:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = +\infty$$

se per ogni numero reale  $M > 0$  esiste  $r > 0$  tale che:

$$y \in B(x, r) \cap A \setminus \{x\} \implies f(y) > M.$$

Diremo che  $f$  diverge a  $-\infty$ , e scriveremo:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = -\infty$$

se per ogni numero reale  $M$  esiste  $r > 0$  tale che:

$$y \in B(x, r) \cap A \setminus \{x\} \implies f(y) < M.$$

**Definizione 1.5.2.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo che  $f$  converge a  $l \in \mathbb{R}$  per  $\|x\|$  che tende a  $\infty$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $R > 0$  tale che:

$$\|x\| \geq R \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

In questo caso scriveremo

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

Diremo invece che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni  $M > 0$  esiste  $R > 0$  tale che

$$\|x\| \geq R \implies |f(x) - l| > M.$$

Analogha definizione per

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

**Notazione:** nel seguito, per semplicità di notazione, scriveremo, specialmente in dimensione  $n = 2$  e  $n = 3$  i vettori di  $\mathbb{R}^n$  anche come vettori riga e chiameremo le componenti dei vettori con le lettere  $x, y, z$  invece che  $x_1, x_2, x_3$ . Ad esempio, per indicare una funzione di due variabili scriveremo  $f(x, y)$  in luogo di  $f(x_1, x_2)$ .

Illustriamo ora un metodo per calcolare i limiti di funzioni nel caso di due sole variabili. Dato un punto di  $\mathbb{R}^2$  di coordinate  $(x_0, y_0)$ , possiamo descrivere la palla di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  in **coordinate polari** nel seguente modo:

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 + \rho \cos \theta, y = y_0 + \rho \sin \theta, 0 \leq \rho < r, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$\rho$  rappresenta la distanza dal centro della palla, mentre  $\theta$  è l'angolo formato con una semiretta parallela all'asse  $x$  orientata nel verso delle  $x$  crescenti e avente per origine il centro della palla.

Con queste notazioni possiamo enunciare il seguente:

**Teorema 1.5.3.** Dato un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}^2$ , una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e un punto  $(x_0, y_0)$  di accumulazione per  $A$ , se esistono due numeri reali  $l, r$  e una funzione  $g : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$  tali che:

$$|f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

per ogni  $\theta \in [0, 2\pi)$  e per ogni  $\rho \in [0, r)$ , allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l.$$

**Esempio 1.5.4.** Dimostriamo che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} = 0$ .

In coordinate polari  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , risulta:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} \right| = \left| \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta} \right| = \rho \left| \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta} \right| = \rho \left| \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \right| \leq \rho.$$

Quindi basta applicare il teorema precedente con  $l = 0$ ,  $r > 0$  qualsiasi,  $g(\rho) = \rho$ .

Anche nel caso dei limiti per  $\|x\|$  che tende a  $\infty$  enunciamo un teorema analogo al precedente.

**Teorema 1.5.5.** Data  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se esistono due numeri  $l, R \in \mathbb{R}$  e una funzione  $g : [R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} g(\rho) = 0$  tali che

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - l| < g(\rho)$$

per ogni  $\theta \in [0, 2\pi)$  e per ogni  $\rho \geq R$ , allora

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = l.$$

**Esempio 1.5.6.** Dimostriamo che  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2+y^2} = 0$ . Infatti, passando alle coordinate polari:

$$\left| \frac{x+1}{2x^2+y^2} \right| = \left| \frac{\rho \cos \theta + 1}{2\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \right| = \frac{1}{\rho} \left| \frac{\cos \theta + 1}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right| \leq \frac{2}{\rho}.$$

Basta quindi applicare il teorema precedente con  $l = 0$ ,  $R > 0$  qualsiasi e  $g(\rho) = \frac{2}{\rho}$ .

**Esempio 1.5.7.** Dimostriamo che

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} e^{2x+y-2x^2-y^2} = 0.$$

Consideriamo inizialmente solo l'esponente e passiamo in coordinate polari  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} 2x + y - 2x^2 - y^2 &= 2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 2\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = \\ &= -\rho^2 \cos^2 \theta + \rho(2 \cos \theta + \sin \theta) \leq -\rho^2 + 3\rho \end{aligned}$$

quindi, poiché  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} -\rho^2 + 3\rho = -\infty$  si ha:

$$0 < \lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 2\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta} \leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\rho^2 + 3\rho} = 0.$$

**Teorema 1.5.8.** Data  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se esistono  $R > 0$  e una funzione  $g : [R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = +\infty$  tali che

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq g(\rho)$$

per ogni  $\theta \in [0, 2\pi)$  e per ogni  $\rho \geq R$  allora risulta

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty.$$

**Esercizio 1.5.9.**

Calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - 2y^2)^2}{x^2 + 3y^2}.$$

Dimostriamo ora una disuguaglianza fondamentale utilissima nel calcolo dei limiti di funzioni di più variabili.

**Lemma 1.5.10.** Siano  $a, b, p \in \mathbb{R}$  con  $a, b \geq 0$  e  $p \geq 1$ . Allora risulta

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

**Dim.** Consideriamo la funzione  $\psi(t) = 1 + t^p - (1 + t)^p$  per  $t \geq 0$ . La  $\psi$  è derivabile e risulta  $\psi'(t) = pt^{p-1} - p(1 + t)^{p-1}$ . Vediamo che  $\psi'(t) \leq 0$  per ogni  $t \geq 0$ . Infatti la funzione  $s \mapsto s^{p-1}$  è crescente, essendo  $p - 1 \geq 0$ , quindi  $t^{p-1} \leq (1 + t)^{p-1}$ ; ne segue, moltiplicando per  $p$ , che  $\psi'(t) \leq 0$ . La  $\psi$  risulta quindi decrescente, inoltre  $\psi(0) = 0$ , di

conseguenza  $\psi(t) \leq 0$  per ogni  $t \geq 0$ . Allora  $1 + t^p \leq (1 + t^p)$ . Poniamo ora  $t = \frac{a}{b}$  e sostituiamolo nel risultato appena trovato, ottenendo:

$$1 + \frac{a^p}{b^p} \leq \left(1 + \frac{a}{b}\right)^p$$

e, moltiplicando per  $b^p$  otteniamo la prima delle due disuguaglianze.

Per provare la seconda consideriamo la funzione  $\varphi(t) = t^p$  sempre per  $t \geq 0$ . Risulta  $\varphi'(t) = pt^{p-1}$  che è una funzione crescente, come abbiamo osservato precedentemente. Ne segue che la  $\varphi$  è una funzione convessa, quindi  $\varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda\varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b)$  per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ . Utilizziamo questo risultato con  $\lambda = \frac{1}{2}$  ottenendo:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

e, moltiplicando per  $2^p$ , si ottiene la seconda disuguaglianza. ■

**Esempio 1.5.11.** Verifichiamo che

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} x^4 + y^4 - (|x| + |y|)^{\frac{7}{2}} = +\infty.$$

Utilizzando la seconda disuguaglianza del lemma 1.5.10 con  $a = x^2$ ,  $b = y^2$ ,  $p = 2$ , otteniamo:

$$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2.$$

Utilizzando la seconda e successivamente la prima disuguaglianza del lemma 1.5.10 otteniamo:

$$(|x| + |y|)^{\frac{7}{2}} \leq 2^{\frac{5}{2}}(|x|^{\frac{7}{2}} + |y|^{\frac{7}{2}}) = 2^{\frac{5}{2}}((x^2)^{\frac{7}{4}} + (y^2)^{\frac{7}{4}}) \leq 2^{\frac{5}{2}}(x^2 + y^2)^{\frac{7}{4}}.$$

Passando in coordinate polari, si ottiene che:

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq \frac{1}{2}\rho^4 - 2^{\frac{5}{2}}\rho^{\frac{7}{2}}$$

quindi  $f$  diverge a  $+\infty$  quando  $\|(x, y)\|$  tende a  $+\infty$ . ■

## 1.6. Curve in $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.6.1.** Dato un intervallo chiuso della retta reale  $[a, b]$ , una funzione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^k$  si dice **curva di classe  $C^k$** . I punti  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  si dicono

**estremi della curva.** L'immagine di  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  (cioè  $\gamma([a, b])$ ) si dice **sostegno** oppure **supporto** di  $\gamma$ . Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  la curva si dice **chiusa** o **circuito**. Se  $\gamma$  è una funzione iniettiva oppure se  $\gamma$  è chiusa e  $\gamma$  è iniettiva sull'intervallo  $[a, b]$  allora la curva si dice **semplice**.

**Esempio 1.6.2.** Consideriamo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ . La curva  $\gamma$  ha per sostegno il segmento della bisettrice del terzo e quarto quadrante di estremi  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

**Esempio 1.6.3.** La curva  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$  ha per sostegno la semicirconferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 2 posta nel primo e secondo quadrante.

**Esempio 1.6.4.** La curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$  ha per sostegno un tratto di elica cilindrica che ha per base la circonferenza unitaria del piano  $x, y$  e per asse l'asse  $z$ .

## 1.7. Composizione di funzioni.

Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un punto  $\bar{x}$  di accumulazione per  $A$  e una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consideriamo un curva continua (di classe  $C^0$ ) il cui sostegno (eccettuato al più il punto  $\bar{x}$ ) sia contenuto in  $A$ . Sia quindi  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  una curva continua e supponiamo che la curva passi per  $\bar{x}$ , cioè che esista  $\bar{t} \in [a, b]$  tale che  $\gamma(\bar{t}) = \bar{x}$ . Abbiamo allora il seguente teorema:

**Teorema 1.7.1.** Se esiste  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$  allora esiste  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} (f \circ \gamma)(t) = l$ .

Questo teorema è conseguenza del fatto che se esiste il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $\bar{x}$  allora esiste il limite della restrizione di  $f$  su ogni sottoinsieme di  $A$  che abbia per punto di accumulazione  $\bar{x}$  (e i due limiti sono uguali).

Il risultato precedente è molto utile per dimostrare che un limite non esiste. Basta infatti trovare due curve che passano per il punto  $\bar{x}$  tali che il limite di  $f$  composta con le due curve risulti diverso.

**Esempio 1.7.2.** Dimostriamo che non esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

La funzione  $f$  è definita in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Consideriamo prima la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ . Risulta  $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , quindi il limite della composizione:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \gamma)(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0}{t^2} = 0.$$

Prendendo invece la curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  abbiamo di nuovo  $\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Questa volta tuttavia risulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha)(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

I due limiti sono diversi, quindi non può esistere il limite di  $f$ .

**Esempio 1.7.3.** Dimostriamo che non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(2x + y)}{x^2 + 3y^2}.$$

Consideriamo prima la restrizione alla retta  $y = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \frac{(2x)^2}{x^2} = 4.$$

Se invece utilizziamo la restrizione alla retta  $x = 0$  otteniamo:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{1}{3}.$$

I due limiti sono diversi quindi il limite non esiste per il teorema 1.7.1.

**Esercizio 1.7.4.**

*Dimostrare che non esiste il limite:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$



## 1.8. Continuità.

**Definizione 1.8.1.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $f$  una funzione definita su  $A$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Diremo che  $f$  è **continua** in un punto  $x \in A$  se

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

Diremo inoltre che  $f$  è continua in  $A$  se è continua in ogni punto di  $A$ .

Osserviamo, senza darne l'enunciato preciso, che valgono, anche per le funzioni di più variabili, i consueti teoremi sulla continuità di somma, prodotto, quoziente e prodotto di composizione tra funzioni continue.

## 1.9. Derivate parziali.

**Definizione 1.9.1.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{x}$  un punto interno ad  $A$ . Sia  $j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq n$  fissato e sia  $e_j$  il  $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Se esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + he_j) - f(\bar{x})}{h}$$

diremo che la  $f$  è derivabile parzialmente rispetto a  $x_j$  nel punto  $\bar{x}$ . Il valore del limite si dice **derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x_j$**  e si indica con  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

**Definizione 1.9.2.** Il vettore (riga) che ha per componenti le derivate parziali di  $f$  si dice **gradiente di  $f$**  e si indica con  $\nabla f$ :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Nel caso di due sole variabili useremo la notazione  $f(x, y)$  invece di  $f(x_1, x_2)$ .

### Esercizio 1.9.3.

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = y \sin(xy)$$

$$f(x, y) = y \arctan \frac{x}{y}$$

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 2}$$

$$f(x, y) = y + 2xe^{-y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

**Teorema 1.9.4.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\bar{x} \in A$  è un punto di minimo locale (o massimo locale) per  $f$ ,  $\bar{x}$  è un punto interno di  $A$  e  $f$  è derivabile parzialmente rispetto a  $x_j$  in  $\bar{x}$  allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0.$$

**Dim.** Consideriamo la funzione  $\varphi(t) = f(\bar{x} + te_j)$  dove  $e_j$  è il  $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . La  $\varphi$  è definita in un intorno di  $t = 0$ , essendo  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$  ed è anche derivabile in  $t = 0$ , inoltre:

$$(1.9.1) \quad \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + te_j) - f(\bar{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}).$$

Ma se  $\bar{x}$  è un punto di minimo (o massimo) locale per  $f$  allora  $t = 0$  è un punto di minimo (o massimo) locale per  $\varphi$ . Ne segue che  $\varphi'(0) = 0$  quindi, per la (1.9.1) anche  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0$ .

■

**Corollario 1.9.5.** Nelle stesse ipotesi del teorema 1.9.4, se  $f$  ammette tutte le derivate parziali in  $\bar{x}$  allora  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .

## 1.10. La matrice Hessiana.

**Definizione 1.10.1.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$ . Dati  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  indichiamo, se esiste, con  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$  la **derivata parziale seconda** rispetto alle variabili  $x_j$  e  $x_i$  della  $f$  nel punto  $\bar{x}$  con il seguente significato:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\bar{x}).$$

Questa espressione vuol dire che stiamo eseguendo la derivata parziale rispetto alla variabile  $x_i$  della funzione (di  $n$  variabili)  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ . Nel caso della derivata due volte rispetto alla stessa variabile si usa anche l'espressione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

**Definizione 1.10.2.** Se in un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  esistono tutte le derivate seconde della funzione  $f$ , indichiamo con  $Hf(\bar{x})$  la matrice quadrata formata da esse, cioè:

$$Hf(\bar{x}) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

**Definizione 1.10.3.** La traccia della matrice Hessiana prende il nome di **operatore di Laplace** o **laplaciano** e si indica col simbolo  $\Delta$ . Esplicitamente avremo quindi:

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

**Definizione 1.10.4.** Una funzione  $f$ , di classe  $C^2$  su un sottoinsieme  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  per cui risulti  $\Delta f = 0$  in  $\Omega$  si dice **armonica** in  $\Omega$ .

**Teorema 1.10.5. (Schwarz)** Data  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se in un intorno di un punto  $\bar{x}$  interno ad  $A$  esistono le derivate parziali seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  e sono continue in  $\bar{x}$  allora le due derivate sono uguali in  $\bar{x}$ , cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}).$$

**Osservazione 1.10.6.** Il teorema 1.10.5 si applica in particolare se la funzione  $f$  è di classe  $C^2$ .

**Corollario 1.10.7.** Se  $f$  è di classe  $C^2$  la sua matrice Hessiana è simmetrica.

La matrice delle derivate seconde può fornire condizioni necessarie e condizioni sufficienti per avere punti di massimo o di minimo locale interni al dominio. I risultati essenziali sono contenuti nei seguenti teoremi:

**Teorema 1.10.8.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$ . Sia inoltre  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$ . Se  $\bar{x}$  è un punto di massimo locale per  $f$  allora  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  e la forma quadratica associata a  $Hf(\bar{x})$  è semidefinita negativa. Se  $\bar{x}$  è un punto di minimo locale per  $f$  allora  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  e la forma quadratica associata a  $Hf(\bar{x})$  è semidefinita positiva.

**Teorema 1.10.9.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$ . Sia inoltre  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$ . Se  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  e la forma quadratica associata a  $Hf(\bar{x})$  è definita negativa allora  $\bar{x}$  è un punto di massimo locale per  $f$ . Se  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  e la forma quadratica associata a  $Hf(\bar{x})$  è definita positiva allora  $\bar{x}$  è un punto di minimo locale per  $f$ .

**Definizione 1.10.10.** Data  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subset \mathbb{R}^2$  diremo che un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  è un punto **di sella** per  $f$  se esistono due direzioni distinte tali che la  $f$  ristretta alle rette con tali direzioni e passanti per  $(\bar{x}, \bar{y})$  presenta ivi rispettivamente un punto di massimo locale e di minimo locale. In altri termini se esistono  $u, v \in \mathbb{R}^2$  tali che ponendo:

$$g(t) = f(\bar{x} + tu_1, \bar{y} + tu_2), \quad h(t) = f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2)$$

risulta  $t = 0$  un punto di minimo locale per  $g$  e  $t = 0$  un punto di massimo locale per  $h$ .

Nel caso di funzioni di due sole variabili le condizioni contenute nei teoremi 1.10.8 e 1.10.9 risultano particolarmente semplici:

**Teorema 1.10.11.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ . Dato un punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ad  $A$  supponiamo che sia  $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Allora:

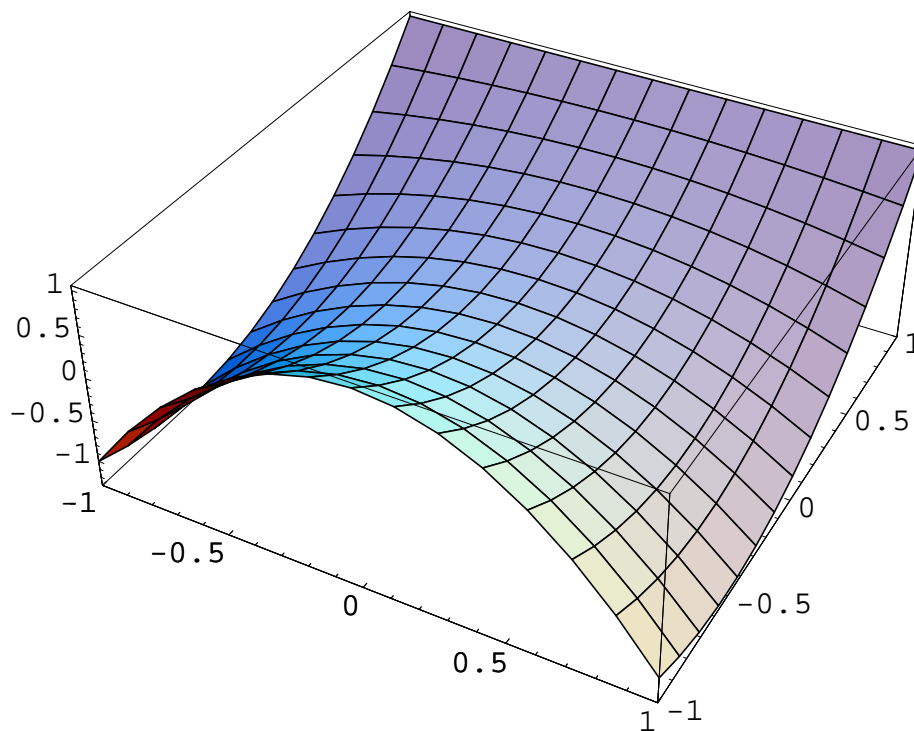
- Se  $\det(Hf(\bar{x}, \bar{y})) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$  allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto di minimo locale per  $f$ .
- Se  $\det(Hf(\bar{x}, \bar{y})) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$  allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto di massimo locale per  $f$ .
- Se  $\det(Hf(\bar{x}, \bar{y})) < 0$  allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto di sella, quindi non è né un punto di minimo locale né un punto di massimo locale per  $f$ .

**Osservazione 1.10.12.** Se  $(\bar{x})$  è un punto di massimo locale interno per una funzione  $f$  di  $n$  variabili, allora  $\Delta f(\bar{x}) \leq 0$ . Se invece  $(\bar{x})$  è un punto di minimo locale interno allora  $\Delta f(\bar{x}) \geq 0$

**Dim.** Ricordiamo che la matrice Hessiana è simmetrica reale, quindi, per il teorema spettrale, è diagonalizzabile. Per il teorema 1.10.8, la matrice Hessiana nel punto  $\bar{x}$  è semidefinita negativa, quindi i suoi autovalori sono tutti minori o uguali a zero. La somma degli autovalori è quindi minore o uguale a zero, ma la traccia è invariante per cambiamento di base, quindi  $\Delta f(\bar{x}) = \text{tr}(Hf(\bar{x})) \leq 0$ . Analogo risultato nel caso del minimo. ■

**Esempio 1.10.13.** Trovare i punti di massimo o di minimo locale per la funzione

$$f(x, y) = x^2 y - x^2 + y^2.$$



Calcoliamo le derivate parziali di  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y.$$

Troviamo i punti dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 2xy - 2x = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto  $(0, 0)$ . Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

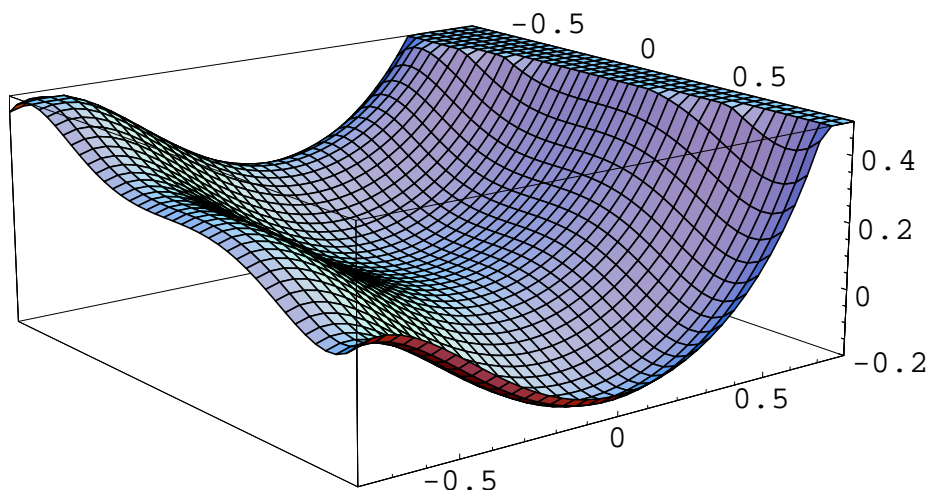
Valutandole nel punto  $(0, 0)$  otteniamo la matrice Hessiana:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a  $-4 < 0$  quindi il punto  $(0, 0)$  non è né di massimo né di minimo locale (è un punto di sella). ■

**Esempio 1.10.14.** Trovare i punti di massimo e di minimo locale della funzione:

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - x^3 + y^2.$$



Le derivate parziali di  $f$  sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 + 2y$$

quindi il gradiente si annulla nei punti che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 5x^4 - 3x^2 = 0 \\ 5y^4 + 2y = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono rappresentate dai seguenti sei punti:

$$A = (0, 0), \quad B = \left(0, -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right), \quad C = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right), \quad D = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)$$

$$E = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right), \quad F = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right).$$

Le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 20x^3 - 6x, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 20y^3 + 2.$$

La matrice Hessiana nel punto  $A$  risulta:

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo, quindi il teorema 1.10.11 non ci è di aiuto. Consideriamo la seguente restrizione di  $f$  all'asse delle  $x$ :

$$\varphi(x) = f(x, 0) = x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1).$$

Il punto  $x = 0$  non è né di massimo né di minimo locale per  $\varphi$ , ne segue che  $(0, 0)$  non è né di massimo né di minimo locale per  $f$ .

