**Carlo–Romano Grisanti**

**Analisi Matematica II**

**Massimi e minimi liberi e vincolati in $\mathbb{R}^n$**

### Notazioni

Dati due vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $(u|v)$ il loro prodotto scalare cioè

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

## Massimi e minimi liberi in $\mathbb{R}^n$

**Teorema 1** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in \Omega$ è punto di minimo relativo per f e se f è derivabile rispetto a $x_j$ in $x_0$ allora $f_{x_j}(x_0) = 0$.*

**Dim.** Poiché $\Omega$ è aperto $\exists\, \delta > 0 : x_0 + te_j \in \Omega \ \forall\, t \in (-\delta, \delta)$. Sia $g(t) = f(x_0 + te_j)$. La g è derivabile per $t = 0$ dove ha un punto di minimo relativo, quindi $g'(0) = 0$. Ma $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$. ■

**Esempio 2**

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2.$$

Il punto $x = \binom{1}{2}$ è di minimo assoluto, quindi relativo per f. Infatti risulta $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2(x_1 - 1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2(x_2 - 2)$, $\quad \nabla f(1, 2) = (0, 0)$.

**Osservazione 3** *La condizione non è sufficiente, infatti:*

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2$$

$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ *ma l'origine non è né max né min relativo (studio del segno).*

## Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$

**Definizione 4** *Un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili* $x_1, \dots, x_n$ *si dice forma quadratica in* $\mathbb{R}^n$ .

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Data una matrice $A$ $n \times n$ , le posso associare una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$Q(x) = (Ax|x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Viceversa, posso associare ad una forma quadratica una matrice ma non in modo univoco, questo a causa dei termini misti. La corrispondenza diventa biunivoca quando richiedo che la matrice sia simmetrica.

**Definizione 5** *Una forma quadratica* $Q$ *si dice:*

*Semidefinita positiva* $\iff Q(x) \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

*Semidefinita negativa* $\iff Q(x) \leq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

*Definita positiva* $\iff Q(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

*Definita negativa* $\iff Q(x) < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

*Indefinita se* $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n : \ Q(x) > 0, \ Q(y) < 0$ .

**Osservazione 6** *Se* $Q$ *è una forma quadratica allora* $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Dim.**

$$Q(\lambda x) = \sum_{i,j} a_{ij} \lambda x_j \lambda x_j = \lambda^2 Q(x). \qquad \blacksquare$$

**Teorema 7** *Se $A$ è una matrice reale simmetrica allora tutti i suoi autovalori sono reali.*

Senza dimostrazione.

**Osservazione 8** *$Q$ è una funzione continua quindi su insiemi compatti ammette max e min assoluti.*

**Teorema 9** *Sia $Q$ una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ e sia $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Siano inoltre $m = \min\limits_{x\in S} Q(x)$, $\quad M = \max\limits_{x\in S} Q(x)$. Allora $m$ è il più piccolo autovalore di $A$ e $M$ il più grande (dove $A$ è la matrice simmetrica associata a $Q$).*

**Dim.** Siano $x', x'' \in S$ con $Q(x') = m$, $Q(x'') = M$. Dato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ risulta $\dfrac{x}{|x|} \in S$ quindi $m \leq Q\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \leq M$ cioè $m \leq \dfrac{Q(x)}{|x|^2} \leq M$. Se poniamo $\varphi(x) = \dfrac{Q(x)}{|x|^2}$ allora $m = \min \varphi$, $M = \max \varphi$. Ma $\varphi$ è definita in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che è aperto, quindi $\nabla\varphi(x') = \nabla\varphi(x'') = 0$. Calcoliamo quindi $\nabla\varphi$.

$$Q_{x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\delta_{ih} x_j + \delta jh x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \sum_{i=1}^{n} \delta ih +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \sum_{j=1}^{n} \delta jh = \sum_{j=1}^{n} a_{hj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ih} x_i = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{hj} x_j = 2(Ax|e_h).$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h} |x|^2 = 2x_h.$$

$$\varphi_{x_h} = \frac{Q_{x_h}|x|^2 - 2x_h Q(x)}{|x|^4} = \frac{2(Ax|e_h)|x|^2 - 2x_h Q(x)}{|x|^4} = \frac{2(Ax|e_h) - 2x_h \varphi(x)}{|x|^2}$$

Quindi, riunendo tutte le componenti del vettore $\nabla\varphi$ si ha:

$$\nabla\varphi(x) = \frac{2Ax - 2x\varphi(x)}{|x|^2}$$

$$\nabla\varphi(x') = 0 \Longleftrightarrow 2Ax' = 2x'\varphi(x') = 2x'm$$

quindi $Ax' = mx'$ e analogamente $Ax'' = Mx''$. Sia ora $\lambda$ un altro autovalore per $A$; allora esiste $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : Ax = \lambda x$. Quindi $(Ax|x) = (\lambda x|x)$, cioè $Q(x) = \lambda |x|^2$ e di conseguenza $\varphi(x) = \lambda$. Ne segue che $m \leq \lambda \leq M$. ■