La matrice Hessiana in  $B$  risulta:

$$Hf(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

che anche in questo caso ha determinante uguale a zero. Consideriamo quindi la restrizione di  $f$  alla retta  $y = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$  parallela all'asse delle  $x$  e passante per  $B$ :

$$g(x) = f\left(x, -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right) = x^5 - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - x^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Valutiamo la derivata di  $g$ :

$$g'(x) = 5x^4 - 3x^2 = x^2(5x^2 - 3)$$

quindi

$$g'(x) > 0 \iff |x| > \sqrt{\frac{3}{5}}$$

e la funzione  $g$  nel punto  $x = 0$  è decrescente. Ne segue che  $x = 0$  non è né punto di massimo né punto di minimo locale per  $g$  e  $B$  non è né punto di massimo né punto di minimo locale per  $f$ .

La matrice Hessiana in  $C$  risulta:

$$Hf(C) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a  $12\sqrt{\frac{3}{5}} > 0$ ; essendo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$ , il teorema 1.10.11 ci assicura che  $C$  è un punto di minimo locale per  $f$ .

La matrice Hessiana in  $D$  risulta:

$$Hf(D) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a  $-36\sqrt{\frac{3}{5}} < 0$  quindi il punto  $D$  è un punto di sella.

La matrice Hessiana in  $E$  risulta:

$$Hf(E) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a  $-12\sqrt{\frac{3}{5}} < 0$  quindi anche il punto  $E$  è un punto di sella.

La matrice Hessiana in  $F$  risulta:

$$Hf(F) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a  $36\sqrt{\frac{3}{5}} > 0$ ; essendo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\sqrt{\frac{3}{5}} < 0$ , il teorema 1.10.11 ci dice che  $F$  è un punto di massimo locale per  $f$ . ■

**Esempio 1.10.15.** Trovare i punti di massimo e di minimo locali per

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2).$$

Le derivate parziali di  $f$  sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Il gradiente si annulla quindi nei punti che risolvono:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

cioè il solo punto  $(0, 0)$ . Le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

e la matrice Hessiana calcolata in  $(0, 0)$  è la matrice nulla:

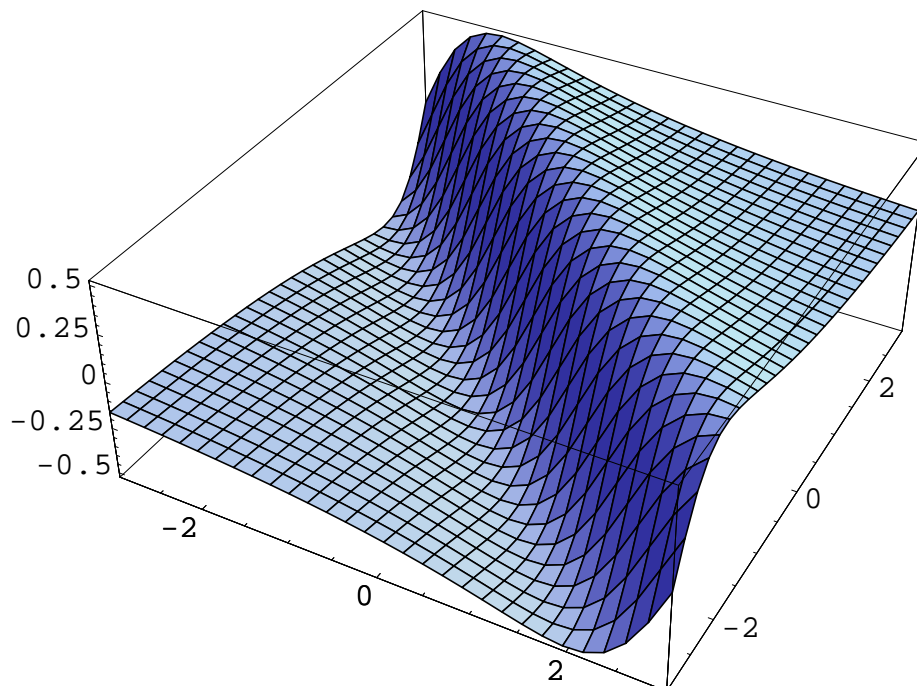
$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non possiamo utilizzare il teorema 1.10.11. Studiamo il valore della funzione intorno all'origine. Risulta  $f(0, 0) = 0$  e  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $x > 0$ , mentre  $f(x, y) < 0$  se e solo se  $x < 0$ . Quindi in ogni intorno dell'origine la  $f$  assume sia valori maggiori che valori minori di  $f(0, 0)$ . Ne segue che  $(0, 0)$  non è né punto di massimo né punto di minimo locale per  $f$ . ■

**Esempio 1.10.16.** Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1 + 2xy}.$$





Osserviamo che la  $f$  è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$  in quanto il denominatore della frazione è uguale a  $(x + y)^2 + 1 > 0$ . Le derivate parziali di  $f$  sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - (x + y)^2}{1 + (x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 - (x + y)^2}{1 + (x + y)^2}.$$

Le due derivate sono uguali fra di loro, quindi i punti dove si annulla il gradiente saranno quelli dove si annulla una delle due cioè:

$$\frac{1 - (x + y)^2}{1 + (x + y)^2} = 0.$$

Quindi deve essere  $1 = (x + y)^2$ , di conseguenza i punti stazionari sono quelli delle due rette parallele

$$y = -x + 1, \quad y = -x - 1.$$

Il calcolo della matrice Hessiana risulta inutile, in quanto il determinante è uguale a zero (è una conseguenza del fatto che si è in presenza di una retta di punti stazionari). Valutiamo allora la  $f$  nelle due rette stazionarie:

$$f(x, -x + 1) = \frac{x + 1 - x}{(x + 1 - x)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x, -x - 1) = \frac{x - 1 - x}{(x - 1 - x)^2 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Dimostriamo ora che  $\frac{1}{2}$  è il massimo della funzione mentre  $-\frac{1}{2}$  è il minimo. Cominciamo provando che

$$f(x, y) \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Infatti

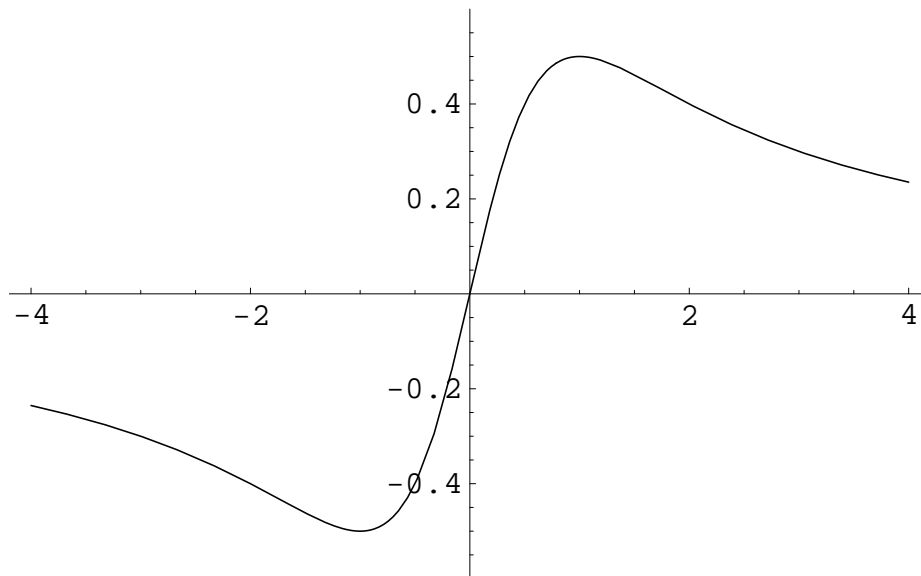
$$\begin{aligned} \frac{x+y}{(x+y)^2+1} \leq \frac{1}{2} &\iff 2(x+y) \leq (x+y)^2+1 \iff 0 \leq (x+y)^2-2(x+y)+1 \\ &\iff 0 \leq (x+y-1)^2 \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata in ogni punto  $(x, y)$  di  $\mathbb{R}^2$ . In modo del tutto analogo si prova che  $f(x, y) \geq -\frac{1}{2}$  in tutto  $\mathbb{R}^2$ .

Osserviamo che allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che la funzione  $f$  non dipende in realtà da  $x$  e da  $y$  in modo indipendente, bensì dalla quantità  $x+y$ . Se infatti poniamo  $x+y=t$  e definiamo  $\varphi(t) = \frac{t}{t^2+1}$  otteniamo che

$$f(x, y) = \varphi(x+y).$$

Un rapido studio della funzione  $\varphi$  mostra che assume il suo valore massimo nel punto  $t=1$  e tale massimo vale  $\frac{1}{2}$ , mentre assume il suo valore minimo nel punto  $t=-1$  e tale minimo vale  $-\frac{1}{2}$ .



I punti dove  $t=1$  sono appunto quelli dove  $x+y=1$  e quelli dove  $t=-1$  appartengono alla retta  $x+y=-1$ .

Il grafico della funzione  $\varphi$  non è altro che una sezione verticale del grafico di  $f$  ottenuta ad esempio con il piano  $x = y$ . ■

### 1.11. Regola della catena.

Si consideri un intervallo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  e una funzione  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si consideri inoltre una funzione  $f$  di  $n$  variabili definita in un insieme  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo la funzione composta  $\varphi = f \circ \gamma$ . La  $\varphi$  è una funzione di una variabile definita sull'intervallo  $(a, b)$  ed è a valori in  $\mathbb{R}$ :

$$\varphi : (a, b) \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Se in un punto  $\bar{t} \in (a, b)$  la  $\gamma$  è derivabile e nel corrispondente punto  $\bar{x} = \gamma(\bar{t}) \in A$  la  $f$  è differenziabile, risulta che  $\varphi$  è derivabile nel punto  $\bar{t}$  e vale la relazione:

$$\varphi'(\bar{t}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) \gamma'_j(\bar{t})$$

dove con  $\gamma_j$  si intende la  $j$ -esima componente della funzione a valori vettoriali  $\gamma$ , cioè

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in A \subset \mathbb{R}^n.$$

#### Esempio 1.11.1.

$$A = \mathbb{R}^n \quad f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} \quad (a, b) = (0, 2\pi) \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = \cos t e^{\sin t}$$

ed eseguendo la derivata direttamente si ottiene:

$$\varphi'(t) = \sin t e^{\sin t} + \cos t e^{\sin t} \cos t.$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando la regola della catena:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2}$$

$$\gamma_1(t) = \cos t, \quad \gamma_2(t) = \sin t, \quad \gamma'_1(t) = -\sin t, \quad \gamma'_2(t) = \cos t$$

quindi

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j} (\gamma(t)) \gamma'_j(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (\gamma(t)) \gamma'_2(t) = \\ &= e^{\gamma_2(t)} (-\sin t) + \gamma_1(t) e^{\gamma_2(t)} \cos t = e^{\sin t} (-\sin t) + \cos t e^{\sin t} \cos t.\end{aligned}$$

**Esempio 1.11.2.**

$$f(x, y, z) = \arctan(xy + z), \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\sin t + t \cos t + e^t}{1 + (t \sin t + e^t)^2}.$$

**Esercizio 1.11.3.**

$$f(x, y) = e^{y-x}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $(f \circ \gamma)'$ .

**Esercizio 1.11.4.**

$$f(x, y) = \log(\sqrt{2x} + \sqrt{2y}), \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ \cos^2 t \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $(f \circ \gamma)'$ .

**Esercizio 1.11.5.**

$$f(x, y) = x^4 \log y, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $(f \circ \gamma)'$ .

**Esercizio 1.11.6.**

$$f(x, y) = \frac{x+y}{xy^2}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $(f \circ \gamma)'$ .

### 1.12. Integrali multipli.

**Definizione 1.12.1.** Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  e  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue con  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , l'insieme

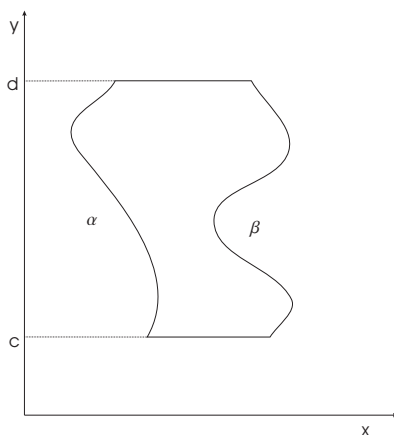
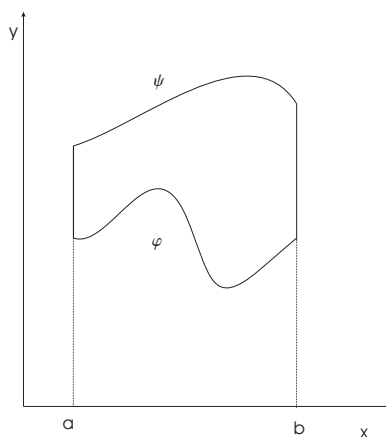
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

si dice **normale rispetto all'asse  $y$** .

Analogamente, dati  $c, d \in \mathbb{R}$  con  $c < d$  e  $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue con  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  per ogni  $y \in [c, d]$ , l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

si dice **normale rispetto all'asse  $x$** .



Non daremo la definizione di integrabilità in quanto ci porterebbe al di là dello scopo di questo corso. Ci occuperemo principalmente di funzioni continue definite su insiemi compatti, per le quali ha sicuramente senso l'operazione di integrazione (sia secondo Riemann che secondo Lebesgue). Ci limiteremo a illustrare un teorema che ci consentirà di

calcolare l'integrale di una funzione continua su un dominio normale rispetto ad uno degli assi. Per agevolare la visualizzazione del significato di integrale di una funzione continua e positiva di due variabili, facciamo la seguente osservazione (in analogia a quanto accade nel caso di funzioni di una sola variabile):

**Osservazione 1.12.2.** *Sia  $D$  un insieme normale rispetto a uno degli assi e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e non negativa. Allora l'integrale di  $f$  su  $D$  è il volume del solido cilindrico che ha per base  $D$  ed è compreso fra il grafico di  $f$  e il piano  $xy$ , cioè il volume dell'insieme*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

**Teorema 1.12.3. Formula di riduzione per gli integrali doppi**

*Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  un insieme normale rispetto all'asse  $y$  e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora:*

$$(1.12.1) \quad \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

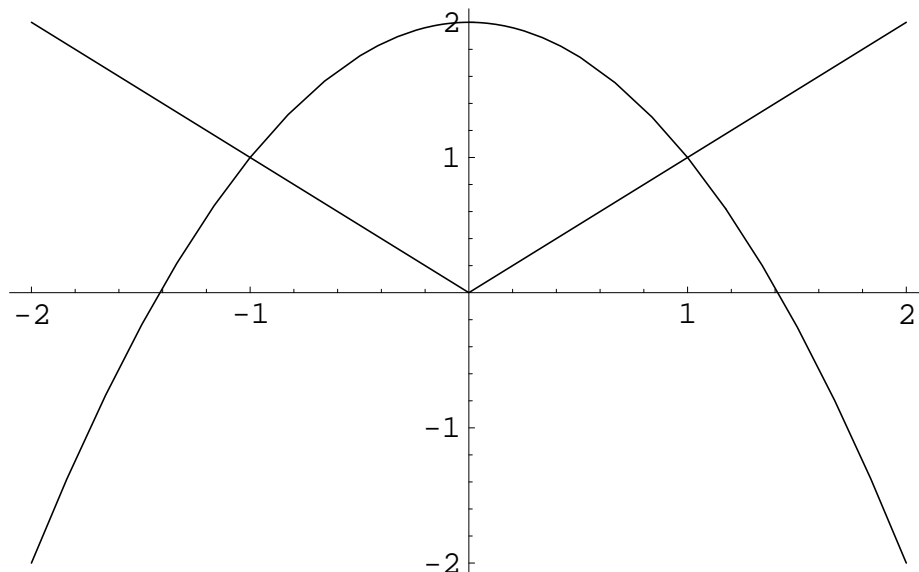
*Analogamente se  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$  è un insieme normale rispetto all'asse  $x$  e  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua allora:*

$$\int_E g(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x, y) dx \right) dy.$$

**Nota:** L'integrale a secondo membro dell'equazione (1.12.1) si scrive anche nella forma:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

**Esempio 1.12.4.** *Sia  $D$  l'insieme del piano limitato dai grafici delle funzioni  $y = 3 - x^2$  e  $y = 1 + |x|$ . Calcolare l'integrale doppio  $\int_D x^2 y dx dy$ .*



Troviamo i punti di intersezione dei due grafici risolvendo l'equazione  $2 - x^2 = |x|$  che ha soluzione  $x = \pm 1$ . Quindi l'insieme  $D$  può essere descritto nel seguente modo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |x| \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Applicando la formula di riduzione otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{|x|}^{2-x^2} x^2 y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=|x|}^{y=2-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 ((2-x^2)^2 - |x|^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 4x^2 - 5x^4 + x^6 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3}x^3 - x^5 + \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}. \end{aligned}$$

■

La nozione di integrale doppio si estende anche al caso di dimensione spaziale più alta (a scapito purtroppo della visualizzazione geometrica elementare). Daremo quindi la formula di riduzione per gli integrali tripli facendo presente che gli stessi concetti si estendono facilmente anche a integrali multipli in dimensione superiore a 3.

**Definizione 1.12.5.** *Un insieme della forma*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dove  $B$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^2$  e  $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue tali che  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in D$ , si dice insieme normale rispetto all'asse  $z$ . In modo analogo si definiscono gli insiemi normali rispetto agli altri assi.

**Osservazione 1.12.6.** La definizione di insieme misurabile utilizzata nella definizione 1.12.5 è complicata e coinvolge concetti assai delicati della teoria della misura per i quali rimandiamo a testi specifici sull'argomento. Ci limiteremo a pensare agli insiemi misurabili come a un'unione finita di insiemi normali rispetto ad uno degli assi.

**Teorema 1.12.7. Formula di riduzione per gli integrali tripli**

Sia  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$  un dominio normale rispetto all'asse  $z$  e sia  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora

$$\int_T f(x, y) dx dy dz = \int_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Osserviamo che questa formula ci consente di calcolare un integrale triplo eseguendo prima un integrale semplice e in seguito un integrale doppio. Se poi l'insieme  $D$  sul quale facciamo l'integrale doppio è normale rispetto a uno degli assi, possiamo ridurre anche questo integrale utilizzando il teorema 1.12.3.

**Esempio 1.12.8.** Dato  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$  calcolare l'integrale triplo

$$\int_T |y|z dx dy dz.$$

Osserviamo che  $T$  è l'insieme delimitato dall'ellissoide di equazione  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$  e il semicono di equazione  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Troviamo l'intersezione fra queste due superfici risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione l'insieme  $z = \frac{1}{2}$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  che rappresenta una circonferenza contenuta nel piano  $z = \frac{1}{2}$  con centro sull'asse  $z$  e raggio  $\frac{1}{2}$ . Quindi se poniamo

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

l'insieme  $T$  è normale rispetto all'asse  $z$  ed è descritto da:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{3}}\}.$$



Utilizzando la formula di riduzione per gli integrali tripli otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_T |y|z \, dx \, dy \, dz &= \int_D |y| \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{3}}} z \, dz \right) dx \, dy = \int_D |y| \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{3}}} dx \, dy = \\ &= \frac{1}{6} \int_D |y|(1 - 4x^2 - 4y^2) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Abbiamo ridotto l'integrale triplo su  $T$  ad un integrale doppio su  $D$ . Ma  $D$  è un insieme normale sia rispetto all'asse  $x$  che all'asse  $y$ . Scriviamolo come normale rispetto all'asse  $x$ :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \right\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_T |y|z \, dx \, dy \, dz &= \frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |y| \, dy \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} (1 - 4x^2 - 4y^2) \, dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |y| \left[ x - \frac{4}{3}x^3 - 4xy^2 \right]_{x=-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{x=\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |y| \left( \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 4y^2 \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che la funzione integranda è pari e che l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, quindi l'ultimo integrale diventa:

$$\frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} y \left( \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 4y^2 \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \right) dy.$$

Eseguiamo ora la sostituzione  $s = \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$  ottenendo

$$-\frac{2}{3} \int_{\frac{1}{2}}^0 \left( s - \frac{4}{3}s^3 - 4 \left( \frac{1}{4} - s^2 \right) s \right) s \, ds = \frac{16}{9} \int_0^{\frac{1}{2}} s^4 \, ds = \frac{16}{9} \left[ \frac{s^5}{5} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{90}. \quad \blacksquare$$

# Capitolo 2

## Serie di funzioni

### 2.1. Convergenza.

**Definizione 2.1.1.** Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  e una famiglia numerabile di funzioni definite in  $A$ ,  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , diremo che la serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  **converge**

**puntualmente** in  $\bar{x} \in A$  se esiste finito il limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n(\bar{x})$ . Il valore di tale limite si dice **somma della serie nel punto**  $\bar{x}$ . Se la serie converge puntualmente in ogni punto di un sottoinsieme  $B \subset A$  si dice che converge **puntualmente** in  $B$ .

**Definizione 2.1.2.** Dati  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1, il più grande sottoinsieme di  $A$  dove la serie converge puntualmente si dice **insieme di convergenza puntuale** della serie.

**Definizione 2.1.3.** Siano  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1. Supponiamo che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  converga puntualmente in  $B \subset A$  e sia  $S(x)$  la sua somma, cioè  $S(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n(x)$ . Se risulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \left| S(x) - \sum_{n=0}^k f_n(x) \right| = 0$$

diremo che la serie **converge uniformemente** in  $B$ .

**Definizione 2.1.4.** Siano  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1. Diremo che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  **converge assolutamente** in  $B \subset A$  se converge  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ , per ogni  $x \in B$ .

**Definizione 2.1.5.** Siano  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1. Diremo che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  **converge totalmente** in  $B \subset A$  se converge la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in B} |f_n(x)|$ .

**Teorema 2.1.6.** Siano  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1. Se la serie converge totalmente in  $B \subset A$  allora converge anche uniformemente e assolutamente sullo stesso

insieme. Se la serie converge uniformemente o assolutamente in  $B \subset A$  allora converge anche puntalmente sullo stesso insieme.

**Teorema 2.1.7.** Siano  $A$  e  $f_n$  come nella definizione 2.1.1. Se le funzioni  $f_n$  sono continue in  $A$  e la serie converge uniformemente in  $A$  allora la somma della serie è una funzione continua in  $A$ .

**Esempio 2.1.8.** Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Supponiamo  $x \neq 1$  e calcoliamo le somme parziali:

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

infatti

$$(x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1)(x - 1) = x^{k+1} + x^k + \dots + x - x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 = x^{k+1} - 1.$$

Quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso  $x = 1$  escluso precedentemente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} k + 1 = +\infty.$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale della serie è l'intervallo  $(-1, 1)$  e la sua somma è la funzione  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ . Vediamo ora che la serie non converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale. Infatti:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (-1, 1)} |S(x) - S_k(x)| &= \sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \right| = \sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{1 + x^{k+1} - 1}{1-x} \right| \geq \\ &\geq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{k+1}}{1-x} = +\infty. \end{aligned}$$

Mostriamo infine che la serie converge totalmente in ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$  con  $0 < a < 1$ . Per fare questo valutiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in [-a, a]} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < +\infty.$$

Dal teorema 2.1.6 si ottiene che la serie converge anche uniformemente in tale intervallo.

■

Ricordiamo ora un paio di risultati fondamentali sulla convergenza delle serie numeriche:

**Teorema 2.1.9.** Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Dim.** Indichiamo con  $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$  le somme parziali della serie. Data la convergenza risulterà esistere il limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \doteq S.$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

■

**Teorema 2.1.10. (Criterio di Leibniz).** Una serie della forma  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  con  $a_n$  non crescente e infinitesima è convergente.

**Esempio 2.1.11.** Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Esaminiamo prima la convergenza puntuale. Dato  $x \in (-1, 1)$  risulta:

$$(2.1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-x} < +\infty.$$

Se invece  $x = -1$  avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibnitz, essendo la successione  $\frac{1}{n}$  decrescente e infinitesima.

Se  $|x| > 1$  le serie non converge perchè il suo termine generale non è infinitesimo. Nel punto  $x = 1$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che è la ben nota serie armonica divergente. L'insieme di convergenza puntuale della serie è quindi l'intervallo  $[-1, 1)$ .

Per quanto riguarda la convergenza assoluta, la stima (2.1.1) ci indica l'intervallo  $(-1, 1)$ . La convergenza totale invece si ha in intervalli del tipo  $[-a, a]$  con  $0 < a < 1$ , infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [-a, a]} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} < +\infty$$

grazie alla stima (2.1.1) . In tali insiemi si ha quindi anche la convergenza uniforme (vedi teorema 2.1.6 ).

Per completezza di informazione, in realtà la serie converge uniformemente in intervalli del tipo  $[-1, a]$  con  $-1 < a < 1$ . Questo è una conseguenza del teorema di Abel sulla convergenza delle serie di potenze, ma va ben oltre il nostro interesse in questo contesto.

## 2.2. Serie di Fourier.

**Definizione 2.2.1.** *Si dice polinomio trigonometrico una somma del tipo*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

oppure

$$\sum_{n=-k}^k c_n e^{inx}$$

dove  $a_n, b_n, c_n$  sono numeri complessi.

**Definizione 2.2.2.** *Si dice serie trigonometrica un'espressione del tipo*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

oppure

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

dove  $a_n, b_n, c_n$  sono numeri complessi e la seconda serie è da intendersi sommata in modo "simmetrico", cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-k}^k c_n e^{inx} \right).$$

Il termine  $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  si dice **armonica di ordine  $n$** , così come il termine  $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ .

**Osservazione 2.2.3.**

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

quindi

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n \cos(nx) + i c_n \sin(nx) + c_{-n} \cos(nx) - i c_{-n} \sin(nx).$$

Se vogliamo che le due espressioni della serie trigonometrica siano uguali fra di loro, cioè:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

basterà porre:

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0, \quad c_n + c_{-n} = a_n, \quad i(c_n - c_{-n}) = b_n.$$

**Osservazione 2.2.4.** La somma di una serie trigonometrica (ammesso che converga) è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Possiamo quindi limitarci a considerare  $x \in [0, 2\pi]$  oppure  $x$  in qualsiasi altro intervallo di  $\mathbb{R}$  di ampiezza  $2\pi$ .

**Osservazione 2.2.5.** Se le serie numeriche  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergono assolutamente allora la serie trigonometrica:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converge uniformemente.

**Dim.**

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$$

quindi la serie trigonometrica converge totalmente e, per il teorema 2.1.6, anche uniformemente in  $[0, 2\pi]$ . ■

**Osservazione 2.2.6.** Se vale la condizione dell'osservazione 2.2.5 allora la funzione somma è continua.

**Dim.** Basta osservare che le funzioni  $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  sono funzioni continue e la convergenza è uniforme. ■

Nel seguito avremo bisogno di alcune relazioni integrali riguardo la famiglia di funzioni trigonometriche  $\{\cos(nx), \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Lemma 2.2.7.**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

**Dim.** Consideriamo prima il caso  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \left[ \frac{\sin(nx)}{n} \cos(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} m \sin(mx) dx = \\ &= \frac{m}{n} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} m \cos(mx) dx = \frac{m^2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \end{aligned}$$

quindi:

$$\left( 1 - \frac{m^2}{n^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$$

e, di conseguenza, se  $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

Sempre nel caso  $n \neq 0$  ma  $n = m$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx &= \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{\cos^2 t}{n} dt = \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{1}{n} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2n} \left[ t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-n\pi}^{n\pi} = \frac{1}{2n} (n\pi + n\pi) = \pi. \end{aligned}$$

Se invece  $n = 0$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \cos 0 dx = 2\pi.$$

Dai risultati precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) m \cos(mx) dx = \\ &= \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{m}{n} \pi = \pi & \text{se } m = n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultimo integrale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$$

basta osservare che la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine per concludere che l'integrale è nullo. ■

Introduciamo ora uno spazio di funzioni che sarà utile nel seguito:

**Definizione 2.2.8.** Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}$  misurabile, indichiamo con  $L^2(\Omega)$  l'insieme delle funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  integrabili (secondo Lebesgue) tali che

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

(nei casi di nostro interesse l'insieme  $\Omega$  sarà in genere un intervallo, una semiretta o tutta la retta reale).

In questo spazio enunciamo (senza dimostrazione) una disuguaglianza fondamentale:

**Teorema 2.2.9. Disuguaglianza di Hölder.**

Date due funzioni  $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$  risulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definizione 2.2.10.** Date due funzioni  $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$  definiamo il loro **prodotto scalare** nel seguente modo:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$



Se risulta  $\langle f, g \rangle = 0$  le due funzioni si dicono **ortogonali**.

**Osservazione 2.2.11.** È facile verificare che questo prodotto scalare gode di proprietà analoghe a quelle del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$  (vedi definizione 1.2.1).

**Definizione 2.2.12.** Data una famiglia numerabile  $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  di funzioni di  $L^2([-\pi, \pi])$ , diremo che  $\mathcal{F}$  è un **sistema ortonormale** se risulta

$$\langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m. \end{cases}$$

**Osservazione 2.2.13.**

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

è un sistema ortonormale.

**Dim.** È una immediata conseguenza del lemma 2.2.7. ■

**Teorema 2.2.14. Disuguaglianza di Bessel.** Sia  $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormale. Data  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  e  $n \in \mathbb{N}$  poniamo

$$c_n = \langle f, f_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f_n(x)} dx.$$

Allora risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

In particolare se scegliamo come sistema ortonormale l'insieme delle funzioni trigonometriche dell'osservazione 2.2.13, vale il seguente teorema:

**Teorema 2.2.15. Identità di Parseval.** Data  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  poniamo

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

allora risulta

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Inoltre la serie di funzioni

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converge a  $f$  nello spazio  $L^2([-\pi, \pi])$ .

**Teorema 2.2.16.** Supponiamo che per certi coefficienti  $a_n, b_n$  la serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converga uniformemente su  $\mathbb{R}$  e sia  $f(x)$  la sua somma. Allora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Dim.**

Sia  $k \in \mathbb{N}$  fissato. Allora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \cos(kx) dx$$

sfruttando la convergenza uniforme della serie possiamo scambiare la sommatoria con l'integrale, quindi l'espressione precedente diventa:

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(kx) dx \right).$$

Se  $k \neq 0$  il primo di questi integrali è nullo, così come il terzo, mentre il secondo è nullo per ogni  $n \neq k$ . Resta quindi solo il termine con  $n = k$  relativo al coseno nella sommatoria. La (2.2.1) si riduce quindi a

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2(kx) dx = \pi a_k.$$

Quindi  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ . Analogo risultato per  $k = 0$  e nel caso di  $b_k$ . ■

**Definizione 2.2.17.** Data  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2\pi$ , integrabile sull'intervallo  $[0, 2\pi]$  indicheremo con

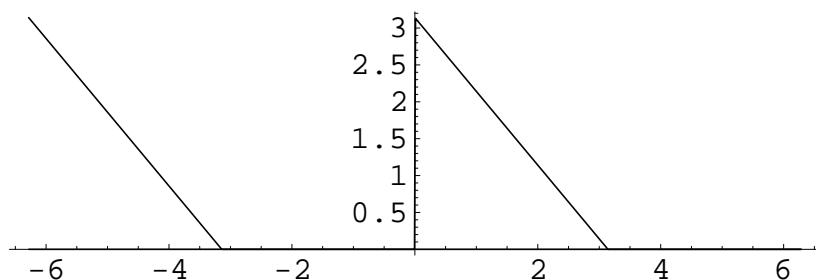
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

i suoi **coefficienti di Fourier** e scriveremo:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

independente dalla convergenza o meno della serie. Nel caso la serie converga a  $f$  in  $x$  diremo che  $f$  è **svilupabile in serie di Fourier** in  $x$ .

**Esempio 2.2.18.** Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $f(x) = \max\{\pi - x, 0\}$  con  $x \in [0, 2\pi)$ .



Prolunghiamo per periodicit  la funzione a tutto  $\mathbb{R}$  e calcoliamo i coefficienti di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi - x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dato ora  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ (\pi - x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \pi \sin(n\pi) + \frac{1}{n\pi} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n^2\pi} (\cos(n\pi) - \cos 0) = -\frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \\ &= \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[ x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx = \\ &= -\frac{1}{n} (\cos(n\pi) - 1) + \frac{1}{n\pi} \pi \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} ((-1)^n - 1) + \frac{1}{n} (-1)^n = \\ &= \frac{1}{n} ((-1)^n + 1 - (-1)^n) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$  è il seguente:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

La serie converge a  $f(x)$  in ogni punto dell'intervallo  $(0, 2\pi)$ . Calcoliamola nel punto  $x = \pi$ :

$$0 = f(\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

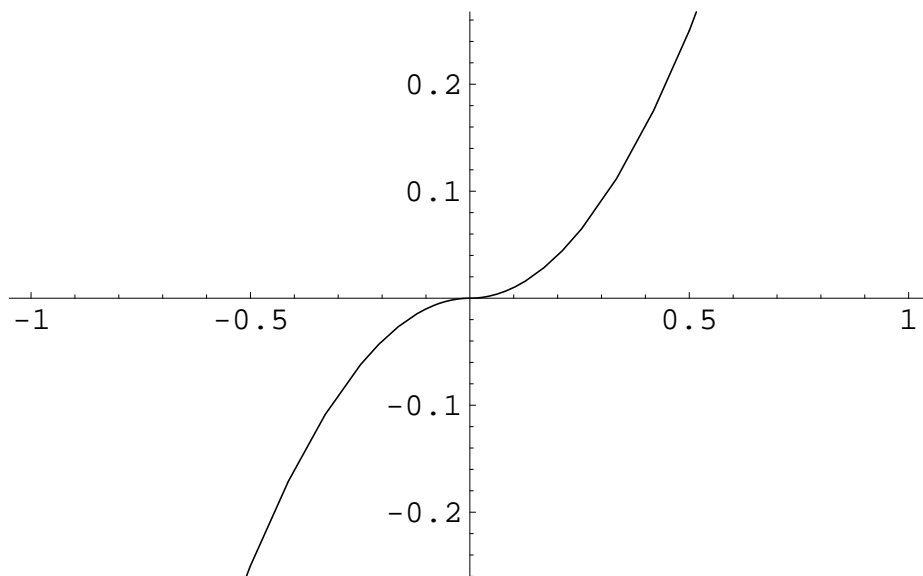
ne segue che

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

■

**Esempio 2.2.19.** Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{|x|} & \text{se } x \neq -\pi, 0, \pi \\ 0 & \text{se } x = -\pi, 0, \pi \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi].$$



Osserviamo che  $f$  è dispari, quindi  $a_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-x^2 \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \frac{\cos(nx)}{n} dx = \\
 &= \frac{-2}{n\pi} \pi^2 \cos(n\pi) + \frac{4}{n\pi} \left[ x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \\
 &= -\frac{2\pi}{n} (-1)^n - \frac{4}{n^2\pi} \left[ \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{-2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{n^3\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \\
 &= \frac{-2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{n^3\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-2\pi}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{n^3\pi} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

Esaminiamo ora brevemente le modifiche da apportare quando si considerano funzioni periodiche di periodo  $T$  qualsiasi e non necessariamente uguale a  $2\pi$ .

Sia  $f$  periodica di periodo  $T \in \mathbb{R}$  cioè  $f(t+T) = f(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Poniamo allora  $g(s) = f\left(s \frac{T}{2\pi}\right)$ . Osserviamo che  $g$  è periodica di periodo  $2\pi$ , infatti:

$$g(s + 2\pi) = f\left((s + 2\pi) \frac{T}{2\pi}\right) = f\left(s \frac{T}{2\pi} + T\right) = f\left(s \frac{T}{2\pi}\right) = g(s).$$

Quindi, ponendo  $t = \frac{sT}{2\pi}$ , si ottiene  $s = \frac{t2\pi}{T}$ . Allora:

$$f(t) = g\left(\frac{t2\pi}{T}\right) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{t2\pi}{T}\right) + b_k \sin\left(k\frac{t2\pi}{T}\right)$$

dove  $a_k$  e  $b_k$  sono i coefficienti di Fourier relativi a  $g$  periodica di periodo  $2\pi$ . cioè:

(2.2.2)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ks) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^T g\left(t\frac{2\pi}{T}\right) \cos\left(kt\frac{2\pi}{T}\right) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(kt\frac{2\pi}{T}\right) dt;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \sin(ks) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^T g\left(t\frac{2\pi}{T}\right) \sin\left(kt\frac{2\pi}{T}\right) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(kt\frac{2\pi}{T}\right) dt.$$

Quindi da ora in avanti ci possiamo limitare a considerare solo funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .

Enunciamo ora un importante risultato sulla convergenza delle serie di Fourier:

**Teorema 2.2.20.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e supponiamo che  $f$  sia continua sull'intervallo  $[0, 2\pi]$  a parte un numero finito di punti  $x_1, \dots, x_m$ . Supponiamo che in tali punti esistano finiti i limiti destro e sinistro della funzione che indicheremo con:*

$$f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y), \quad f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y).$$

Supponiamo inoltre che in ogni punto di  $\mathbb{R}$  esistano finiti il limite destro e sinistro del rapporto incrementale, cioè:

$$\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x^-)}{y - x}, \quad \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x^+)}{y - x}.$$

Allora la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente in tutto  $\mathbb{R}$  al valore

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

che nei punti di continuità della  $f$  coincide con  $f(x)$ .

Diamo ora una stima della velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier:

**Teorema 2.2.21.** Se  $f$  è periodica di periodo  $2\pi$  e  $f \in C^k(\mathbb{R})$  allora i suoi coefficienti di Fourier  $a_n, b_n$  verificano la relazione:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

cioè: esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $|a_n| \leq \frac{M}{n^k}, |b_n| \leq \frac{M}{n^k}$ .

**Dim.** Proviamo la tesi nel caso  $k = 1$ ; il caso generale segue per induzione. Sia quindi  $f \in C^1(\mathbb{R})$  periodica di periodo  $2\pi$ . Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

quindi

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t) \sin(nt)| dt \leq \frac{1}{n\pi} \pi \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f'(t)| \doteq \frac{M}{n}$$

avendo sfruttato, nell'ultima disuguaglianza la continuità di  $f'$ . Per quanto riguarda  $b_n$  il risultato è analogo:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ f(t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} (f(\pi) \cos(n\pi) - f(-\pi) \cos(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che  $f$  è periodica di periodo  $2\pi$ . Allora, come prima:

$$|b_n| \leq \frac{1}{n} \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f'(t)| \doteq \frac{M}{n}.$$

■

**Corollario 2.2.22.** Se  $f \in C^2(\mathbb{R})$  è periodica di periodo  $2\pi$  allora la sua serie di Fourier di converge uniformemente verso  $f$ .

**Dim.** Per il teorema 2.2.21 possiamo trovare  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} (|a_n| |\cos(nx)| + |b_n| |\sin(nx)|) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} + \frac{M}{n^2} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Allora la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente in  $\mathbb{R}$ , e per il teorema 2.1.6, converge anche uniformemente. Il fatto che la somma sia proprio  $f$  è una conseguenza del teorema 2.2.20. ■

Vale in realtà un risultato più forte rispetto al teorema 2.2.21 :

**Teorema 2.2.23.** *Se  $f$  è periodica ed è di classe  $C^k$  in  $\mathbb{R}$ , allora le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{k-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^{k-1}$$

sono convergenti ( $a_n$  e  $b_n$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$ ).

Daremo ora un esempio di applicazione delle serie di Fourier:

### 2.3. Equazione della corda vibrante.

Esaminiamo il problema fisico del moto di una corda elastica vincolata agli estremi e perturbata inizialmente rispetto alla sua configurazione di riposo. Supponiamo quindi di avere una corda che in posizione di riposo occupa il segmento di estremi 0 ed  $l$  sull'asse delle  $x$  del piano cartesiano. La corda è vincolata nei punti di coordinate  $(0, 0)$  e  $(l, 0)$ . Inizialmente, cioè all'istante  $t = 0$ , la corda viene perturbata facendole assumere la configurazione del grafico di una assegnata funzione  $f(x)$ . Assegneremo quindi una funzione

$$f : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$$

che supporremo di classe  $C^3$  per questioni che saranno chiare alla fine. Ci chiediamo che forma avrà la corda all'istante generico  $t > 0$ . Tale forma sarà descritta dal grafico di una funzione  $u(x, t)$  nel senso che per un fissato  $\bar{t} > 0$  la posizione occupata dalla corda sarà quella dei punti del grafico della funzione

$$x \longmapsto u(x, \bar{t}).$$



La legge fisica che regola il moto della corda è descritta (in un modello semplificato) dall'equazione:

$$(2.3.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dove  $k \in \mathbb{R}$  è un numero fissato che dipende dai parametri fisici del problema. Cercheremo quindi una funzione

$$u : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

di classe  $C^2$  che soddisfa l'equazione (2.3.1). Inoltre vogliamo che all'istante  $t = 0$  la corda occupi la posizione descritta dal grafico di  $f$ , cioè:

$$(2.3.2) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, l]$$

e che inizialmente la corda sia ferma, cioè:

$$(2.3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, l].$$

Infine abbiamo la condizione di vincolo nei punti estremi della corda:

$$(2.3.4) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Cercheremo la soluzione nell'ambito delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier rispetto alla variabile  $x$ . Per semplicità supporremo  $l = \pi$ .

Prolunghiamo la  $f$  in modo periodico dispari, cioè poniamo

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in [-\pi, 0]$$

e successivamente

$$f(x + 2n\pi) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dal fatto che  $f \in C^3([0, l])$  e che  $f(0) = f(l) = 0$  possiamo dedurre, grazie al teorema 2.2.20, che  $f$  è sviluppabile in serie di Fourier in tutto  $\mathbb{R}$  (e che la serie converge proprio a  $f$ ). Essendo la  $f$  prolungata in modo dispari, la serie sarà di soli seni, quindi:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo quindi una funzione  $u(x, t)$  della forma

$$(2.3.5) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(nx)$$

dove i coefficienti  $c_n$  dipendono da  $t$  e li supporremo di classe  $C^2$ . Tali coefficienti devono soddisfare le condizioni (2.3.2), (2.3.3) e l'equazione (2.3.1). Osserviamo che le condizioni (2.3.4) sono automaticamente soddisfatte supponendo che la  $u$  abbia la forma (2.3.5).

Sostituendo  $t = 0$  nella (2.3.5) si ha:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin(nx).$$

Quindi la (2.3.2) è soddisfatta sicuramente se

$$(2.3.6) \quad c_n(0) = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supponendo ora che la serie

$$(2.3.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin(nx)$$

converga uniformemente, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin(nx)$$

quindi la condizione (2.3.3) diventa:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(0) \sin(nx)$$

che è soddisfatta se

$$(2.3.8) \quad c'_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se inoltre le seguenti serie

$$(2.3.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c''_n(t) \sin(nx), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(t) \sin(nx)$$

convergono uniformemente, si ha che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c''_n(t) \sin(nx), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(t) \sin(nx)$$

quindi la (2.3.1) è soddisfatta se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \sin(nx) = -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n(t) \sin(nx)$$

cioè se

$$c_n''(t) = -k^2 n^2 c_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questa è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che ha soluzione:

$$(2.3.10) \quad c_n(t) = \alpha_n \cos(knt) + \beta_n \sin(knt)$$

con  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  costanti da determinare in base alla condizioni iniziali. Infatti, sostituendo  $t = 0$  nella (2.3.10), risulta:

$$c_n(0) = \alpha_n$$

mentre derivando la (2.3.10) e sostituendo  $t = 0$  si ha:

$$c_n'(t) = -\alpha_n kn \sin(knt) + \beta_n kn \cos(knt), \quad c_n'(0) = \beta_n kn.$$

Allora dalle (2.3.6) e (2.3.8) si ottiene:

$$\alpha_n = b_n, \quad \beta_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo questi valori nella (2.3.10) si ha:

$$c_n(t) = b_n \cos(knt).$$

Ne segue che

$$(2.3.11) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(knt) \sin(nx).$$

Verifichiamo ora che le serie (2.3.7) e (2.3.9) convergono uniformemente. Sostituendo nella (2.3.7) l'espressione ottenuta per  $c_n'$  e considerando la serie dei valori assoluti si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n'(t) \sin(nx)| = \sum_{n=1}^{\infty} |-kn b_n \sin(knt) \sin(nx)| \leq |k| \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| < |k| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^2 < \infty$$

dato che  $f \in C^3$ , quindi la serie dei suoi coefficienti si Fourier moltiplicati per  $n^2$  converge (vedi teorema 2.2.23). Ne segue che la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente.