**Teorema 10** *Siano $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ gli autovalori della matrice $A$ (simmetrica $n \times n$). Allora*

*$A$ è semidefinita positiva* $\iff \lambda_1 \geq 0$

*$A$ è semidefinita negativa* $\iff \lambda_m \leq 0$

*$A$ è definita positiva* $\iff \lambda_1 > 0$

*$A$ è definita negativa* $\iff \lambda_m < 0$

*$A$ è indefinita* $\iff \lambda_1 < 0, \quad \lambda_m > 0$.

## Derivate Seconde

Data una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $x_0 \in \Omega$, si dice matrice hessiana di $f$ nel punto $x_0$ la matrice formata dalle sue derivate seconde:

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che se le derivate seconde sono continue in $x_0$, per il teorema di Schwartz, la matrice hessiana è simmetrica.

Se fissiamo il punto $x_0$, possiamo costruire una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ a partire dalla matrice:

$$Q(x) = (Hf(x_0)x|x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Tale forma quadratica prende il nome di *forma quadratica hessiana di $f$*.

Diamo ora delle condizioni sufficienti per avere un max o un min relativo:

**Teorema 11** *Dati $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se $f$ è derivabile due volte in $x_0$ e risultano $\nabla f(x_0) = 0$, $Hf(x_0)$ definita positiva, allora $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$. Se invece $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0)$ è definita negativa, allora $x_0$ è punto di massimo relativo per $f$.*

**Dim.** Utilizziamo la formula di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(Hf(x_0)(x - x_0)|(x - x_0)) + R_2(x)$$

con $\lim_{x \to x_0} \dfrac{R_2(x)}{|x - x_0|^2} = 0$. Allora se $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ sono gli autovalori della matrice $Hf(x_0)$ sarà:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|^2} = \frac{1}{2}\frac{(Hf(x_0)(x - x_0)|(x - x_0)) + R_2(x)}{|x - x_0|^2} \geq \frac{\lambda_1}{2} + \frac{R_2(x)}{|x - x_0|^2}$$

Ricordando che $\lambda_1 > 0$ e osservando che $\lim_{x \to x_0} \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{R_2(x)}{|x - x_0|^2} = \dfrac{\lambda_1}{2} > 0$, per il teorema sulla permanenza del segno $\exists\, \rho > 0$ tale che se $|x - x_0| < \rho$ e $x \neq x_0$ allora $\dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{R_2(x)}{|x - x_0|^2} > 0$. Ne segue che $f(x) \geq f(x_0)$ se $|x - x_0| < \rho$ quindi $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$. La dimostrazione è analoga nel caso in cui $Hf(x_0)$ sia definita negativa. ■

Vediamo ora un caso in cui possiamo negare di essere in presenza di un massimo o di un minimo relativo.

**Teorema 12** *Dati $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se $f$ è derivabile due volte in $x_0$ e risultano $\nabla f(x_0) = 0$, $Hf(x_0)$ indefinita, allora $x_0$ non è né punto di massimo, né punto di minimo relativo.*

**Dim.** Dalla formula di Taylor:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(Hf(x_0)(x - x_0)|(x - x_0)) + R_2(x).$$

Sia $v_1$ l'autovettore relativo all'autovalore più piccolo $\lambda_1$ e sia $v_m$ l'autovettore relativo a quello più grande $\lambda_m$ . Scelgo $x = x_0 + tv_1$ con $t \in \mathbb{R},\ t > 0$ . Allora

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|^2} = \frac{1}{2}\frac{(Hf(x_0)tv_1|tv_1)}{|x-x_0|^2} + \frac{R_2(x)}{|x-x_0|^2} = \frac{1}{2}\frac{t^2\,(Hf(x_0)v_1|v_1)}{|tv_1|^2} + \\ + \frac{R_2(x)}{|x-x_0|^2} = \frac{1}{2}\frac{t^2\,(\lambda_1 v_1|v_1)}{t^2|v_1|^2} + \frac{R_2(x)}{|x-x_0|^2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{R_2(x)}{|x-x_0|^2}$$

Ma $\lambda_1 < 0$ poiché $Hf(x_0)$ è indefinita, allora per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $0 < t < \delta_1$ , risulta $f(x_0 + tv_1) < f(x_0)$ . Analogamente, scegliendo $x = x_0 + tv_m$ , troviamo che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\lambda_m + \frac{R_2(x)}{|x-x_0|^2}$$

Essendo $\lambda_m > 0$ , per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $0 < t < \delta_2$ allora $f(x_0 + tv_m) > f(x_0)$ . Quindi, se scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , nella palla di centro $x_0$ e raggio $\delta$ ci sono punti in cui la funzione assume valori maggiori di $f(x_0)$ e altri punti in cui assume valori minori di $f(x_0)$ . Pertanto $x_0$ non è né punto di massimo né punto di minimo relativo per $f$ . ■

Diamo ora anche una condizione necessaria per l'esistenza di un massimo o di un minimo.