Analogamente per le due serie in (2.3.9) abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n''(t) \sin(nx)| = \sum_{n=1}^{\infty} |-k^2 n^2 b_n \cos(knt) \sin(nx)| \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^2 < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^2 c_n(t) \sin(nx)| = \sum_{n=1}^{\infty} |n^2 b_n \cos(knt) \sin(nx)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n| < \infty$$

e anche queste due serie convergono uniformemente. Quindi la (2.3.11) rappresenta la soluzione del problema della corda vibrante. Scriviamo ora tale soluzione in una forma più esplicita. Ricordiamo la ben nota formula trigonometrica:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

e applichiamo alla soluzione (2.3.11) con  $\alpha = nx$  e  $\beta = knt$ . Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(knt) \sin(nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin(nx + knt) + \sin(nx - knt)) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(x + kt)) \right) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(x - kt)) \right) \right) = \frac{f(x + kt) + f(x - kt)}{2} \end{aligned}$$

dove abbiamo ricordato che i  $b_n$  sono i coefficienti di Fourier della  $f$ . Questa equazione esprime il fatto che, fissato un punto  $x \in \mathbb{R}$ , l'ampiezza dell'oscillazione della corda nel punto  $x$  all'istante  $t$  è data dalla media delle ampiezze calcolate nei punti  $x + kt$  e  $x - kt$  sulla configurazione iniziale.

# Capitolo 3

## Funzioni di variabile complessa

In tutto il capitolo identificheremo, da un punto di vista geometrico,  $\mathbb{C}$  con il piano  $\mathbb{R}^2$ . Inoltre indicheremo con  $\Re(z)$  la parte reale di  $z$  e con  $\Im(z)$  la sua parte immaginaria, cioè:

$$z = \Re(z) + i\Im(z).$$

### 3.1. La funzione esponenziale e il logaritmo.

In questo paragrafo definiremo la funzione  $e^z$  con  $z \in \mathbb{C}$ . tale funzione sarà definita in modo che continuiamo a valere le proprietà fondamentali che si avevano nel caso reale. Risulterà infatti:

$$(3.1.1) \quad e^{z+w} = e^z e^w, \quad e^{zw} = (e^z)^w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Scriviamo  $z = x + iy$  dove  $x = \Re(z)$ ,  $y = \Im(z)$ . Allora definiamo

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

di conseguenza

$$(3.1.2) \quad e^z = e^{\Re(z)} (\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z))).$$

È facile verificare che con questa definizione valgono le proprietà (3.1.1). Osserviamo che la funzione esponenziale non è iniettiva, infatti:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) = e^z.$$

Vogliamo ora occuparci di definire la funzione inversa, che per analogia al caso reale chiameremo funzione **logaritmo**. Cerchiamo quindi di risolvere l'equazione

$$(3.1.3) \quad e^z = w$$

rispetto alla  $z$ , avendo assegnato  $w$ . Consideriamo i moduli:

$$|e^z| = |w|.$$

Ma, dalla (3.1.2) , essendo  $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = 1$ , per qualsiasi  $\alpha$ , si ottiene che

$$|e^z| = e^{\Re(z)}.$$

Ne segue che

$$\Re(z) = \log |w|$$

dove il logaritmo è da intendersi come il logaritmo reale. Osserviamo anche che questa equazione non è risolvibile se  $w = 0$ . Passiamo ora all'argomento. È bene precisare che con la notazione  $\text{Arg}(w)$  intendiamo l'**argomento principale** di  $w$ , cioè quell'unico angolo  $\theta$  nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$  tale che

$$|w| \cos \theta = \Re(w) , \quad |w| \sin \theta = \Im(w)$$

(l'unicità viene meno ovviamente nel caso banale  $w = 0$ ). Allora, dalla (3.1.3) deve essere

$$\text{Arg}(e^z) = \text{Arg} w.$$

Ma la (3.1.2) ci assicura che esiste  $k \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\text{Arg}(w) = \Im(z) + 2k\pi.$$

Ovviamente, a causa della non iniettività dell'esponenziale, dovremo scegliere un particolare valore per  $\Im(z)$  e sceglieremo quello più "semplice" cioè  $\Im(z) = \text{Arg}(w)$ . Allora avremo:

$$\log(w) = z = \Re(z) + i\Im(z) = \log |w| + i\text{Arg}(w).$$

La funzione logaritmo nel caso complesso è quindi definita in tutto  $\mathbb{C}$  tranne in punto 0. Risultano quindi verificate le seguenti identità:

$$e^{\log z} = z , \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

$$\log(e^z) = z , \quad \forall z \in \mathbb{C}, 0 \leq \Im(z) < 2\pi.$$

Valgono le consuete proprietà del logaritmo:

$$\log(zw) = \log z + \log w$$

$$\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w$$

con l'avvertenza che tutte le parti immaginarie delle equazioni precedenti siano comprese nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$ .

### 3.2. Le funzioni trigonometriche.

Le funzioni trigonometriche di variabile complessa sono derivate semplicemente dalla funzione esponenziale tramite le formule di Eulero:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

In modo analogo si definiscono seno e coseno iperbolico:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Osserviamo che nel caso  $z$  sia un numero reale (nel senso che  $\Im(z) = 0$ ), queste definizioni coincidono con quelle usuali. Data la periodicità della funzione esponenziale segue che seno e coseno sono periodiche di periodo  $2\pi$  (come nel caso reale), cioè:

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione  $\sin z$  si annulla solo per  $z = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , mentre la funzione  $\cos z$  si annulla solo per  $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . In altre parole le funzioni trigonometriche complesse hanno gli zeri solo sull'asse reale e negli stessi punti delle corrispondenti funzioni reali. Definiamo ora la tangente:

$$(3.2.1) \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

definita per  $z \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . È facile verificare che

$$\tan(z + k\pi) = \tan z, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

quindi la tangente è una funzione periodica di periodo  $\pi$ , pertanto non è iniettiva. Cerchiamo ora di definire l'inversa della tangente. Consideriamo quindi l'equazione  $\tan z = w$  e risolviamola nella variabile  $z$ . Utilizzando l'espressione (3.2.1) si ha:

$$-i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = w$$

quindi, moltiplicando numeratore e denominatore per  $e^{iz}$ :

$$-i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = w$$

$$e^{2iz}(1 - iw) = 1 + iw.$$

Se  $w = -i$  l'equazione precedente non ha soluzione. Quindi supponiamo  $w \neq -i$  e dividiamo per  $1 - iw$ :

$$e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

Per la risolubilità di questa equazione, essendo l'esponenziale una funzione sempre diversa da zero, dovrà essere

$$\frac{1 + iw}{1 - iw} \neq 0$$

cioè  $w \neq i$ . In tal caso avremo

$$2iz = \log \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

dove questa non è ovviamente l'unica soluzione, poiché la tangente non è iniettiva, ma è l'unica soluzione con la parte reale compresa nell'intervallo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Avremo quindi:

$$(3.2.2) \quad \arctan w = -\frac{i}{2} \log \left( \frac{1 + iw}{1 - iw} \right).$$

L'insieme di definizione dell'arcotangenete è quindi tutto il piano complesso privato dei punti  $i$  e  $-i$ , la sua immagine è la striscia di piano definita da

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re(z) \leq \frac{\pi}{2}, z \neq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

### 3.3. Integrali curvilinei complessi.

**Definizione 3.3.1.** Consideriamo un'insieme  $\Omega$  aperto e connesso contenuto nel piano complesso  $\mathbb{C}$ . Una funzione continua

$$\gamma : S \longrightarrow \Omega$$

definita su un insieme connesso  $S \subset \mathbb{R}$ , si dice **curva** (complessa) in  $\Omega$ . Se la funzione  $\gamma$  è di classe  $C^k$  parleremo di **curva di classe**  $C^k$ .

Ricordiamo brevemente che gli unici sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}$  sono i segmenti, le semirette e tutta la retta reale. Nella maggior parte dei casi avremo a che fare con curve definite su segmenti chiusi, cioè  $S = [a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

**Esempio 3.3.2.** Consideriamo

$$S = [0, \pi], \quad \gamma(t) = 3e^{it}.$$

La  $\gamma$  è la curva che percorre la semicirconferenza di centro l'origine e raggio uguale a 3 in senso antiorario a partire dal punto di coordinate  $(3, 0)$  fino al punto di coordinate  $(-3, 0)$ .



**Definizione 3.3.3.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Data  $\gamma$  curva di classe  $C^1$  in  $\Omega$ , indichiamo con  $\int_{\gamma} f(z) dz$  l'integrale (curvilineo) di  $f$  su  $\gamma$  definito nel seguente modo:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

**Esempio 3.3.4.** Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\gamma} z^2 + 5z dz$$

dove  $\gamma$  è la curva dell'esempio 3.3.2 .

Calcoliamo subito la derivata di  $\gamma$ :

$$\gamma'(t) = 3ie^{it}.$$

Quindi, secondo la definizione 3.3.3

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 + 5z dz &= \int_0^{\pi} \left( (3e^{it})^2 + 5(3e^{it}) \right) 3ie^{it} dt = \int_0^{\pi} (9e^{2it} + 15e^{it}) 3ie^{it} dt = \\ &= 9i \int_0^{\pi} 3e^{3it} + 5e^{2it} dt = 9i \left[ 3 \frac{e^{3it}}{3i} + \frac{5}{2} \frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{\pi} = 9 \left( e^{3i\pi} + \frac{5}{2} e^{2i\pi} - 1 - \frac{5}{2} \right) = \\ &= 9(-1 - 1) = -18. \end{aligned}$$

■

### 3.4. Funzioni olomorfe.

**Definizione 3.4.1.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e sia  $z_0 \in \Omega$  fissato. Se esiste

$$(3.4.1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

diremo che  $f$  è derivabile in senso complesso (o semplicemente derivabile) in  $z_0$  e indicheremo con  $f'(z_0)$  la sua derivata, cioè il valore del limite (3.4.1) . Se  $f$  è derivabile in ogni punto di  $\Omega$  diremo che  $f$  è **olomorfa** in  $\Omega$  o anche che  $f$  è **analitica** in  $\Omega$ .

**Teorema 3.4.2. (Condizioni di Cauchy – Riemann)** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Indichiamo con  $u$  e  $v$  rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di  $f$  e consideriamo  $u$  e  $v$  come funzioni delle variabili reali  $x$  e  $y$  con  $z = x + iy$ , cioè:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(stiamo identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  e considerando  $\Omega$  come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ ). Allora  $f$  è olomorfa in  $\Omega$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $\Omega$  e valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

oppure, in modo equivalente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

(dove è stato usato il leggero abuso di notazione  $f(x, y) = f(x + iy)$ ).

**Dim.** Verificheremo solo che la condizione è necessaria senza provare la differenziabilità di  $u$  e  $v$ . Supponiamo quindi che  $f$  sia olomorfa in  $\Omega$  e fissiamo  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Calcoliamo il limite del rapporto incrementale che definisce  $f'(z_0)$  con  $z$  che tende a  $z_0$  su una retta parallela all'asse reale:

(3.4.2)

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + t) - f(x_0 + iy_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ora eseguiamo lo stesso limite con  $z$  che tende a  $z_0$  su una retta parallela all'asse immaginario:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + it) - f(x_0 + iy_0)}{it} = \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ (3.4.3) \quad &= -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni di  $f'(z_0)$  in (3.4.2) e (3.4.3) si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Scrivendo  $f$  come  $u + iv$  nell'equazione precedente otteniamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

uguagliando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

■

**Corollario 3.4.3.** *Dalla dimostrazione del teorema 3.4.2 si vede che se  $f$  è olomorfa allora*

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Calcoliamo ora la derivata di alcune funzioni elementari:

**Esempio 3.4.4.**

$$f(z) = e^z.$$

La funzione esponenziale è olomorfa, infatti:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^z = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$\frac{\partial}{\partial y} e^z = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+iy} = ie^{x+iy} = ie^z.$$

Quindi  $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$  e, per il teorema 3.4.2,  $f$  è olomorfa. Inoltre  $f'(z) = e^z$  come nel caso reale. ■

Ricordiamo ora che per le funzioni olomorfe continuano a valere i teoremi di derivabilità di somma, prodotto, quoziente, funzione inversa e composizione di funzioni come nel caso delle funzioni di variabile reale.

**Esempio 3.4.5.** Deriviamo  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\tan z$ ,  $\log z$ ,  $\arctan z$ .

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \tan z = \frac{d}{dz} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{\frac{d}{dw} e^w \Big|_{w=\log z}} = \frac{1}{e^w \Big|_{w=\log z}} = \frac{1}{z}$$

La derivata dell'arcotangente si può ricavare sia tramite la formula della derivata della funzione inversa, sia utilizzando l'espressione dell'arcotangente fornita dalla (3.2.2) :

$$\frac{d}{dz} \arctan z = -\frac{i}{2} \frac{d}{dz} \log \frac{1+iz}{1-iz} = -\frac{i}{2} \frac{1-iz}{1+iz} \frac{i(1-iz) - (1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Enunciamo ora due importanti risultati sulle funzioni olomorfe:

**Teorema 3.4.6.** Se  $f$  è olomorfa in  $\Omega$  allora  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 3.4.7.**  $f$  è olomorfa in  $\Omega$  se e solo se  $f$  è sviluppabile in serie di potenze in  $\Omega$ .

**Teorema 3.4.8.** Siano  $A \subset \mathbb{C}$  è un insieme aperto e connesso e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Se  $f'(z) = 0$  per ogni  $z \in A$  allora  $f$  è costante in  $A$ .

**Esempio 3.4.9.** Dimostriamo che

$$\arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \quad \forall z \neq 0.$$

Consideriamo la funzione

$$\varphi(z) = \arctan z + \arctan \frac{1}{z}$$

definita sull'aperto connesso  $A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ . La  $\varphi$  è una funzione olomorfa perchè composizione e somma di funzioni olomorfe. Inoltre:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) = 0$$

quindi  $\varphi$  è costante. Calcoliamo allora la funzione in un punto qualsiasi, ad esempio  $z = 1$ :

$$\varphi(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

■

**Definizione 3.4.10.** Dati  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , diremo che una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa è una **primitiva** di  $f$  se  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z \in \Omega$ .

**Teorema 3.4.11.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva di classe  $C^1$ . Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è una primitiva di  $f$  allora risulta:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

**Dim.**

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni di variabile reale si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

■

**Teorema 3.4.12.** Se  $f$  è olomorfa su un sottoinsieme rettangolare di  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , cioè un insieme della forma

$$\{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b, c < \Im(z) < d\}$$

allora esiste una primitiva di  $f$  in  $\Omega$ .

**Corollario 3.4.13.** Se  $f$  è olomorfa in un sottoinsieme rettangolare  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni curva  $\gamma$  chiusa (circuito) di classe  $C^1$  contenuta in  $\Omega$ .

**Dim.** Se  $\gamma$  è una curva chiusa allora  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Sia quindi  $F$  una primitiva di  $f$ , che esiste per il teorema 3.4.12. Allora, per il teorema 3.4.11 si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

■

**Teorema 3.4.14. (Weierstrass)** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto connesso e sia  $(f_n)$  una successione di funzioni olomorfe definite in  $\Omega$ . Se le  $f_n$  convergono a una funzione  $f$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$  allora  $f$  è olomorfa in  $\Omega$  e la successione delle derivate  $f'_n$  converge a  $f'$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .

# Capitolo 4

## Trasformata di Fourier

### 4.1. Definizioni e prime proprietà.

**Definizione 4.1.1.** Dato un sottoinsieme  $\Omega$  di  $\mathbb{R}$ , diremo che una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  appartiene allo spazio  $L^1(\Omega)$  se  $f$  è integrabile (secondo Lebesgue) e se  $\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty$ .

Indicheremo con

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

la **norma** di  $f$  nello spazio  $L^1(\Omega)$ .

**Definizione 4.1.2.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definiamo  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nel seguente modo:

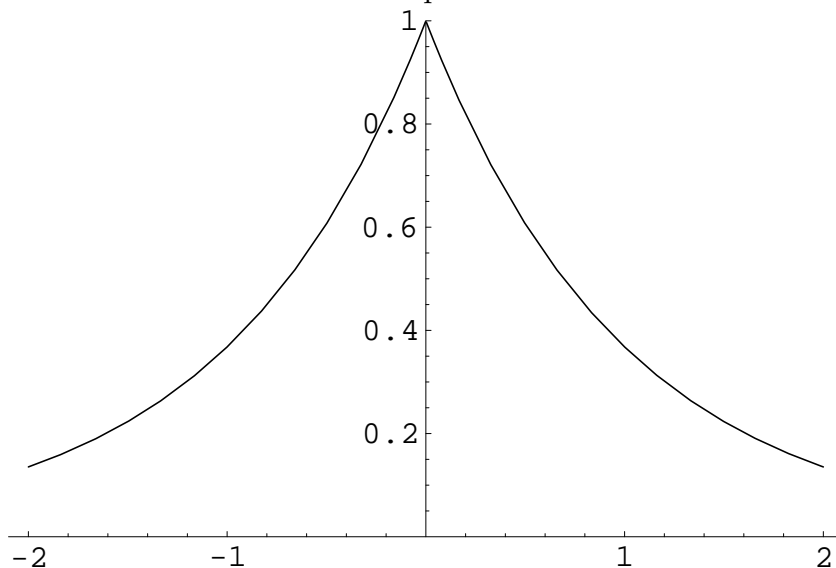
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$\hat{f}$  si dice **trasformata di Fourier** di  $f$  e si indica anche con la notazione  $\mathcal{F}(f)$ .

**Esempio 4.1.3.** Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

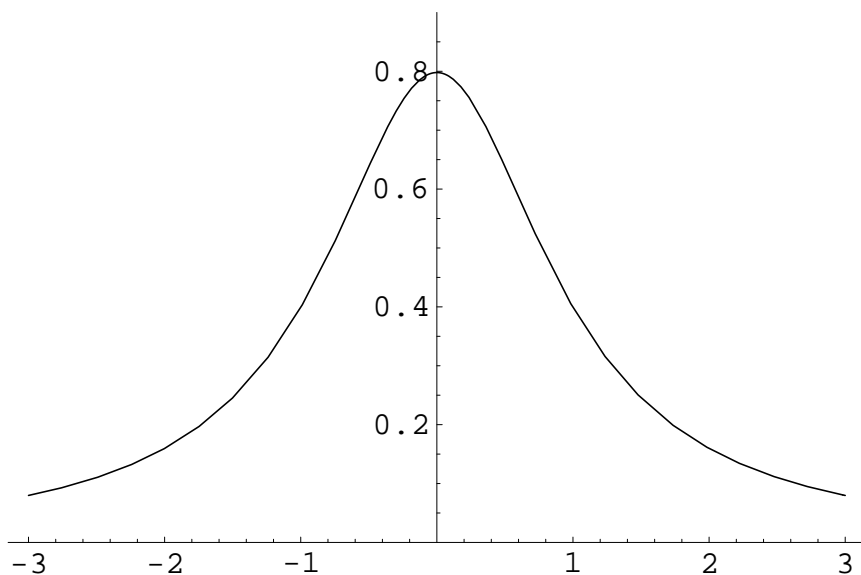
$$f(t) = e^{-r|t|}$$

dove  $r$  è un fissato numero reale positivo.



Osserviamo subito che  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r|t|}e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{rt}e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-rt}e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{t(r-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(r+i\omega)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{e^{t(r-i\omega)}}{r-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-t(r+i\omega)}}{-(r+i\omega)} \right]_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{r-i\omega} + \frac{-1}{-r-i\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r+i\omega+r-i\omega}{r^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2r}{r^2+\omega^2}.\end{aligned}$$



**Osservazione 4.1.4.** La trasformata di Fourier è un'applicazione lineare, infatti, dati  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  risulta

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

**Osservazione 4.1.5.** Poichè  $f \in L^1(\mathbb{R})$  la  $\hat{f}(\omega)$  è limitata in  $\mathbb{R}$ , infatti:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-i\omega t}| dt \leq \|f\|_1 < +\infty.$$

Da questa disuguaglianza segue che

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

**Osservazione 4.1.6.** Può succedere che  $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$  come mostra il seguente esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1. \end{cases}$$

Ovviamente  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $f$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-1}^1 = \\ &= \frac{-1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{-1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (\cos(-\omega) + i\sin(-\omega) - (\cos \omega + i\sin \omega)) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}i\omega} (-2i\sin \omega) = \frac{2\sin \omega}{\sqrt{2\pi}\omega} \end{aligned}$$

e la funzione  $\frac{\sin \omega}{\omega}$  non appartiene a  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Definizione 4.1.7.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definiamo le **trasformate di Fourier trigonometriche** nel seguente modo:

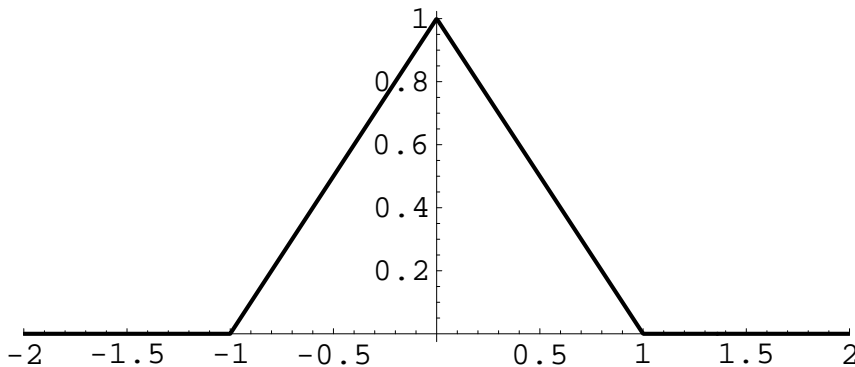
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ \mathcal{F}_s(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Risulta che  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_c(f) - i\mathcal{F}_s(f)$ .

**Osservazione 4.1.8.** Se  $f$  è pari allora  $\mathcal{F}_s(f) = 0$  quindi  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_c(f)$ . Se  $f$  è dispari allora  $\mathcal{F}_c(f) = 0$  quindi  $\mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}_s(f)$ .

**Esempio 4.1.9.** Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

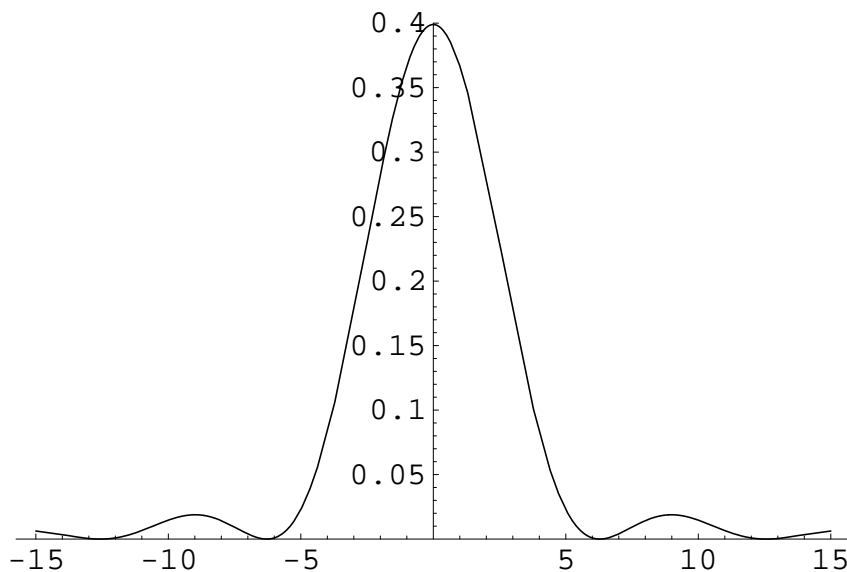
$$f(t) = \max\{0, 1 - |t|\}.$$





Fissiamo  $\omega \neq 0$  e calcoliamo  $\hat{f}(\omega)$ . Data la parità di  $f$ , per l'osservazione 4.1.8 si ha:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-t) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 - \left[ t \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( \sin \omega - \sin \omega + \frac{1}{\omega} \left[ \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2} (-\cos \omega + 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2}.\end{aligned}$$



Se invece  $\omega = 0$  si ha:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Osserviamo che la  $\hat{f}$  è continua in zero, essendo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} = \frac{1}{2}$$

■

**Osservazione 4.1.10.**  $\overline{\hat{f}(-\omega)} = \hat{f}(\omega)$ . In particolare se  $f$  è a valori reali  $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ .

**Dim.**

$$\overline{\hat{f}(-\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{i\omega t}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega).$$



**Teorema 4.1.11.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$  risulta  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

**Teorema 4.1.12.** Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .

**Corollario 4.1.13.**  $|\hat{f}|$  ammette massimo assoluto in  $\mathbb{R}$ .

**Osservazione 4.1.14.** Se indichiamo con  $T_\tau(f)(t) = f(t - \tau)$  la  $\tau$ -traslata di  $f$ , allora

$$\mathcal{F}(T_\tau(f))(\omega) = e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega).$$

Analogamente per la  $\tau$ -traslata di  $\hat{f}$  si ha:

$$T_\tau(\hat{f})(\omega) = \mathcal{F}(f(t)e^{i\tau t})(\omega).$$

**Dim.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T_\tau(f))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(\tau+s)} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(s) e^{-i\omega s}) e^{-i\omega\tau} ds = e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} T_\tau(\hat{f})(\omega) &= \hat{f}(\omega - \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-\tau)t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} e^{i\tau t} dt = \mathcal{F}(f(t)e^{i\tau t})(\omega). \end{aligned}$$



**Teorema 4.1.15.** Se  $f \in C^k(\mathbb{R})$  e  $f, f', \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$  e

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega).$$

**Dim.** (traccia)

Proviamo la tesi per  $k = 1$ ; il caso generale segue facilmente per induzione. Integrando per parti (supponendo che tutto abbia senso):

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( [f(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \right)$$

Essendo  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  e  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  segue che  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$  quindi  $[f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} = 0$ . Ne segue che  $\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$ . ■

**Osservazione 4.1.16.** Se  $f \in C^k(\mathbb{R})$  e  $f, f', \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f}$  è infinitesima di ordine superiore a  $\frac{1}{\omega^k}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

**Dim.** Dal teorema 4.1.15 si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \hat{f}(\omega) \omega^k \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| (i\omega)^k \hat{f}(\omega) \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \mathcal{F} \left( f^{(k)} \right) (\omega) \right| = 0$$

poiché  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ . ■

Vale anche un teorema “reciproco” del teorema 4.1.15 :

**Teorema 4.1.17.** Se  $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$  e  $\hat{f}^{(k)}(\omega) = (-i)^k \mathcal{F} (t^k f(t)) (\omega)$ .

## 4.2. Inversione della trasformata.

Affrontiamo ora il problema di trovare un modo per invertire la trasformata di Fourier. Cerchiamo quindi sotto quali ipotesi è possibile definire in funzionale  $\mathcal{G}$  tale che  $\mathcal{G}(\mathcal{F})(f) = f$ .

Da questo punto in avanti i calcoli che faremo avranno carattere solo “formale” nel senso che non ci preoccuperemo di verificare se tutte le operazioni che compiamo siano perfettamente lecite. In altre parole supporremo che tutti i limiti e tutti gli integrali esistano e che tutte le convergenze consentano lo scambio del limite (come per la convergenza uniforme). Solo alla fine daremo delle condizioni esplicite per la validità dei risultati trovati.

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e supponiamo che  $f$  sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ . Allora, per ogni  $T > 0$  scriviamo lo sviluppo in serie di Fourier sull'intervallo  $[-T, T]$  considerando quindi un prolungamento periodico di periodo  $2T$ :

$$(4.2.1) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{2T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{2T}\right) \quad \forall x \in (-T, T).$$

Ricordiamo ora l'espressione dei coefficienti di Fourier (2.2.2) :

$$a_n = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(nt \frac{2\pi}{2T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(nt \frac{2\pi}{2T}\right) dt.$$

Sostituiamo ora nella (4.2.1) ottenendo:

(4.2.2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(nt \frac{\pi}{T}\right) dt \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(nt \frac{\pi}{T}\right) dt \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \left( \cos\left(nt \frac{\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + \sin\left(nt \frac{\pi}{T}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(n \frac{\pi}{T}(t-x)\right) dt. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$\Phi(s) = \int_{-T}^T f(t) \cos(s(t-x)) dt.$$

Supponiamo che la funzione  $\Phi$  sia integrabile sulla semiretta  $[0, +\infty)$ . Allora suddividendo  $[0, +\infty)$  in intervalli di ampiezza  $\frac{\pi}{T}$  e costruiamo la somma di Riemann relativa:

$$(4.2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(n \frac{\pi}{T}\right) \frac{\pi}{T}.$$

Quando l'ampiezza dell'intervallo tende a zero, la somma di Riemann deve tendere all'integrale, cioè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(n \frac{\pi}{T}\right) \frac{\pi}{T} = \int_0^{\infty} \Phi(s) ds.$$

Ricordiamo ora che  $f \in L^1(\mathbb{R})$  quindi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \|f\|_1 = 0.$$

Sfruttando questi due risultati passiamo al limite nella (4.2.2) in modo formale:

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} f(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\pi}{T} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(s) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(s(t-x)) dt \right) ds. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$a_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt \quad b_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0.$$

Allora la (4.2.4) diventa:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(st) \cos(sx) + \sin(st) \sin(sx)) dt \right) ds = \\ &= \int_0^{\infty} a_s \cos(sx) + b_s \sin(sx) ds. \end{aligned}$$

Notiamo l'analogia di questa formula con quella dello sviluppo in serie di Fourier nella definizione 2.2.17 .

Osserviamo ora che la funzione

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(s(t-x)) dt$$

è una funzione pari, quindi

$$(4.2.5) \quad \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(s(t-x)) dt \right) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(s(t-x)) dt \right) ds.$$

Analogamente la funzione

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(s(t-x)) dt$$

è dispari, quindi

$$(4.2.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(s(t-x)) dt \right) ds = 0.$$

Moltiplicando l'equazione (4.2.5) per  $\frac{1}{\pi}$ , l'equazione (4.2.6) per  $\frac{-i}{2\pi}$  e sostituendo nella (4.2.4) si ottiene:

$$(4.2.7) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(s(t-x)) - i \sin(s(t-x))) dt \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-is(t-x)} dt \right) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \right) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds \end{aligned}$$

Otteniamo quindi una formula “simmetrica” della trasformata di Fourier che prende il nome di **anti trasformata** oppure di **trasformata inversa** di Fourier.

**Definizione 4.2.1.** Data una funzione  $f$  integrabile su ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$  indichiamo con

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) dt.$$

Tale limite, ottenuto integrando su intervalli simmetrici rispetto all'origine, prende il nome di **valore principale dell'integrale**.

**Osservazione 4.2.2.** L'esistenza del valore principale di una funzione  $f$  non implica che  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Infatti, consideriamo

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

$f$  è localmente integrabile e dispari, quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

ma ovviamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = +\infty$$

quindi  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ .

In questo esempio si vede che la  $f$  non è neanche integrabile su  $\mathbb{R}$ . Basti pensare che, dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  fissato, si ha:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T T + \alpha f(t) dt = \alpha$$

quindi, si può scegliere una successione di intervalli che invadono  $\mathbb{R}$  in modo che il limite degli integrali assuma qualsiasi valore reale (anche  $\pm\infty$ ).

Diamo ora qualche condizione sufficiente per l'invertibilità della trasformata di Fourier:

**Teorema 4.2.3.** Se  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  allora vale la formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

**Definizione 4.2.4.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e fissato  $x \in \mathbb{R}$  diremo che  $f$  soddisfa la **condizione di Dini** in  $x$  se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty.$$

**Teorema 4.2.5.** Se  $f$  soddisfa la condizione di Dini in  $x$  allora

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Notiamo che in questo caso abbiamo modificato la formula (4.2.7) aggiungendo il valore principale dell'integrale. Tale modifica si è resa necessaria in quanto la (4.2.7) era stata ottenuta solo con passaggi "formali".

**Definizione 4.2.6.** Data una funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  per la quale il valore principale dell'integrale abbia senso indichiamo la sua anti trasformata di Fourier con

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{isx} ds.$$

**Osservazione 4.2.7.** Se  $f$  soddisfa la condizione di Dini in ogni punto di  $\mathbb{R}$  allora

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f.$$

**Osservazione 4.2.8.** Se  $f$  è continua in  $x$  e esistono finite la derivata destra e sinistra in  $x$  allora vale la condizione di Dini in  $x$ .

**Dim.** Indichiamo con

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

la derivata destra di  $f$  in  $x$  e, in modo analogo, con  $f'_-(x)$  la derivata sinistra.

Dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_+ > 0$  tale che

$$0 < t < \delta_+ \implies \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'_+(x) \right| < \varepsilon.$$

Quindi

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| < |f'_+(x)| + \varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta_+).$$

Analogamente, esiste  $\delta_- > 0$  tale che

$$-\delta_- < t < 0 \implies \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'_-(x) \right| < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| < |f'_-(x)| + \varepsilon \quad \forall t \in (-\delta_-, 0).$$

Allora, ponendo  $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$  si ha:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < 2\delta (\max\{|f'_+(x)|, |f'_-(x)|\} + \varepsilon) < +\infty.$$

■

Diamo ora una condizione più debole per l'invertibilità che ci consente di trattare anche funzioni discontinue:

**Definizione 4.2.9.** Diremo che  $f \in L^1(\mathbb{R})$  soddisfa le **condizioni di Dini unilaterali** in  $x \in \mathbb{R}$  se esistono finiti i limiti

$$f(x^+) \doteq \lim_{y \rightarrow x^+} f(y), \quad f(x^-) \doteq \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$$



e se esiste un numero reale  $\delta > 0$  tale che:

$$\int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} \right| dt < +\infty, \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right| dt < +\infty.$$

**Osservazione 4.2.10.** Se per  $f$  esistono finiti i limiti destro e sinistro in  $x$  e  $f$  è derivabile a destra e a sinistra in  $x$ , nel senso che esistono finiti i limiti

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x^+)}{y - x}, \quad \lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x^-)}{y - x}$$

allora  $f$  soddisfa le condizioni di Dini unilaterali in  $x$ .

**Teorema 4.2.11.** Se  $f$  soddisfa le condizioni di Dini unilaterali in  $x$  allora

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

**Esempio 4.2.12.** Calcoliamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dell'osservazione 4.1.6, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1. \end{cases}$$

La  $f$  verifica la condizione di Dini unilaterale nel punto  $t = 1$ , quindi, per il teorema 4.2.5 risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{i\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega (\cos \omega + i \sin \omega)}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} - \frac{i \sin^2 \omega}{\omega} d\omega = \end{aligned}$$

in virtù del fatto che  $\frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$  è pari e  $\frac{\sin^2 \omega}{\omega}$  è dispari

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\omega)}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

■

Enunciamo ora un importante risultato che permette di esprimere una funzione  $f$  in un qualsiasi punto  $t$ , sotto opportune condizioni, in termini dei suoi valori campionati in un insieme numerabile di punti.

**Definizione 4.2.13.** *Data  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , supponiamo che esista un numero  $R > 0$  tale che  $\hat{f}(\omega)$  è identicamente nulla fuori dall'intervallo  $[-R, R]$ , in altri termini:*

$$|\omega| > R \implies \hat{f}(\omega) = 0.$$

In questo caso diremo che  $f$  è a **banda rigorosamente limitata**. Il numero

$$R_0 = \inf \left\{ R \in \mathbb{R} : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ se } |\omega| > R \right\}$$

si dice **larghezza di banda** di  $f$ .

**Teorema 4.2.14. Del campionamento (Shannon).**

Se  $f$  è a banda rigorosamente limitata e  $\omega \in \mathbb{R}$  è tale che  $|\omega|$  è maggiore della larghezza di banda di  $f$  allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) \frac{\sin(\omega t - n\pi)}{\omega t - n\pi} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

### 4.3. La trasformata di Fourier in $L^2$ .

Uno spazio di funzioni dove il problema dell'invertibilità della trasformata di Fourier trova soluzione è lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile, lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$ . Il problema principale da affrontare è tuttavia come definire la trasformata in questo spazio, visto che la nostra definizione iniziale 4.1.2 si applicava solo a funzioni di  $L^1(\mathbb{R})$ . Daremo quindi una nuova definizione che "estende" quella precedente, nel senso che coincide con la 4.1.2 nel caso di funzioni che appartengono contemporaneamente a  $L^1(\mathbb{R})$  e a  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 4.3.1. (Plancherel)** Data  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e  $n \in \mathbb{N}$  poniamo

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Risulta che  $\Phi_n \in L^2(\mathbb{R})$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e che la successione di funzioni  $(\Phi_n)$  converge in  $L^2(\mathbb{R})$  a una funzione  $\Phi$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Se inoltre  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  allora  $\Phi = \hat{f}$ .

Questo teorema ci porta quindi a definire la trasformata di Fourier per funzioni di  $L^2$  nel seguente modo:

**Definizione 4.3.2.** Data  $f \in L^2(\mathbb{R})$  chiameremo **trasformata di Fourier** di  $f$  la funzione  $\Phi$  del teorema 4.3.1 e useremo la stessa notazione usata per la trasformata delle funzioni di  $L^1$  cioè come  $\hat{f}$  oppure  $\mathcal{F}(f)$ .

**Teorema 4.3.3.** La trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  è invertibile e

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

dove il limite è da intendersi in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Dim.** Proveremo solo l'iniettività di  $\mathcal{F}$  in  $L^2$ .

Siano  $f_1$  e  $f_2$  funzioni di  $L^2(\mathbb{R})$  tali che  $\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2)$ . Ma, dalla linearità della  $\mathcal{F}$ , segue che  $\mathcal{F}(f_1 - f_2) = 0$  e, dal teorema 4.3.1, si ha che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f_1 - f_2)(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f_1 - f_2)(\omega)|^2 d\omega = 0$$

quindi, per un ben noto risultato della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue  $f_1(\omega) = f_2(\omega)$  per quasi ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ . Ne segue che  $f_1$  è uguale a  $f_2$  come funzione dello spazio  $L^2(\mathbb{R})$ . ■

#### 4.4. Funzioni a decrescenza rapida.

Vediamo ora un insieme di funzioni particolare dove la trasformata di Fourier trova un ambiente "naturale".

**Definizione 4.4.1.** Indichiamo con  $\mathcal{S}$  l'insieme delle funzioni dotate di derivate di ogni ordine che decadono all'infinito più rapidamente di ogni funzione razionale, cioè:

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ e } \forall n, k \in \mathbb{N} \exists c_{n,k} \in \mathbb{R} : \left| t^n f^{(k)}(t) \right| < c_{n,k}, \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Osservazione 4.4.2.**

$$\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}).$$

**Dim.** Sia  $f \in \mathcal{S}$ . Allora esiste una costante  $c_{2,0}$  tale che

$$|f(t)| < \frac{c_{2,0}}{t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, essendo  $f$  continua su tutto  $\mathbb{R}$ , ed in particolare sull'intervallo  $[-1, 1]$ , esiste, per il teorema di Weierstrass, una costante  $M$  tale che

$$|f(t)| \leq M \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt &= \int_{-1}^1 |f(t)| dt + \int_{-\infty}^{-1} |f(t)| dt + \int_1^{\infty} |f(t)| dt \leq \\ &\leq 2M + 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 2M + 2 \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^{\infty} = 2M + 4 < +\infty. \end{aligned}$$

Quindi  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . ■

**Teorema 4.4.3.** Se  $f \in \mathcal{S}$  allora  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ .

**Dim.** Osserviamo che se  $f \in \mathcal{S}$  allora la funzione  $g_k(t) = t^k f(t)$  appartiene ad  $\mathcal{S}$ , quindi, per l'osservazione 4.4.2,  $g_k \in L^1(\mathbb{R})$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Quindi per il teorema 4.1.15  $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$ . Ne segue che  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Osserviamo ora che, dati  $n, k \in \mathbb{N}$ , risulta:

$$\left| \omega^n \hat{f}^{(k)}(\omega) \right| = \left| (i\omega)^n \hat{f}^{(k)}(\omega) \right| = \left| (i\omega)^n (-i)^k \mathcal{F}(t^k f(t))(\omega) \right| = \left| \omega^n \mathcal{F}(t^k f(t))(\omega) \right|$$

ed essendo la funzione  $g_k(t) = t^k f(t)$  di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  con derivate di ogni ordine in  $L^1(\mathbb{R})$  (dato che  $f \in \mathcal{S}$ ), la sua trasformata di Fourier tende a zero con ordine di infinitesimo sicuramente superiore a  $n$ . Quindi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \omega^n \hat{f}^{(k)}(\omega) \right| = 0.$$

Possiamo quindi concludere che  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . ■

**Osservazione 4.4.4.** *La trasformata di Fourier è una applicazione biunivoca da  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}$ .*

**Dim.**

Basta osservare che  $\mathcal{S} \subset (L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}))$  (la dimostrazione è simile a quella del teorema 4.4.2 ). Ne segue che la trasformata di Fourier è biunivoca (perché  $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$ ) e coincide con la trasformata convenzionale (quella definita in  $L^1(\mathbb{R})$ ). ■

# Capitolo 5

## Trasformata di Laplace

### 5.1. Definizioni e prime proprietà.

**Definizione 5.1.1.** Diremo che una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è localmente sommabile e sciveremo  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  se  $f \in L^1([a, b])$  per ogni possibile intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

**Definizione 5.1.2.** Data  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  e fissato  $z \in \mathbb{C}$  indicheremo, se esiste, con  $\mathcal{L}(f)(z)$  il seguente limite:

$$(5.1.1) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-zt} dt.$$

Se esiste almeno un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che il limite esiste, allora  $f$  si dice **trasformabile secondo Laplace** o  $\mathcal{L}$ -trasformabile e la funzione di variabile complessa  $\mathcal{L}(f)$  che resta definita si dice **trasformata di Laplace** di  $f$ . L'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : \exists \mathcal{L}(f)(z)\}$$

si dice **insieme di convergenza** della trasformata di Laplace di  $f$ .

Per quanto riguarda l'insieme di convergenza abbiamo il seguente risultato:

**Teorema 5.1.3.** Se in un punto  $z_0$  esiste il limite  $\mathcal{L}(f)(z_0)$  allora esiste  $\mathcal{L}(f)(z)$  anche per tutti gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $\Re(z) > \Re(z_0)$ .

**Definizione 5.1.4.** Sia  $f$  trasformabile secondo Laplace. Il numero

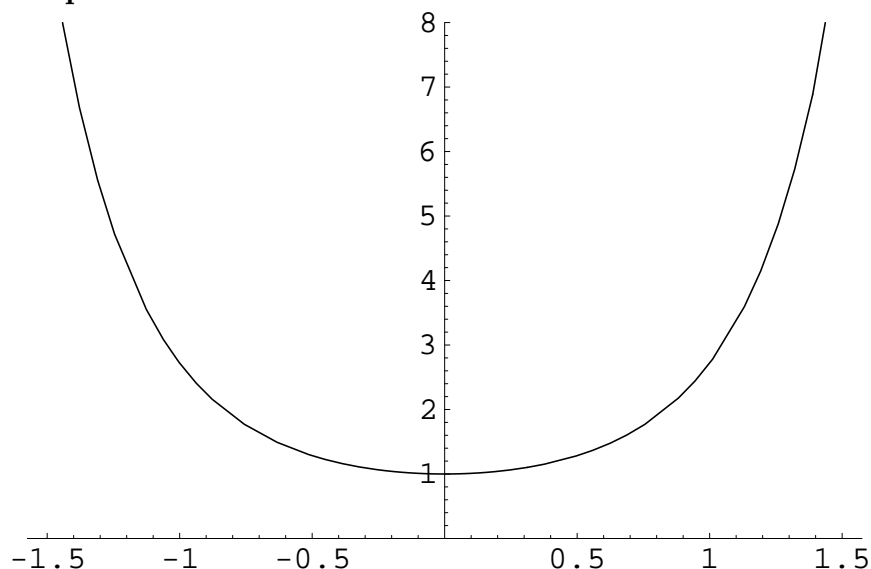
$$\rho_f^* = \inf \{\Re(z) : \exists \mathcal{L}(f)(z)\}$$

si dice **ascissa di convergenza** di  $\mathcal{L}(f)$ .

**Osservazione 5.1.5.** La parte interna dell'insieme di convergenza di  $\mathcal{L}(f)$  è tutto  $\mathbb{C}$  nel caso che sia  $\rho_f^* = -\infty$ , mentre è il semipiano  $\Re(z) > \rho_f^*$  nel caso sia  $\rho_f^* > -\infty$ . I punti della retta  $\Re(z) = \rho_f^*$  possono appartenere, tutti o in parte o anche non appartenere affatto all'insieme di convergenza di  $\mathcal{L}(f)$ .

**Osservazione 5.1.6.** Grazie al teorema 5.1.3, per determinare l'ascissa di convergenza basta controllare l'esistenza del limite  $\mathcal{L}(f)(z)$  quando  $\Re(z) = 0$ .

Diamo ora un esempio di funzione non  $\mathcal{L}$ -trasformabile.

**Esempio 5.1.7.**

Sia  $f(t) = e^{t^2}$  e sia  $z \in \mathbb{C}$ . Per l'osservazione 5.1.6 prendiamo in esame solo il caso  $\Re(z) = 0$ . Scriveremo pertanto  $z = x \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\int_0^R e^{t^2} e^{-xt} dt = \int_0^R e^{t^2 - xt} dt$$

Calcoliamo il valore minimo assunto dall'esponente al variare di  $t$  nell'intervallo di integrazione  $[0, R]$ . La funzione  $\varphi(t) = t^2 - xt$  assume il suo minimo per  $t = \frac{x}{2}$ , supponendo  $R \geq \frac{x}{2}$ , e tale minimo vale

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4}.$$

Allora l'integrale precedente è maggiorato da

$$\int_0^R e^{-\frac{x^2}{4}} = R e^{-\frac{x^2}{4}}$$

e questa quantità tende a  $+\infty$  per  $R$  che tende a  $+\infty$ . La  $f$  non è quindi  $\mathcal{L}$ -trasformabile.

■

Enunciamo ora un risultato che ci permetterà di calcolare le trasformate di alcune nuove funzioni a partire da trasformate conosciute:

**Teorema 5.1.8.** *Data  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  consideriamo la funzione*

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \quad t > 0.$$

Se  $g$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile allora anche  $f$  lo è e vale la relazione:

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_{\gamma_\infty} \mathcal{L}(f)(w) dw$$

dove  $\gamma_\infty$  è una curva di classe  $C^1$  che ha come primo estremo  $z$  e che tende all'infinito restando in una regione del tipo:

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(w - z)| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

## 5.2. Trasformata assoluta.

**Definizione 5.2.1.** Una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  si dice **assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile secondo Laplace**, se esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che

$$(5.2.1) \quad \int_0^\infty |f(t)e^{-z_0 t}| dt < \infty.$$

L'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \int_0^\infty |f(t)e^{-zt}| dt < +\infty \right\}$$

si dice **insieme di convergenza assoluta** della trasformata di Laplace di  $f$ . Indicheremo la **trasformata assoluta di Laplace** con  $\mathcal{L}_a(f)$  nel senso:

$$\mathcal{L}_a(f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt.$$

**Osservazione 5.2.2.** È bene notare che la differenza fra la trasformata di Laplace semplice e assoluta sta nella sommabilità (nel senso dell'integrale di Lebesgue) della funzione  $f(t)e^{-zt}$  sulla semiretta  $[0, \infty)$  invece dell'esistenza del semplice limite dell'integrale quando l'intervallo di integrazione invade la suddetta semiretta.

**Osservazione 5.2.3.** Se  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile allora è anche  $\mathcal{L}$ -trasformabile e vale

$$\mathcal{L}_a(f) = \mathcal{L}(f)$$



nell'insieme di convergenza assoluta. Ne segue inoltre che l'insieme di convergenza assoluta è contenuto nell'insieme di convergenza di  $\mathcal{L}(f)$ .

**Dim.** Se

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-zt}| dt < +\infty$$

allora l'integranda è sommabile, quindi integrabile e di conseguenza esiste

$$(5.2.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt.$$

Ne segue che se  $z$  appartiene all'insieme di convergenza assoluta, a maggior ragione appartiene all'insieme di convergenza. Inoltre la (5.2.2) esprime il fatto che  $\mathcal{L}_a(f) = \mathcal{L}(f)$ .

■

Dimostriamo ora un risultato che ci fornisce informazioni sulla forma dell'insieme di convergenza assoluta:

**Teorema 5.2.4.** *Se  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile secondo Laplace e  $z_0$  appartiene all'insieme di convergenza assoluta, allora vi appartiene anche ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\Re(z) \geq \Re(z_0)$ .*

**Dim.** Sia  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\Re(z) \geq \Re(z_0)$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(t)e^{-zt}| dt &= \int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\Re(z_0)t} e^{(-\Re(z)+\Re(z_0))t} |f(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\Re(z_0)t} |f(t)| dt \end{aligned}$$

essendo  $-\Re(z) + \Re(z_0) \leq 0$ . Ma

$$\int_0^{\infty} e^{-\Re(z_0)t} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{z_0 t} f(t)| dt < +\infty$$

quindi anche  $z$  appartiene all'insieme di convergenza assoluta. ■

**Definizione 5.2.5.** *Si dice ascissa di convergenza assoluta della trasformata di Laplace il numero:*

$$\rho_f = \inf \left\{ \Re(z) : \int_0^{\infty} |f(t)e^{-zt}| dt < +\infty \right\}.$$

**Osservazione 5.2.6.** La parte interna dell'insieme di convergenza assoluta è:

- tutto  $\mathbb{C}$  nel caso  $\rho_f = -\infty$
- il semipiano  $\Re(z) > \rho_f$  nel caso  $\rho_f > -\infty$ .

In questo secondo caso la retta  $\Re(z) = \rho_f$  o appartiene tutta o non appartiene affatto all'insieme di convergenza assoluta, come si vede chiaramente dalla dimostrazione del teorema 5.2.4 .

**Osservazione 5.2.7.** Risulta sempre  $\rho_f^* \leq \rho_f$ .

**Dim.** È una conseguenza immediata dell'osservazione 5.2.3 . ■

**Osservazione 5.2.8.** Come nel caso della trasformata di Laplace semplice, anche nel caso della trasformata assoluta, nella determinazione dell'ascissa di convergenza assoluta possiamo limitarci a considerare numeri  $z$  tali che  $\Re(z) = 0$  (vedi teorema 5.2.4 ).

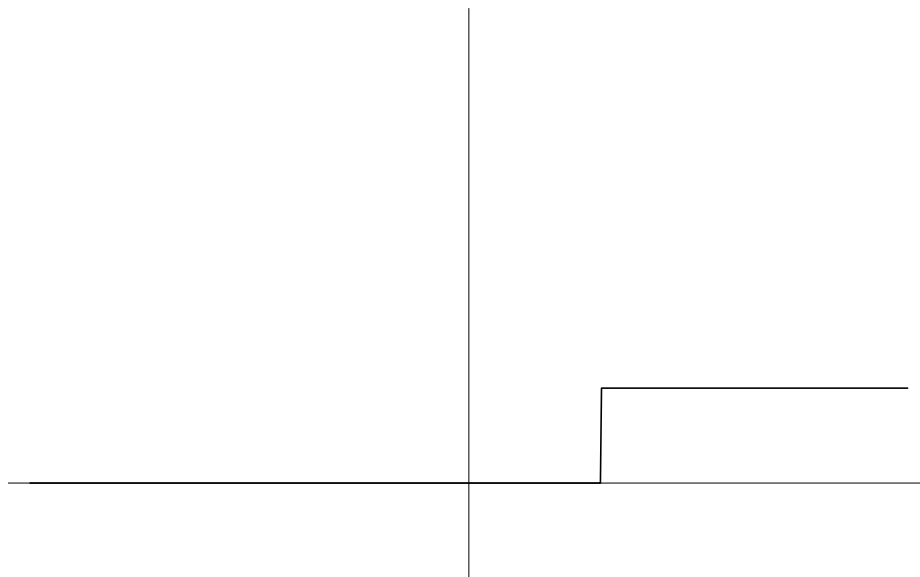
**Osservazione 5.2.9.** La trasformata di Laplace (assoluta e non) è un operatore lineare, cioè, date  $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  risulta:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

dove si intende che l'ultima uguaglianza è valida nell'intersezione degli insiemi di convergenza di  $\mathcal{L}(f)$  e  $\mathcal{L}(g)$ .

**Esempio 5.2.10.** Dato  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$  consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } 0 \leq t \leq a. \end{cases}$$



Sia  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-zt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R e^{-zt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-zt}}{-z} \right]_a^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-zR}}{-z} + \frac{e^{-za}}{z} = \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-za}}{z} & \text{se } \Re(z) > 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } \Re(z) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esaminiamo ora il caso  $z = 0$ .

$$\mathcal{L}(f)(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R 1 dt = \lim_{R \rightarrow \infty} R - a = +\infty.$$

Ne segue che  $\rho_f^* = 0$  e sulla retta  $\Re(z) = 0$  non c'è convergenza in alcun punto.

Vediamo ora la convergenza assoluta:

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-zt}| dt = \int_a^{\infty} e^{-\Re(z)t} dt$$

che converge se e solo se  $\Re(z) > 0$ . Quindi anche  $\rho_f = 0$  e non c'è convergenza assoluta sulla retta  $\Re(z) = 0$ .

Osserviamo che se  $a = 0$  allora  $f$  è la funzione di Heaviside e  $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}$ . ■

**Esempio 5.2.11.** Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = t^n \quad n \in \mathbb{N}, t \geq 0.$$

Per  $n = 0$  abbiamo la funzione di Heaviside considerata nell'esempio 5.2.10 (con  $a = 0$ ), quindi:

$$\mathcal{L}(t^0)(z) = \frac{1}{z}$$

e  $\rho^* = \rho = 0$ . Per gli  $n \geq 1$  ragioneremo per induzione. Supponiamo quindi che la funzione  $t^{n-1}$  sia  $\mathcal{L}$ -trasformabile con  $\rho^* = \rho = 0$  e calcoliamo la trasformata di  $t^n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n)(z) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^n e^{-zt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -t^n \frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^R + \int_0^R n t^{n-1} \frac{e^{-zt}}{z} dt = \\ &= \begin{cases} -\frac{n}{z} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^{n-1} e^{-zt} dt = \frac{n}{z} \mathcal{L}(t^{n-1})(z) & \text{se } \Re(z) > 0 \\ \text{non esiste il limite} & \text{se } \Re(z) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi, per induzione, si prova facilmente che:

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con ascissa di convergenza semplice e assoluta uguale a zero. ■

**Esempio 5.2.12.** Calcoliamo ora la trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche. Per far questo ci serviremo delle formule di Eulero. Sia quindi  $w \in \mathbb{C}$  fissato e consideriamo  $f(t) = e^{wt}$ . Supponiamo ora  $z \neq w$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{wt} e^{-zt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{(w-z)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(w-z)t}}{w-z} \right]_{t=0}^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(w-z)t} - 1}{w-z} = \begin{cases} \frac{1}{z-w} & \text{se } \Re(w-z) < 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } \Re(w-z) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se invece  $z = w$  si ha:

$$\mathcal{L}(f)(w) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{wt} e^{-wt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R 1 dt = +\infty$$

quindi la  $f$  non è trasformabile nel punto  $z = w$ . Quindi  $\rho_f^* = \Re(w)$  e non c'è convergenza in nessun punto della retta  $\Re(z) = \Re(w)$ .

Per quanto riguarda l'assoluta trasformabilità osserviamo che la funzione  $e^{wt} e^{-zt}$  è sommabile in  $[0, +\infty)$  se e solo se  $\Re(w-z) < 0$  quindi anche  $\rho_f = \Re(w)$  e non c'è convergenza assoluta per  $\Re(z) = \Re(w)$ .

Ricordiamo ora le formule di Eulero:

$$\cos(\alpha t) = \frac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2}, \quad \sin(\alpha t) = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i}.$$

Dalla linearità della trasformata di Laplace si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(\alpha t))(z) &= \frac{\mathcal{L}(e^{i\alpha t}) + \mathcal{L}(e^{-i\alpha t})}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i\alpha} + \frac{1}{z+i\alpha} \right) = \frac{z+i\alpha + z-i\alpha}{2(z^2 + \alpha^2)} = \\ &= \frac{z}{z^2 + \alpha^2} \\ \mathcal{L}(\sin(\alpha t))(z) &= \frac{\mathcal{L}(e^{i\alpha t}) - \mathcal{L}(e^{-i\alpha t})}{2i} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i\alpha} - \frac{1}{z+i\alpha} \right) = \frac{z+i\alpha - z+i\alpha}{2i(z^2 + \alpha^2)} = \\ &= \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

In entrambi i casi l'insieme di convergenza, assoluta e non, è l'intersezione degli insiemi di convergenza di  $\mathcal{L}(e^{i\alpha t})$  e di  $\mathcal{L}(e^{-i\alpha t})$ , cioè  $\Re(z) > \Re(i\alpha) = 0$  e  $\Re(z) > \Re(-i\alpha) = 0$ . Quindi  $\rho^* = \rho = 0$ . ■

**Esempio 5.2.13.** Troviamo la trasformata della funzione

$$g(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t}.$$

Dal teorema 5.1.8 otteniamo:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(\alpha t)}{t}\right)(z) = \int_{\gamma_\infty} \mathcal{L}(\sin(\alpha t))(w) dw$$

sostituiamo in questa espressione il risultato dell'esempio 5.2.12 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\sin(\alpha t)}{t}\right)(z) &= \int_{\gamma_\infty} \frac{\alpha}{w^2 + \alpha^2} dw = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \arctan \frac{w}{\alpha} \right]_z^{\gamma(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{\gamma_\infty(t)}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\alpha}{\gamma_\infty(t)}\right) - \arctan\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } z = 0 \\ \arctan\left(\frac{\alpha}{z}\right) & \text{se } z \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Negli ultimi passaggi abbiamo usato ripetutamente il risultato trigonometrico dell'esempio 3.4.9. ■

Consideriamo ora qualche teorema che ci consentirà di stimare l'ascissa di convergenza.

**Teorema 5.2.14.** Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  tale che  $f(t) = O(e^{kt})$  per  $t$  che tende all'infinito. Allora  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e  $\rho_f \leq k$ .

**Dim.** Dato che  $f = O(e^{kt})$ , esiste  $M \in \mathbb{R}$  e  $\bar{t} \geq 0$  tali che

$$|f(t)| \leq M e^{kt} \quad \forall t \geq \bar{t}.$$

Ne segue che

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-zt}| dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\Re(z)t} dt = \int_0^{\bar{t}} |f(t)|e^{-\Re(z)t} dt + \int_{\bar{t}}^\infty |f(t)|e^{-\Re(z)t} dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\bar{t}} |f(t)| dt \max_{t \in [0, \bar{t}]} e^{-\Re(z)t} + M \int_{\bar{t}}^{\infty} e^{(k-\Re(z))t} dt.$$

Osserviamo ora che

$$\int_0^{\bar{t}} |f(t)| dt < +\infty$$

perché  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  e che

$$\int_{\bar{t}}^{\infty} e^{(k-\Re(z))t} dt < +\infty$$

se  $k - \Re(z) < 0$ . Quindi  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e l'integrale converge assolutamente almeno nel semipiano  $\Re(z) > k$ . Ne segue che  $\rho_f \leq k$ . ■

**Corollario 5.2.15.** *Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  tale che  $f(t) = O(t^k)$  per  $t$  che tende all'infinito. Allora  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e  $\rho_f \leq 0$ .*

**Dim.** Se  $f(t) = O(t^k)$  allora, essendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^{mt}} = 0 \quad \forall k, m, \quad m > 0$$

allora  $f(t) = O(e^{mt})$  per ogni  $m > 0$ . Dal teorema 5.2.14 segue allora che  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e  $\rho_f \leq m$ , per ogni  $m > 0$ , quindi  $\rho_f \leq 0$ . ■

**Osservazione 5.2.16.** *Se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  è a supporto compatto, allora  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e  $\rho_f = -\infty$ , cioè  $\mathcal{L}_a(f)$  converge in tutto  $\mathbb{C}$ .*

**Dim.** Se  $f$  è a supporto compatto allora esiste  $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$  tale che  $f(t) = 0$  per quasi ogni  $t \geq \bar{t}$ . Ne segue che, comunque prendiamo  $z \in \mathbb{C}$  risulta:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-zt}| dt = \int_0^{\bar{t}} |f(t)| e^{\Re(z)t} dt \leq \max_{t \in [0, \bar{t}]} e^{-\Re(z)t} \int_0^{\bar{t}} |f(t)| dt < +\infty$$

poiché  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ . Quindi la trasformata di Laplace di  $f$  converge assolutamente in ogni  $z \in \mathbb{C}$ . ■

Come nel caso della trasformata di Fourier enunceremo ora, senza dimostrarlo, qualche risultato sul decadimento a zero della trasformata di Laplace.

**Teorema 5.2.17.** Sia  $f$   $\mathcal{L}$ -trasformabile e sia  $\rho_f^*$  la sua ascissa di convergenza. Dato  $z_0$  nell'insieme di convergenza e  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  risulta:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(z_0 + re^{i\theta}) = 0.$$

**Osservazione 5.2.18.** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$  allora  $f$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e  $\rho_f \leq 0$ .

**Dim.** Se  $\Re(z) \geq 0$  allora

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-zt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\Re(z)t} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

Quindi la trasformata assoluta converge almeno in tutto il semipiano  $\Re(z) \geq 0$ . Ne segue che  $\rho_f \leq 0$ . ■

Notiamo che nell'osservazione precedente, come nel teorema che segue  $f$  è una funzione di  $L^1(\mathbb{R}^+)$  e non semplicemente di  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ .

**Teorema 5.2.19.** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$  allora

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \mathcal{L}_a(f)(z) = 0.$$

**Teorema 5.2.20.** Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  e sia  $\rho_f^*$  la sua ascissa di convergenza. Allora, dato  $\bar{\rho} > \rho_f^*$  risulta

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z} = 0 \quad \text{con } \Re(z) \geq \bar{\rho}.$$

Enunciamo ora un importante risultato di regolarità per la trasformata di Laplace, analogo a quello per la trasformata di Fourier ma di portata superiore grazie alle proprietà delle funzioni di variabile complessa:

**Teorema 5.2.21.** Se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile allora  $\mathcal{L}(f)$  è olomorfa nel semipiano aperto  $\Re(z) > \rho_f^*$ . Inoltre, per ogni intero positivo  $n$  la funzione  $t \mapsto t^n f(t)$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile sullo stesso insieme e vale la relazione:

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)).$$

**Dim.** Mostriamo solo le linee essenziali della dimostrazione facendo solamente dei calcoli "formali" senza specificare minimamente gli insiemi di convergenza dei limiti o degli

integrali che considereremo.

Fissiamo  $R > 0$  e consideriamo  $z = x + iy$ . Poniamo

$$F_R(x, y) = \int_0^R f(t) e^{-(x+iy)t} dt.$$

Deriviamo ora parzialmente  $F$ :

$$\frac{\partial F_R}{\partial x} = \int_0^R f(t)(-t) e^{-(x+iy)t} dt$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial y} = \int_0^R f(t)(-it) e^{-(x+iy)t} dt$$

quindi

$$\frac{\partial F_R}{\partial y} = -i \frac{\partial F_R}{\partial x}$$

e per le condizioni di Cauchy – Riemann 3.4.2 la funzione  $F_R$  è olomorfa. Passando al limite per  $R \rightarrow \infty$  si ottiene che  $\mathcal{L}(f)$  è olomorfa (vedi teorema 3.4.14). Inoltre

$$F'_R(x + iy) = \frac{\partial F_R}{\partial x}(x, y) = \int_0^R f(t)(-t) e^{-(x+iy)t} dt$$

quindi, passando di nuovo al limite per  $R \rightarrow \infty$ , e ponendo  $z = x + iy$ , si ottiene:

$$(\mathcal{L}(f))'(z) = -\mathcal{L}(tf(t)).$$

Iterando il processo si ottiene la formula per la derivata  $n$ -esima. ■

Vediamo ora come invece si ottiene la trasformata di una primitiva di  $f$ :

**Teorema 5.2.22.** Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$   $\mathcal{L}$ -trasformabile. Poniamo, per ogni  $t \geq 0$ :

$$F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Allora  $F$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile e la sua ascissa di convergenza assoluta soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$\rho_F \leq \max\{0, \rho_f^*\}.$$



Inoltre, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\Re(z) > \max\{0, \rho_f^*\}$  risulta:

$$\mathcal{L}_a(F)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z}.$$

**Teorema 5.2.23.** Sia  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  derivabile. Allora risulta:

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0).$$

**Dim.** Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau$$

e, per la linearità della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}(f) = f(0)\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}\left(\int_0^t f'(\tau) d\tau\right)$$

dove con  $\mathcal{L}(1)$  intendiamo la trasformata della funzione identicamente uguale a 1, calcolata nell'esempio 5.2.10. Per quanto riguarda invece la trasformata di  $\int_0^t f'(\tau) d\tau$  utilizzeremo il teorema 5.2.22. Quindi:

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{1}{z}\mathcal{L}(f')(z).$$

Ricavando  $\mathcal{L}(f')$  da questa equazione si ottiene la tesi. ■

Applicando ripetutamente il teorema 5.2.23 si ottiene il seguente

**Corollario 5.2.24.** Se  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile  $n$  volte allora

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - z f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

### 5.3. Trasformata bilatera.

**Definizione 5.3.1.** Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Se esiste un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che esistono i due limiti

$$(5.3.1) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-z_0 t} dt, \quad \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^0 f(t) e^{-z_0 t} dt$$

allora la  $f$  si dice  $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente e la somma dei due limiti si dice **trasformata bilatera** di Laplace e si indica con  $\mathcal{L}_B(f)$ , cioè:

$$\mathcal{L}_B(f)(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-z_0 t} dt + \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^0 f(t) e^{-z_0 t} dt.$$

**Osservazione 5.3.2.** Se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente allora la restrizione di  $f$  a  $\mathbb{R}^+$  appartiene a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  e risulta  $\mathcal{L}$ -trasformabile. Se inoltre indichiamo (con leggero abuso di notazione) con  $\rho_f^*$  l'ascissa di convergenza della  $f$  ristretta a  $\mathbb{R}^+$ , se il primo dei due limiti della (5.3.1) è finito, sarà  $\rho_f^* \leq \Re(z_0)$ .

Eseguiamo ora la sostituzione  $u = -t$  nel seguente integrale:

$$\int_S^0 f(t) e^{-z_0 t} dt = - \int_{-S}^0 f(-u) e^{z_0 u} du = \int_0^{-S} f(-u) e^{-(-z_0)u} du.$$

Se ora poniamo  $f(-u) = g(u)$  e  $T = -S$  otteniamo che:

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^0 f(t) e^{-z_0 t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(u) e^{-(-z_0)u} du = \mathcal{L}(g)(-z_0).$$

Ne segue che la restrizione di  $g$  a  $\mathbb{R}^+$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e sarà  $\rho_g^* \leq \Re(-z_0)$ . Poniamo ora  $-\rho_f^* g = \sigma_f^*$ . Avremo allora

$$\rho_f^* \leq \Re(z_0) \leq \sigma_f^*.$$

Se  $\rho_f^* < \sigma_f^*$  allora la trasformata di Laplace bilatera convergerà nella striscia di piano complesso compresa fra le rette verticali  $\Re(z) = \rho_f^*$  e  $\Re(z) = \sigma_f^*$  (l'eventuale convergenza sulle due rette va trattata a parte).

**Osservazione 5.3.3.** Data  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  la possiamo prolungare in modo pari a tutto  $\mathbb{R}$ , cioè poniamo

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \leq 0$$

ottenendo una funzione (che chiameremo ancora  $f$ ) che appartiene a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Di questa funzione possiamo considerare la trasformata di Laplace bilatera. Se la  $f$  aveva un'ascissa di convergenza  $\rho_f^* < 0$  allora la trasformata bilatera della funzione prolungata convergerà nella striscia  $\rho_f^* < \Re(z) < -\rho_f^*$ . Se invece  $\rho_f \geq 0$  la  $f$  prolungata non sarà trasformabile bilateralmente.

**Definizione 5.3.4.** Se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-z_0 t}| dt$$

è finito in almeno un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , allora la  $f$  si dice **assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente** e indichiamo la sua **trasformata bilatera assoluta** con  $\mathcal{L}_{Ba}(f)$ , cioè:

$$\mathcal{L}_{Ba}(f)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt} dt.$$

**Osservazione 5.3.5.** Come nel caso della trasformata bilatera, l'insieme di convergenza assoluta sarà una striscia (con frontiera da considerare a parte) del tipo

$$\rho_f < \Re(z) < \sigma_f.$$

In tale insieme risulterà  $\mathcal{L}_{Ba}(f) = \mathcal{L}_B(f)$ .

**Teorema 5.3.6.** Sia  $f$  assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente, allora risulta

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{Ba}(f)(z) = 0 \quad \text{con} \quad \rho_f < \Re(z) < \sigma_f.$$

Per quanto riguarda l'olomorfia della trasformata bilatera, vale un risultato analogo a quello per la trasformata unilatera:

**Teorema 5.3.7.** Sia  $f$   $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente. Allora  $\mathcal{L}_B(f)$  è una funzione olomorfa nella striscia  $\rho_f^* < \Re(z) < \sigma_f^*$  e vale la relazione:

$$(\mathcal{L}_B(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}_B(t^n f(t)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia ora  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Supponiamo che la  $f$  sia assolutamente trasformabile bilateralmente e che l'asse immaginario (la retta  $\Re(z) = 0$ ) appartenga all'insieme di trasformabilità

assoluta. Se consideriamo  $z = i\omega$  con  $\omega \in \mathbb{R}$  e calcoliamo la trasformata bilatera in  $z$  otteniamo:

$$\mathcal{L}_B(f)(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\omega).$$

Se invece consideriamo un punto qualsiasi (sempre nell'insieme di trasformabilità assoluta)  $z = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , risulta:

$$\mathcal{L}_{Ba}(f)(a + ib) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(a+ib)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)e^{-at}) e^{-ibt} dt = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(t)e^{-at})(b).$$

Queste due relazioni esprimono il legame che sussiste fra le trasformate di Fourier e di Laplace. Si potrebbe quindi pensare alla trasformata di Fourier come a una trasformata di Laplace "ristretta all'asse immaginario".

#### 5.4. Inversione della trasformata.

Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$   $\mathcal{L}$ -trasformabile bilateralmente assolutamente. Fissiamo  $x \in \mathbb{R}$  con  $\rho_f < x < \sigma_f$ . Consideriamo la funzione

$$(5.4.1) \quad g(t) = e^{-xt}f(t).$$

Per ogni  $y \in \mathbb{R}$  possiamo calcolare la trasformata di Fourier della  $g$ , infatti sussiste la relazione:

$$(5.4.2) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}_{Ba}(f)(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iyt} dt = \hat{g}(y).$$

Supponiamo che in un fissato punto  $t \in \mathbb{R}$  valga la condizione del Dini (vedi definizione 4.2.4) per la funzione  $g$ , allora possiamo invertire la trasformata di Fourier, grazie al teorema 4.2.5, ottenendo:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(y)e^{iyt} dy$$

quindi, ricordando la (5.4.1) e la (5.4.2) :

$$e^{-xt}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}_{Ba}(f)(x + iy)e^{iyt} dy.$$

Moltiplicando per  $e^{-xt}$  si ottiene:

$$(5.4.3) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{Ba}(f)(x+iy) e^{xt} e^{iyt} dy = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{Ba}(f)(x+iy) e^{(x+iy)t} dy.$$

Nei punti dove invece valgono solo le condizioni del Dini unilaterali (definizione 4.2.9) si avrà:

$$(5.4.4) \quad \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{Ba}(f)(x+iy) e^{(x+iy)t} dy.$$

**Osservazione 5.4.1.** *L'integrale che compare al secondo membro delle equazioni (5.4.3) e (5.4.4) si indica anche nel seguente modo:*

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathcal{L}_{Ba}(f)(z) e^{zt} dz.$$

Tale notazione tende a sottolineare che la variabile complessa di integrazione descrive una retta parallela all'asse immaginario di equazione  $\Re(z) = x$ .

**Osservazione 5.4.2.** *Le funzioni integrande in (5.4.3) e (5.4.4) dipendono dalla variabile  $x$ , mentre il primo membro delle suddette equazioni non ne dipende.*

Una spiegazione di questo fatto si può ottenere nel seguente modo: consideriamo due rette parallele di equazioni

$$(5.4.5) \quad \Re(z) = x \quad \Re(z) = x'.$$

Consideriamo ora un circuito rettangolare i cui lati verticali si appoggiano su queste due rette e i lati orizzontali sono ad altezza  $R$  e  $-R$ , più precisamente i lati saranno:

$$L_1 = \{x \leq \Re(z) \leq x', \Im(z) = -R\}, \quad L_2 = \{\Re(z) = x', -R \leq \Im(z) \leq R\}$$

$$L_3 = \{x \leq \Re(z) \leq x', \Im(z) = R\}, \quad L_4 = \{\Re(z) = x, -R \leq \Im(z) \leq R\}.$$

Essendo la trasformata di Laplace una funzione olomorfa, come la funzione  $y \mapsto e^{(x+iy)t}$  che la moltiplica, l'integrale sul suddetto circuito vale zero. Considerando inoltre il fatto che  $\mathcal{L}(f)$  decade a zero quando  $|z|$  tende all'infinito, si ottiene facilmente che l'integrale sui due lati  $L_1$  e  $L_3$  tende a zero per  $R \rightarrow \infty$ . Quindi l'integrale sul lato  $L_2$  sarà uguale in modulo ma opposto in segno a quello sul lato  $L_4$  per  $R \rightarrow \infty$  (ricordiamo che nel circuito

i due lati vengono percorsi con versi opposti). Ne segue che gli integrali sulle due rette (5.4.5) sono uguali. ■

**Osservazione 5.4.3.** *Un risultato del tutto analogo al precedente vale anche per la trasformata assoluta unilatera. Infatti le formule (5.4.3) e (5.4.4) valgono anche se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$  è assolutamente  $\mathcal{L}$ -trasformabile (unilateralmente).*

Una particolare attenzione riguarda l'inversione della trasformata non assoluta. Abbiamo il seguente risultato:

**Teorema 5.4.4.** *Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$   $\mathcal{L}$ -trasformabile. Allora per quasi ogni  $t \in \mathbb{R}^+$  (rispetto alla misura di Lebesgue) si ha:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \text{v.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tz} \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z} dz$$

dove  $x$  è un qualsiasi numero reale tale che  $x > \rho_f^*$ .

# Capitolo 6

## Equazioni differenziali alle derivate parziali

### 6.1. Introduzione.

Consideriamo un sottoinsieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$  e una funzione  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^k$ . Per indicare le derivate parziali della  $u$  utilizzeremo la notazione  $u_{x_j}$  invece di  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ . Inoltre, nel caso di due o tre variabili, indicheremo le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  con  $x, y, z$ . Quindi, ad esempio, la notazione  $u_{xyy}$  significa  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y}$ . Useremo anche la seguente notazione per le derivate di ordine superiore:

**Definizione 6.1.1.** Sia  $k$  un numero intero positivo.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  si dice **multi indice di ordine**  $k$  se  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ . Per indicare l'ordine di un multi indice useremo la notazione  $|\alpha|$ , quindi in questo caso sarà  $|\alpha| = k$ . Data una funzione  $u$  di  $n$  variabili, useremo il simbolo  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$  col significato:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quindi l'espressione precedente indica che stiamo effettuando una derivata di ordine  $|\alpha| = k$  della  $u$  derivando  $\alpha_1$  volte rispetto alla variabile  $x_1$ ,  $\alpha_2$  volte rispetto a  $x_2$  e così via.

**Definizione 6.1.2.** Un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $k$  è un'equazione che coinvolge la funzione  $u$  e le sue derivate fino all'ordine  $k$ . Utilizzando la notazione appena introdotta, è un'equazione della forma:

$$F\left(x, u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0 \quad |\alpha| \leq k.$$

Useremo anche l'abbreviazione **PDE** (dall'acronimo inglese per "partial differential equation").

**Esempio 6.1.3.** In dimensione 3 una PDE di ordine 2 (secondo le notazioni precedenti quindi  $n = 3$  e  $k = 2$ ). è una relazione del tipo

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz}) = 0$$

dove  $F$  è una funzione di 13 variabili.

**Esempio 6.1.4.**

$$(6.1.1) \quad u_{yy} + e^{2y}u_{xy} + \sin x u_y + u^2 + \cos(x+y) = 0$$

è una PDE del secondo ordine in due variabili (quindi  $n = 2$  e  $k = 2$ ).

**Definizione 6.1.5.** Una PDE di ordine  $k$  si dice **lineare rispetto alle derivate di ordine superiore** se è della forma:

$$(6.1.2) \quad \left( \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} \right) + \tilde{F} = 0$$

dove  $\tilde{F}$  è una funzione che può dipendere dalle variabili  $x_j$ , dalla  $u$  e dalle derivate della  $u$  di ordine minore di  $k$ , e le  $a_{i_1 \dots i_k}$  sono funzioni delle sole variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

**Esempio 6.1.6.** Nel caso  $n = 2$  e  $k = 2$  una PDE lineare rispetto alle derivate di ordine superiore è della forma:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + \tilde{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

**Osservazione 6.1.7.** Notiamo che in questo esempio il termine  $a_{12}$  compare moltiplicato per 2 e non compare il termine  $a_{21}$ . Questo è un fatto del tutto generale ed è dovuto al teorema di Schwarz che ci garantisce che se  $u$  è di classe  $C^2$  allora  $u_{xy} = u_{yx}$ , quindi in realtà le derivate seconde da cui dipende l'equazione sono 3 e non 4. Avremmo potuto scrivere  $(a_{12} + a_{21})u_{xy}$  ma tradizionalmente si considerano uguali i coefficienti  $a_{12}$  e  $a_{21}$ . Osserviamo che questo non comporta alcuna perdita di generalità. Basta infatti porre  $\tilde{a}_{12} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$  per ottenere che  $a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} = 2\tilde{a}_{12}u_{xy}$ . Analogo risultato vale per le derivate miste di ordine superiore.

**Esempio 6.1.8.**

$$\log(x+3y)u_{xx} + e^x u_{xy} + \sin(y^2x)u_{yy} + u_x e^{u_y+3} - u_y^2 \cos x = 0$$

è una PDE di ordine 2 in 2 variabili lineare rispetto alle derivate di ordine superiore.

**Definizione 6.1.9.** Una PDE della forma (6.1.2) dove le funzioni  $a_{i_1 \dots i_k}$  dipendono non solo dalle  $x_j$  ma anche da  $u$  e dalle sue derivate fino all'ordine  $k-1$  si dice **quasilineare**.

**Esempio 6.1.10.**

$$\sin(x+u_x)u_{xx} - e^u u_{yy} + \cos(u_x + u_y) = 0$$

è una PDE di ordine 2 in 2 variabili quasilineare.



**Definizione 6.1.11.** Una PDE si dice **lineare** se è lineare rispetto alle derivate di ordine superiore e la funzione  $\tilde{F}$  dell'equazione (6.1.2) è lineare rispetto alla  $u$  e alle sue derivate di ogni ordine, quindi la l'equazione è lineare rispetto a tutte le sue variabili, eccetto al più le variabili  $x_j$ .

**Esempio 6.1.12.**

$$\sin(x+y)u_{xx} + \log(\cos x)u_{yy} + x^3u_{zx} + x^2u_y + e^{xyz} = 0$$

è una PDE lineare di ordine 2 in 3 variabili. L'equazione (6.1.1) invece non è lineare perché non lo è rispetto alla  $u$  che compare elevata al quadrato.

**Osservazione 6.1.13.** La forma generale di una PDE di ordine  $k$  in  $n$  variabili lineare è quindi la seguente:

$$(6.1.3) \quad \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} + \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n a_{i_1 \dots i_{k-1}} u_{x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}} + \dots + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + bu + c = 0$$

dove le funzioni  $a_{i_1 \dots i_k}, a_{i_1 \dots i_{k-1}}, \dots, a_i, b, c$  dipendono solo dalle variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

**Definizione 6.1.14.** Se le funzioni  $a_{i_1 \dots i_k}, a_{i_1 \dots i_{k-1}}, \dots, a_i, b, c$  che compaiono nell'equazione (6.1.3) non dipendono da  $x_1, \dots, x_n$  (sono quindi coefficienti numerici) l'equazione lineare si dice a **coefficienti costanti**. Se  $c = 0$  l'equazione si dice **omogenea** (indipendentemente dal fatto che sia a coefficienti costanti o meno).

## 6.2. Equazioni del secondo ordine.

Ci occupiamo, in questo paragrafo, delle equazioni di secondo ordine lineari rispetto alle derivate seconde, quindi, in accordo con la formula (6.1.2) :

$$(6.2.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \tilde{F}(x, u, \nabla u) = 0.$$

Classificheremo queste equazioni in base alle caratteristiche dei coefficienti  $a_{ij}(x)$ . Supponiamo quindi che l'equazione (6.2.1) sia definita in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ . Fissato un punto  $x$  in  $\Omega$  consideriamo la matrice  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1, \dots, n}$ . Come abbiamo notato nell'osservazione 6.1.7, la matrice  $A(x)$  è simmetrica grazie al teorema di Schwarz, quindi, per il teorema spettrale, ha tutti gli autovalori reali. La classificazione sarà fatta in base al segno degli autovalori; più precisamente:

- i) se esiste almeno un autovalore nullo, l'equazione si dice **parabolica** nel punto  $x$ ;
- ii) se tutti gli autovalori sono diversi da zero e hanno lo stesso segno, l'equazione si dice **ellittica** nel punto  $x$ ;
- iii) se gli autovalori sono diversi da zero ma non hanno tutti lo stesso segno, l'equazione si dice **iperbolica** nel punto  $x$ .

**Esempio 6.2.1 .**

$$\Delta u = f(x, u, \nabla u)$$

è un'equazione ellittica in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Infatti, la matrice  $A(x)$  dei coefficienti delle derivate seconde è costantemente uguale alla matrice identica.

**Esempio 6.2.2 .**

$$xu_{xx} + u_{yy} = 0$$

è un'equazione ellittica nel semipiano  $x > 0$ , parabolica sulla retta  $x = 0$  e iperbolica nel semipiano  $x < 0$ . Tale risultato si ottiene facilmente osservando che la matrice dei coefficienti delle derivate seconde è diagonale:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 6.2.3.** *La classificazione può essere fatta, in modo perfettamente equivalente, in base al segno della forma quadratica associata alla matrice  $A(x)$ . Infatti, fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ , consideriamo la forma quadratica  $q_x$  definita su  $\mathbb{R}^n$  nel seguente modo:*

$$q_x(\xi) = (A(x)\xi|\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

L'equazione differenziale è:

- i) **parabolica** in  $x$  se e solo se  $q_x$  è degenere;
- ii) **ellittica** in  $x$  se e solo se  $q_x$  è definita positiva oppure definita negativa;
- iii) **iperbolica** in  $x$  se e solo se  $q_x$  è indefinita.

**Esempio 6.2.4 .** Consideriamo l'equazione

$$e^y u_{xx} + 4e^{x+y} u_{xy} + e^{3y} u_{yy} + \sin(x+y) \cos u_y + u^3 = 0.$$

La matrice dei coefficienti delle derivate seconde risulta:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} e^y & 2e^{x+y} \\ 2e^{x+y} & e^{3y} \end{pmatrix}$$

il determinante di  $A$  è  $\det(A) = e^{4y} - 4e^{2(x+y)} = e^{2y}(e^{2y} - 4e^{2x})$  quindi si annulla solo sulla retta di equazione  $y = \frac{1}{2} \log 4 + x$  dove l'equazione risulta parabolica. Osserviamo ora

che  $a_{11}(x, y) = e^y > 0$ , quindi nei punti dove il determinante è positivo l'equazione sarà ellittica; tali punti sono quelli del semipiano  $y > \frac{1}{2} \log 4 + x$ . Se invece  $y < \frac{1}{2} \log 4 + x$  il determinante di  $A$  è negativo e la forma quadratica è indefinita. In quest'ultimo semipiano l'equazione è dunque iperbolica. ■

### 6.3. Condizioni al contorno.

Dato  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo una generica equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $k$  definita in  $\Omega$ :

$$(6.3.1) \quad F\left(x, u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0, \quad |\alpha| \leq k$$

Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, l'equazione (6.3.1) può avere molte soluzioni (o anche non averne affatto). Si possono quindi aggiungere delle condizioni per identificare le soluzioni che ci interessano. Nel caso delle PDE le condizioni possono essere di vario tipo. Fra le più utilizzate, sia nelle applicazioni che nella teoria, ci sono le **condizioni al contorno**. Il loro nome deriva dal fatto che si impone qualche tipo di condizione per la soluzione sulla frontiera del dominio  $\Omega$ . I due principali tipi di condizioni al contorno prendono il nome di **condizioni di Dirichlet** e di **condizioni di Neumann**. Data una funzione  $\psi(x)$  definita sulla frontiera di  $\Omega$ , imporre una **condizione di Dirichlet** significa richiedere che la soluzione dell'equazione (6.3.1) assuma su  $\partial\Omega$  gli stessi valori di  $\psi$ . Quindi dovremo risolvere il problema:

$$\begin{cases} F\left(x, u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0, & |\alpha| \leq k, & \forall x \in \Omega \\ u(x) = \psi(x) & & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Analogamente, data  $\varphi(x)$  definita su  $\partial\Omega$ , prende il nome di **condizione di Neumann** l'imporre che la derivata normale della soluzione sia uguale a  $\varphi$ :

$$\begin{cases} F\left(x, u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0, & |\alpha| \leq k, & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x) & & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $n(x)$  è il versore normale alla frontiera  $\partial\Omega$  nel punto  $x$ . Ovviamente questo secondo tipo di condizione presuppone una certa regolarità della frontiera, almeno quella sufficiente per poter definire il versore normale.

Le due condizioni possono anche essere assegnate separatamente su parti della frontiera. Più precisamente, se  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , possiamo assegnare una condizione di Dirichlet su  $\Gamma_1$

ed una di Neumann su  $\Gamma_2$ . Quindi il problema assume il seguente aspetto:

$$\begin{cases} F\left(x, u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0, & |\alpha| \leq k, & \forall x \in \Omega \\ u(x) = \psi(x) & & \forall x \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x) & & \forall x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

In questo caso si parla anche di **condizioni miste**. Facciamo notare che si pone immediatamente un **problema di compatibilità** per le due condizioni. Infatti se  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$  nei punti di intersezione risulterà contemporaneamente  $u = \psi$  e  $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi$  il che presuppone un certo legame fra la  $\psi$  e la  $\varphi$ . Non entreremo nel merito delle vastissime problematiche che coinvolgono i problemi al contorno, ci limiteremo a illustrarle con qualche esempio.

**Esempio 6.3.1 .** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un insieme aperto e sia  $k$  una costante non nulla. Il problema

$$\begin{cases} u_{zz} = k^2(u_{xx} + u_{yy}) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è un problema al contorno iperbolico con condizioni di Neumann. Quando la funzione assegnata sulla frontiera è nulla, come in questo caso, si parla di condizioni **omogenee**.

#### 6.4. Condizioni iniziali.

Talvolta, seguendo i modelli che derivano dalla fisica, si tende a privilegiare una variabile che spesso viene indicata con  $t$  facendo riferimento alla variabile temporale. Quindi, se indichiamo con  $x$  un punto dello spazio  $\mathbb{R}^n$  possiamo pensare a una PDE ambientata in un insieme dello spazio  $\mathbb{R}^{n+1}$  di tipo cilindrico. Sia quindi  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $T$  un numero reale positivo. Indichiamo con  $Q$  il cilindro dello spazio  $\mathbb{R}^{n+1}$  dato da  $Q = \Omega \times [0, T]$ . Allora una funzione definita su  $Q$  sarà una funzione di  $n + 1$  variabili che indicheremo con  $u(x, t)$ . In questo caso la frontiera di  $Q$  risulta formata da tre parti:  $\partial Q = \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{T\} \cup \partial\Omega \times [0, T]$ . Le prime due sono le basi inferiore e superiore del cilindro, mentre la terza è la superficie laterale. Pensando all'evoluzione temporale del problema, le condizioni imposte sulla base inferiore del cilindro ( $\Omega \times \{0\}$ ) prendono il nome di **condizioni iniziali**, mentre quelle date sulla superficie laterale continuano a chiamarsi condizioni al contorno. Molto spesso non si dà nessuna condizione sulla base superiore del cilindro oppure si considera il caso  $T = \infty$ , avendo a che fare quindi con un cilindro di altezza infinita  $Q = \Omega \times [0, \infty)$ , privo di base superiore. Su un insieme di questo tipo si può anche porre qualche tipo di condizione **asintotica**, cioè ci si domanda quale sarà il comportamento della soluzione per  $t$  tendente all'infinito (ammesso ovviamente che la soluzione esista per ogni  $t$ ).

**Esempio 6.4.1 .** Il problema della corda vibrante, descritto dall'equazione (2.3.1) e dalle successive condizioni è del tipo appena descritto. Il dominio dove si ambienta è un cilindro infinito  $Q = [0, l] \times [0, \infty)$ . Quindi, usando le notazioni precedenti avremo  $n = 1$  e  $\Omega = (0, l) \subset \mathbb{R}$ , quindi la frontiera di  $\Omega$  è formata da due soli punti:  $\partial\Omega = \{0\} \cup \{l\}$ . Le condizioni (2.3.2) e (2.3.3) sono condizioni iniziali in quanto sono date sulla base del cilindro  $[0, l] \times \{0\}$ . La condizione (2.3.4) è invece una condizione al contorno, essendo assegnata sulla superficie laterale formata dalle due semirette  $(\{0\} \cup \{l\}) \times [0, \infty)$ , di tipo Dirichlet omogenea. Si ottiene quindi il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } Q \\ u(x, t) = f(x) & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ u(x, t) = 0 & \text{in } (\{0\} \cup \{l\}) \times [0, \infty) \end{cases}$$

## 6.5. L'equazione delle onde.

Consideriamo il seguente problema iperbolico alle derivate parziali:

$$\begin{cases} u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = p(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = q(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove  $p$  e  $q$  sono funzioni continue assegnate. Questa equazione è un modello per una corda elastica di lunghezza infinita con configurazione iniziale descritta dal grafico della funzione  $p$  e velocità iniziale  $q$ ; la funzione  $u(x, t)$  descrive lo spostamento della corda dalla posizione di riposo nel punto  $x$  all'istante  $t$ . Per risolvere l'equazione eseguiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \xi = x + kt \\ \tau = x - kt. \end{cases}$$

Definiamo ora una nuova funzione  $v(\xi, \tau)$  nel seguente modo:

$$v(x + kt, x - kt) = u(x, t).$$

Calcolando le derivate parziali prime e seconde di  $u$  con le regole di derivazione della funzione composta otteniamo:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi + v_\tau, & u_t &= kv_\xi - kv_\tau \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\tau\xi} + v_{\tau\tau}, & u_{tt} &= k^2 v_{\xi\xi} - 2k^2 v_{\tau\xi} + k^2 v_{\tau\tau}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ha:

$$v_{\tau\xi} = 0$$

quindi, integrando nella variabile  $\tau$ :

$$v_{\xi}(\xi, \tau) = f(\xi)$$

con  $f$  funzione arbitraria. Integrando ora nella variabile  $\xi$  si ha:

$$v(\xi, \tau) = F(\xi) + G(\tau)$$

dove  $F$  è una primitiva di  $f$  e  $G$  è una funzione arbitraria (possiamo supporre  $f$  continua per essere sicuri di trovarne una primitiva). Cerchiamo ora di determinare  $F$  e  $G$  in base alle condizioni iniziali. Eseguiamo di nuovo il cambiamento di variabili tornando alla funzione  $u$ :

$$u(x, t) = v(x + kt, x - kt) = F(x + kt) + G(x - kt)$$

quindi, calcolandola per  $t = 0$ :

$$p(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x).$$

Supponiamo  $G$  di classe  $C^1$  e deriviamo rispetto a  $t$ :

$$u_t(x, t) = kF'(x + kt) - kG'(x - kt).$$

Calcoliamo anche questa funzione per  $t = 0$ :

$$q(x) = u_t(x, 0) = kF'(x) - kG'(x);$$

fissando un punto  $x_0$  e integrando rispetto a  $x$ :

$$F(x) - G(x) = \int_{x_0}^x \frac{q(y)}{k} dy + \lambda$$

con  $\lambda$  costante arbitraria. Abbiamo quindi ottenuto il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = p(x) \\ F(x) - G(x) = \int_{x_0}^x \frac{q(y)}{k} dy + \lambda \end{cases}$$

che risolviamo rispetto a  $F$  e  $G$ :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}p(x) + \int_{x_0}^x \frac{q(y)}{k} dy + \frac{\lambda}{2} \\ G(x) = \frac{1}{2}p(x) - \int_{x_0}^x \frac{q(y)}{k} dy - \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

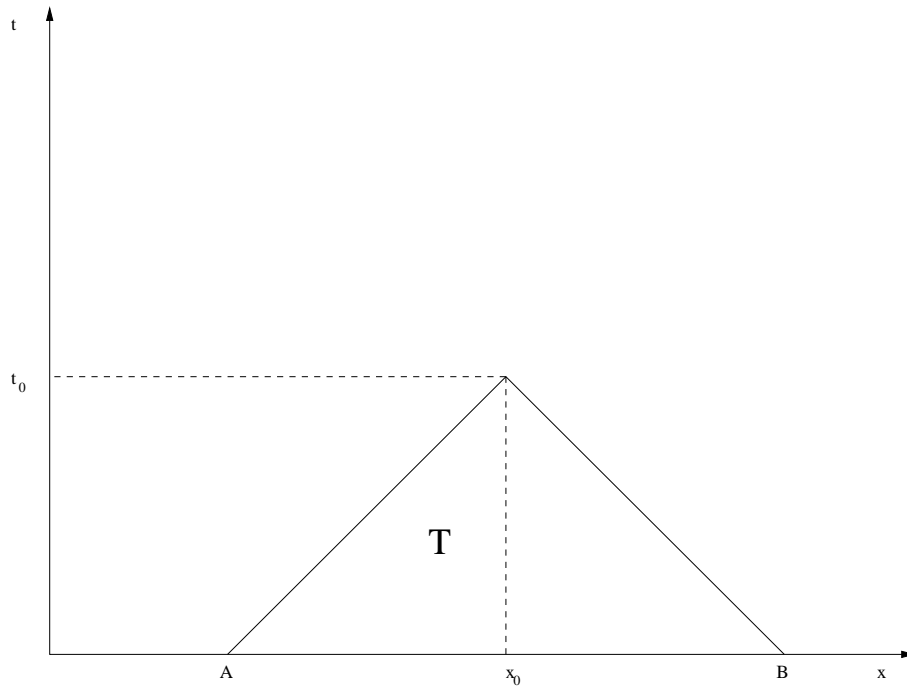
Sostituiamo il risultato ottenuto nella  $u$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) = F(x + kt) + G(x - kt) &= \frac{1}{2}p(x + kt) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x+kt} \frac{q(y)}{k} dy + \frac{1}{2}p(x - kt) + \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x-kt} \frac{q(y)}{k} dy = \frac{p(x + kt) + p(x - kt)}{2} + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} q(y) dy. \end{aligned}$$

Quest'ultima formula, che rappresenta la soluzione dell'equazione delle onde, prende il nome di **formula di D'Alembert**. Notiamo che le costanti arbitrarie  $x_0$  e  $\lambda$  introdotte precedentemente non compaiono nella soluzione che dipende solo dai dati iniziali  $p$  e  $q$ . Cerchiamo ora di interpretare quello che abbiamo ottenuto. Consideriamo un riferimento cartesiano dove mettiamo sull'asse delle ascisse la variabile spaziale  $x$  e sull'asse delle ordinate la variabile temporale  $t$  (il cosiddetto **piano delle fasi**). Fissiamo un punto  $(x_0, t_0)$  e tracciamo le **rette caratteristiche** di pendenza  $\frac{1}{k}$  e  $-\frac{1}{k}$  fino all'asse  $x$ . Le rette sono rispettivamente di equazione  $x - kt = x_0 - kt_0$  e  $x + kt = x_0 + kt_0$  e intersecano l'asse  $x$  nei punti di ascissa  $A = x_0 - kt_0$  e  $B = x_0 + kt_0$ . Osserviamo che nei punti delle caratteristiche le funzioni  $p(x + kt)$  e  $p(x - kt)$  sono costanti, quindi

$$u(x_0, t_0) = \frac{p(B) + p(A)}{2} + \frac{1}{2k} \int_A^B q(s) ds.$$

Ne risulta che l'ampiezza dell'onda nel punto  $x_0$  all'istante  $t_0$  è la media delle ampiezze delle onde propagantesi in avanti e all'indietro partite dai punti  $A$  e  $B$  all'istante  $t = 0$ , alla quale va sommato il contributo dovuto alla velocità iniziale sul segmento  $AB$ . Quindi le condizioni date su  $AB$  definiscono completamente la soluzione in tutti i punti del triangolo  $T$ . Se la velocità iniziale è nulla ( $q = 0$ ) allora l'onda iniziale  $p(x)$  si divide in due onde di metà ampiezza, una viaggiante in avanti e l'altra all'indietro con lo stessa velocità  $k$  (a parte il verso):



$$u(x, t) = \frac{1}{2}p(x - kt) + \frac{1}{2}p(x + kt).$$

### 6.6. L'integrale di Poisson.

Ci occupiamo di un problema classico per le equazioni ellittiche: il problema dell'equazione di Laplace in un dominio circolare. Consideriamo quindi, in  $\mathbb{R}^2$ , l'operatore di Laplace  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  e ci poniamo il seguente problema: trovare una funzione  $u$  di classe  $C^2$  nel dominio aperto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$  e continua nella sua chiusura  $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$  tale che risulti

$$(6.6.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, y) = h(x, y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $h$  è una funzione assegnata e di classe  $C^1$  sulla frontiera di  $\Omega$ . Come vedremo è possibile risolvere questo problema e la soluzione è calcolabile esplicitamente attraverso il cosiddetto **integrale di Poisson**.

Per prima cosa trasformiamo il problema in coordinate polari, cerchiamo quindi una funzione  $v$  che dipende dalle coordinate  $\rho$  e  $\theta$  ed è legata ad  $u$  dalla seguente relazione:

$$v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Il nostro primo compito è quello di riscrivere l'equazione di Laplace in coordinate polari. Cominciamo derivando la  $v$  seguendo le regole di derivazione della funzione composta:

$$v_\rho = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad v_\theta = -u_x \rho \sin \theta + u_y \rho \cos \theta$$



e, derivando una seconda volta:

$$\begin{aligned} v_{\rho\rho} &= \cos\theta(u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\sin\theta) + \sin\theta(u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta) = \\ &= u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\theta\theta} &= -\rho(\sin\theta(-u_{xx}\rho\sin\theta + u_{yx}\rho\cos\theta) + \cos\theta u_x) + \\ &+ \rho(\cos\theta(-u_{xy}\rho\sin\theta + u_{yy}\rho\cos\theta) - \sin\theta u_y) = \\ &= \rho^2(u_{xx}\sin^2\theta - 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\cos^2\theta) - \rho(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta). \end{aligned}$$

Moltiplicando la derivata seconda rispetto a  $\rho$  per  $\rho^2$  e sommando i risultati si ottiene:

$$\rho^2 v_{\rho\rho} + v_{\theta\theta} \rho^2 (u_{xx} + u_{yy}) - \rho v_\rho$$

quindi

$$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}.$$

Quest'ultima equazione viene spesso ricordata come **Laplaciano in coordinate polari**. Cerchiamo una soluzione dell'equazione:

$$(6.6.2) \quad v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0$$

con la tecnica della **separazione delle variabili**: cerchiamo cioè una soluzione  $v$  che sia il prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna da una sola variabile

$$v(\rho, \theta) = \psi(\rho)\varphi(\theta).$$

L'equazione (6.6.2) diventa quindi:

$$\psi''(\rho)\varphi(\theta) + \frac{1}{\rho}\psi'(\rho)\varphi(\theta) + \frac{1}{\rho^2}\psi(\rho)\varphi''(\theta) = 0$$

e, supponendo  $\varphi(\theta) \neq 0$ ,  $\psi(\rho) \neq 0$ ,

$$\frac{\rho^2\psi''(\rho) + \rho\psi'(\rho)}{\psi(\rho)} = -\frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)}.$$

I due membri dell'equazione appena ottenuta dipendono, il primo solo da  $\rho$  e il secondo solo da  $\theta$ , quindi devono essere entrambi costanti. Avremo allora

$$-\frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = k \quad \text{quindi} \quad \varphi''(\theta) + k\varphi(\theta) = 0.$$

Ci siamo ricondotti a risolvere un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Ricordiamo ora che, a causa del passaggio in coordinate polari, la funzione  $\varphi$

deve essere periodica, quindi, dalla teoria delle equazioni lineari ordinarie, si ha  $k > 0$ . Per comodità poniamo  $k = m^2$  con  $m > 0$ . Avremo allora le soluzioni

$$\varphi(\theta) = c_1 \cos(m\theta) + c_2 \sin(m\theta)$$

con costanti  $c_1$  e  $c_2$  arbitrarie. Essendo il periodo di  $\varphi$  uguale a  $2\pi$ ,  $m$  dovrà essere un numero intero.

Risolviamo ora l'altra equazione:

$$\frac{\rho^2 \psi''(\rho) + \rho \psi'(\rho)}{\psi(\rho)} = m^2.$$

Moltiplicando per  $\psi$  otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria lineare "di Eulero":

$$\rho^2 \psi''(\rho) + \rho \psi'(\rho) - m^2 \psi(\rho) = 0$$

che risolviamo con il cambiamento di variabile  $\rho = e^t$ :

$$(6.6.3) \quad e^{2t} \psi''(e^t) + e^t \psi'(e^t) - m^2 \psi(e^t) = 0.$$

Se ora definiamo  $f(t) = \psi(e^t)$  ed eseguiamo le derivate della funzione composta, otteniamo:

$$f'(t) = e^t \psi'(e^t), \quad f''(t) = e^t \psi'(e^t) + e^{2t} \psi''(e^t)$$

quindi, sostituendo nell'equazione (6.6.3) :

$$f''(t) - m^2 f(t) = 0.$$

Quella che abbiamo ottenuto è di nuovo un'equazione differenziale lineare ordinaria a coefficienti costanti che ha come soluzioni:

$$f(t) = \alpha e^{-mt} + \beta e^{mt}$$

quindi, tornando alla coordinata  $\rho$ :

$$\psi(\rho) = f(\log \rho) = \alpha \rho^{-m} + \beta \rho^m$$

con costanti  $\alpha$  e  $\beta$  arbitrarie. Se vogliamo che la  $\psi$  sia limitata per  $\rho \rightarrow 0$  dovrà essere  $\alpha = 0$ , quindi  $\psi(\rho) = \beta \rho^m$ . Ne segue che

$$v(\rho, \theta) = \psi(\rho) \varphi(\theta) = \beta \rho^m (c_1 \cos(m\theta) + c_2 \sin(m\theta)).$$

Ricordiamo che la  $v$  risolve l'equazione (6.6.2) per qualsiasi valore delle costanti  $\beta, c_1, c_2$  e per ogni  $m \in \mathbb{N}$ . Quindi avremo che, a causa della linearità dell'equazione, anche ogni funzione della forma:

$$\sum_{m=0}^n \beta_m \rho^m (a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta))$$

è soluzione. Ci domandiamo se anche una serie di tali funzioni sarà ancora soluzione. Prima di dare risposta a questa domanda sarà utile considerare le condizioni al bordo del problema. Ricordiamo che deve essere  $u(x, y) = h(x, y)$  sul bordo di  $\Omega$  che in coordinate polari è contraddistinto da avere coordinata  $\rho = R$ . Quindi poniamo  $g(\theta) = h(R \cos \theta, R \sin \theta)$  trasformato in questo modo anche la condizione al bordo in coordinate polari. Per le ipotesi fatte, la  $g$  è una funzione di classe  $C^1$  periodica di periodo  $2\pi$ . Per prima cosa sviluppiamo in serie di Fourier la  $g$  ottenendo

$$g(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

dove

$$(6.6.4) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cos(n\xi) d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \sin(n\xi) d\xi.$$

Osserviamo che, se definiamo

$$(6.6.5) \quad v(\rho, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

con  $a_n$  e  $b_n$  definiti dalle (6.6.4), allora risulta  $u(R, \theta) = g(\theta)$  e la condizione al bordo è soddisfatta. Senza entrare nei dettagli, la regolarità della  $g$  ci garantisce una convergenza sufficiente a poter scambiare l'operatore di derivazione con quello di serie (dove  $\rho < R$ ), ottenendo così la soluzione cercata. Vogliamo ora dare una forma più esplicita alla  $u$ . Riconsideriamo lo sviluppo in serie (6.6.5), sostituiamo al posto di  $a_n$  e  $b_n$  le rispettive espressioni (6.6.4) e scambiamo l'operatore di serie con quello di integrale grazie alla convergenza uniforme:

$$(6.6.6) \quad \begin{aligned} v(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) (\cos(n\xi) \cos(n\theta) + \sin(n\xi) \sin(n\theta)) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n(\xi - \theta)) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Cerchiamo di ricavare ora la somma della serie utilizzando le formule di Eulero (per semplicità di notazione poniamo  $\xi - \theta = \alpha$ ):

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} e^{i\alpha}\right)^n + \left(\frac{\rho}{R} e^{-i\alpha}\right)^n.$$

Ricordiamo ora che se  $|x| < 1$  risulta  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , quindi, tenendo conto che la nostra serie parte da  $n = 1$ , avremo che l'espressione precedente è uguale a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{i\alpha}} + \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{-i\alpha}} \right) - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{R - \rho e^{i\alpha}} + \frac{R}{R - \rho e^{-i\alpha}} \right) = \\ & = -\frac{1}{2} + \frac{R}{2} \frac{R - \rho e^{-i\alpha} + R - \rho e^{i\alpha}}{R^2 - R\rho e^{-i\alpha} - R\rho e^{i\alpha} + \rho^2} = -\frac{1}{2} + \frac{R}{2} \frac{2R - 2\rho \cos \alpha}{R^2 - 2R\rho \cos \alpha + \rho^2} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos \alpha + \rho^2}. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo nella (6.6.6), otteniamo, per ogni  $\rho < R$ :

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\xi - \theta) + \rho^2} d\xi$$

che prende il nome di **integrale di Poisson**. La  $u$  appena trovata risolve sicuramente l'equazione di Laplace con dato al bordo di Dirichlet. Ci domandiamo ora se la soluzione è unica. Dimosteremo un risultato più generale:

**Teorema 6.6.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u$  una funzione di classe  $C^2$  in  $\Omega$  e continua in  $\bar{\Omega}$ . Se  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  e  $u = 0$  su  $\partial\Omega$  allora  $u = 0$  in tutto l'insieme  $\Omega$ .*

**Dim.**

L'insieme  $\Omega$  è limitato, quindi esiste un numero  $R > 0$  tale che  $\Omega$  è contenuto nella palla di centro l'origine e raggio  $R$ , cioè:

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}.$$

Consideriamo ora la funzione  $w(x, y) = \frac{u(x, y)}{R^2 - \|x\|^2}$  che è definita in ogni punto di  $\bar{\Omega}$  dato che il denominatore non si annulla mai.

La  $w$  è continua in  $\bar{\Omega}$  che è un insieme compatto, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo in  $\bar{\Omega}$ . Sia quindi  $M = \max_{\Omega} w(x)$ . Supponiamo per assurdo che sia  $M > 0$ . Essendo  $w = 0$  su  $\partial\Omega$ , il massimo sarà assunto in un punto interno a  $\Omega$ . Sia allora  $(x_0) \in \Omega$  tale che  $w(x_0) = M$ . Per il Corollario 1.9.5 deve essere  $\nabla w(x_0) = 0$  e, per il corollario 1.10.12, deve anche risultare  $\Delta w(x_0) \leq 0$ . Calcoliamo ora il laplaciano di  $u$  in funzione di quello di  $w$ . Dalla definizione di  $w$  abbiamo:

$$u = w(R^2 - \|x\|^2)$$

$$u_{x_j} = w_{x_j}(R^2 - \|x\|^2) - 2x_j w, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$u_{xx} = w_{xx}(R^2 - x^2 - y^2) - 4xw_x - 2w, \quad u_{yy} = w_{yy}(R^2 - x^2 - y^2) - 4yw_y - 2w$$

quindi

$$\Delta u = \Delta w(R^2 - x^2 - y^2) - 4xw_x - 4yw_y - 4w.$$

Calcolando l'espressione appena trovata nel punto  $(x_0, y_0)$  si ha:

$$0 = \Delta w(x_0, y_0)(R^2 - x_0^2 - y_0^2) - 4M.$$

Per le osservazioni precedenti il prodotto  $\Delta w(x_0, y_0)(R^2 - x_0^2 - y_0^2)$  è minore o uguale a zero, mentre  $4M > 0$  per ipotesi, e questo è assurdo. Quindi deve necessariamente essere  $M = 0$ . Analogamente si prova che il minimo di  $w$  su  $\bar{\Omega}$  è zero. Allora la funzione  $w$  è costantemente nulla su  $\Omega$  e anche la  $u$  lo è. ■

**Corollario 6.6.2.** *La soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace (6.6.1) ha soluzione unica.*

**Dim.** Supponiamo che ci siano due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  del problema (6.6.1). Poniamo  $v = u_1 - u_2$ . Per la linearità del laplaciano risulta  $\Delta v = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$  in  $\Omega$ , mentre sul bordo di  $\Omega$  si avrà:  $v = u_1 - u_2 = h - h = 0$ . Allora siamo esattamente nelle ipotesi del teorema 6.6.1, quindi  $v = 0$  su tutto  $\Omega$ . Le due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  sono dunque uguali in tutto l'insieme  $\bar{\Omega}$ . ■

Concludiamo il paragrafo con due importanti proprietà delle funzioni armoniche.

**Teorema 6.6.3. Principio della media**

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica (cioè tale che  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ ). Per ogni  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$  e per ogni  $r > 0$  tale che il disco di centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  e raggio  $r$  sia contenuto in  $\Omega$ , risulta che  $u$  prende nel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  la media dei valori che assume sul bordo del disco:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\bar{x} + r \cos \xi, \bar{y} + r \sin \xi) d\xi.$$

**Dim.** Fissiamo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$  e  $r > 0$  come nelle ipotesi del teorema. Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel disco  $A$  di centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  e raggio  $r$ :

$$(6.6.7) \quad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } A \\ w = u & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Sappiamo che tale problema ha soluzione unica data, dall'integrale di Poisson:

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\xi - \theta) + \rho^2} d\xi$$

dove  $(\rho, \theta)$  sono le coordinate polari traslate nel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , cioè:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \rho \cos \theta \\ y = \bar{y} + \rho \sin \theta, \end{cases}$$

dove  $v$  e  $f$  sono l'espressione rispettivamente di  $w$  e di  $u$  in tali coordinate, cioè  $v(\rho, \theta) = w(\bar{x} + \rho \cos \theta, \bar{y} + \rho \sin \theta)$  e  $f(\theta) = u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta)$ . Calcoliamo ora la  $v$  per  $\rho = 0$ , ottenendo:

$$v(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi$$

e osserviamo che tale valore non dipende giustamente da  $\theta$ , rappresentando il valore che la  $v$  assume nel centro di  $A$ . Ma la funzione  $u$  risolve, per ipotesi, il problema (6.6.7), quindi per l'unicità della soluzione deve essere  $u = w$  in  $\bar{A}$ . Allora risulta:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = w(\bar{x}, \bar{y}) = v(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\bar{x} + r \cos \xi, \bar{y} + r \sin \xi) d\xi.$$

■

#### **Teorema 6.6.4. Principio del massimo**

*Sia  $\Omega$  un aperto limitato e connesso di  $\mathbb{R}^2$  e  $u$  una funzione di classe  $C^2$  in  $\Omega$  e continua in  $\bar{\Omega}$ . Se  $u$  è armonica in  $\Omega$  e assume il suo massimo o il suo minimo in un punto interno ad  $\Omega$  allora  $u$  è costante in  $\bar{\Omega}$ . In particolare, se  $u$  non è costante assume il suo valore massimo e il suo valore minimo sulla frontiera di  $\Omega$ .*

**Dim.** Sia  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$  (che esiste sicuramente visto che  $\bar{\Omega}$  è compatto). Definiamo  $A = \{y \in \Omega : u(y) = M\}$ . Dimostriamo che  $A$  è aperto. Se  $x \in A$  allora esiste  $R > 0$  tale che  $B(x, R) \subset \Omega$ . Per ogni  $r \leq R$  vale il principio della media 6.6.3, quindi sulla circonferenza di centro  $x$  e raggio  $r$  la  $u$  deve assumere costantemente il valore  $M$  (la  $u$  è sicuramente minore o uguale a  $M$  che è il suo valore massimo). Ne segue che  $u = M$  su tutta la palla  $B(x, R)$ , quindi  $B(x, R) \subset A$  che risulta pertanto aperto. Consideriamo ora l'insieme  $B$  complementare di  $A$ , cioè  $B = \{y \in \Omega : u(y) < M\}$ . Anche  $B$  è aperto poiché se  $u(x) < M$ , per la continuità di  $u$ , esiste  $\rho > 0$  tale che  $u(y) < M$  per ogni  $y$  nella palla  $B(x, \rho)$ . Osserviamo infine che  $\Omega = A \cup B$  e che, per l'osservazione 1.3.27,  $A$  e  $B$  sono separati. Dato che  $\Omega$  è connesso, uno dei due insiemi deve essere vuoto. Se  $u$  assumesse il suo massimo in un punto interno ad  $\Omega$  allora sarebbe  $A \neq \emptyset$ , quindi  $B = \emptyset$  e, conseguentemente,  $u$  costante in  $\Omega$ . Se  $u$  non è costante allora sarà  $A = \emptyset$ , quindi  $u$  assume il suo massimo sulla frontiera di  $\Omega$ .

Per quanto riguarda il minimo, basta osservare che  $-u$  è armonica e che il minimo di  $u$  corrisponde al massimo di  $-u$ . ■