**Teorema 13** *Dati $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $x_0$ , se $x_0$ è punto di minimo relativo (o di massimo relativo) per $f$ , allora risulta $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0)$ semidefinita positiva (semidefinita negativa per il massimo).*

**<u>Dim.</u>** Supponiamo che $x_0$ sia punto di minimo relativo. Il fatto che $\nabla f(x_0) = 0$ segue dal teorema 1 . Se, per assurdo, $Hf(x_0)$ non fosse semidefinita positiva, allora sarebbe definita negativa oppure indefinita. Nel primo caso, per il teorema 11 $x_0$ sarebbe punto di massimo relativo in senso stretto. Infatti, dalla dimostrazione del teorema 11 , segue che $\exists\, \rho > 0$ tale che se $|x - x_0| < \rho$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) < f(x_0)$ , e questo va contro l'ipotesi che $x_0$ sia di minimo relativo. Nel secondo caso, dal teorema 12 si ottiene direttamente che $x_0$ non è punto di minimo relativo. ■

## Curve di punti stazionari

Con $\Omega$ indichiamo un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 14** *Data $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di calsse $C^1(\Omega)$ , se il gradiente di $f$ si annulla sul sostegno $W$ di una curva di classe $C^1$ , allora $f$ è costante su $W$ .*

**Dim.** Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ la curva che ha per sostegno $W$ . Poniamo $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ . Allora risulta

$$\varphi'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \,|\gamma'(t)) = 0$$

quindi $\varphi$ è costante su $[a, b]$ e di conseguenza $f$ è costante su $W$ . ■

**Osservazione 15** *Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $C^2(\Omega)$ e $\nabla f$ si annulla sul sostegno $W$ di una curva regolare di classe $C^2$ , allora la forma quadratica hessiana associata a $f$ non è né definita positiva, né definita negativa su $W$ .*

**Dim.** Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ la curva che ha per sostegno $W$ . Se definiamo $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ , otteniamo una funzione di classe $C^2$ le cui derivate prima e seconda sono: $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\,\gamma_j'(t)$

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\right)\gamma_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\,\gamma_j''(t) =$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\right) + (\nabla f(\gamma(t))\,|\gamma''(t)) = (Hf(\gamma(t))\,\gamma'(t)|\gamma'(t))$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\nabla f$ si annulla sul sostegno di $\gamma$. Ma ora osserviamo che $\varphi$ è una funzione costante (infatti $\varphi'(t) = 0,\ \forall\, t \in [a,b]$), quindi $\varphi''(t) = 0,\ \forall\, t \in [a,b]$. Ne segue che

$$(Hf(\gamma(t))\,\gamma'(t)|\gamma'(t)) = 0\ \forall\, t \in [a,b]$$

quindi $\forall\, t \in [a,b]$, il vettore $\gamma'(t)$ annulla la forma quadratica hessiana pur essendo $\gamma'(t) \neq 0$ in virtù della regolarità di $\gamma$. Ne segue che $Hf$ non può essere né definita positiva né definita negativa. ■

## Massimi e minimi vincolati

**Definizione 16** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Dato $W \subset \Omega$, diremo che un punto $x_0 \in W$ è punto di minimo relativo per $f$ vincolato a $W$ se esite un intorno $U$ di $x_0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in W \cap U$. Analoga definizione nel caso del massimo.*

Consideriamo il caso in cui il vincolo $W$ è il luogo di zeri di una o più funzioni. Cominciamo con funzioni di $2$ sole variabili.

**Teorema 17** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$ e sia $W = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$. Se $(x_0, y_0)$ è punto di* *minimo relativo per* $f$ *vincolato a* $W$ *e se* $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ *allora esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che* $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ .

**Dim.** Dato che $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ almeno una delle derivate parziali di $g$ deve essere diversa da zero. Supponiamo che sia $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Possiamo allora applicare il teorema del Dini e trovare $a, b > 0$ tali che per ogni $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ esiste unico $y(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ con la proprietà:

$$g(x, y(x)) = 0.$$

Poniamo quindi $G(x) = g(x, y(x))$ e osserviamo che $G(x) = 0$ per ogni $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ . Ne segue che $G'(x) = 0$ in tale intervallo. Ma

$$G'(x) = g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x))y'(x)$$

quindi, valutando in $(x_0, y_0)$ si ottiene:

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0$$

che in forma di prodotto scalare diventa:

$$\left( \nabla g(x_0, y_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \right) = 0. \tag{1}$$

Definiamo ora un'altra funzione di una variabile:

$$F : [x_0 - a, x_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x) = f\left(x, y(x)\right).$$

Osserviamo ora che, poiché $(x_0, y_0)$ è di minimo relativo per $f$ vincolato a $W$ , allora $x_0$ è di minimo relativo per $F$ . Infatti, per la definizione di minimo relativo vincolato, esite un intorno $U$ del punto $(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ,

$\forall (x,y) \in U \cap W$. Possiamo ora trovare un intorno rettangolare di $(x_0, y_0)$ che sia contenuto sia in $U$ che nel rettangolo $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, cioè posso trovare $a', b'$ tali che sia $0 < a' \leq a$, $0 < b' \leq b$ e che risulti $[x_0 - a', x_0 + a'] \times [y_0 - b', y_0 + b'] \subset U$. Allora per ogni $x$ tale che $x_0 - a' \leq x \leq x_0 + a'$ sarà $F(x) \geq F(x_0)$, quindi $x_0$ è punto di minimo relativo per $F$. Ma $F$ è di classe $C^1$ e $x_0$ è un punto interno al dominio di definizione di $F$, quindi $F'(x_0) = 0$. Calcoliamo la derivata di $F$:

$$F'(x) = f_x\,(x, y(x)) + f_y\,(x, y(x))\,y'(x)$$

quindi, valutandola in $x_0$:

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0$$

che rappresenta il prodotto scalare

$$\left(\nabla f(x_0, y_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{2}$$

Dalle equazioni (1)e (2)otteniamo che $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono ortogonali allo stesso vettore in $\mathbb{R}^2$, quindi sono multipli uno dell'altro, cioè esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
Nel caso $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ la dimostrazione è analoga. ■

Consideriamo ora funzioni di tre variabili. In $\mathbb{R}^3$ si possono presentare due tipi di situazioni: il vincolo potrebbe essere localmente una superficie oppure una curva. Esaminiamo separatamente i due casi.

**Teorema 18** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aperto,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *di classe* $C^1(\Omega)$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *di classe* $C^1(\Omega)$ *e sia* $W = \{(x,y,z) \in \Omega : g(x,y,z) = 0\}$. *Se* $(x_0, y_0, z_0)$ *è punto* *di minimo relativo per* $f$ *vincolato a* $W$ *e se* $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *allora esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ .

**Dim.** Supponiamo per fissare le idee che sia $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Allora per il teorema del Dini, l'insieme $W$ in un intorno del punto $(x_0, y_0, z_0)$ è grafico di una funzione delle variabili $(x, y)$ . Più precisamente posso ricavare localmente $z = z(x, y)$ in modo che risulti $g(x, y, z(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y)$ in un opportuno intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ del punto $(x_0, y_0)$ . Ma allora, definendo $G(x, y) = g(x, y, z(x, y))$ otteniamo una funzione costante su tutto $U$ , quindi una funzione con gradiente nullo in $U$ . Calcolando il gradiente di $G$ si ha:

$$G_x(x, y) = g_x(x, y, z(x, y)) + g_z(x, y, z(x, y))\, z_x(x, y)$$

$$G_y(x, y) = g_y(x, y, z(x, y)) + g_z(x, y, z(x, y))\, z_y(x, y)$$

e valutando in $(x_0, y_0)$ :

$$g_x(x_0, y_0, z_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)\, z_x(x_0, y_0) = 0$$

$$g_y(x_0, y_0, z_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)\, z_y(x_0, y_0) = 0.$$

Scriviamo queste due equazioni come prodotto scalare:

(3)
$$\left( \nabla g(x_0, y_0, z_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \left( \nabla g(x_0, y_0, z_0) \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Definiamo ora la funzione di due variabili $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ . Tale funzione è di classe $C^1$ ed ha un punto di minimo relativo in $(x_0, y_0)$ che è interno ad $U$ . Quindi sarà $\nabla F(x_0, y_0) = 0$ . Svolgendo calcoli analoghi a quelli fatti per $G$ si ottengono le relazioni:

(4)
$$\left(\nabla f(x_0,y_0,z_0)\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}\right.\right) = 0 \qquad \left(\nabla f(x_0,y_0,z_0)\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\right.\right) = 0.$$

Osserviamo ora che

$$\mathrm{rh}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_x(x_0,y_0) & z_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 2$$

quindi i due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano un piano $\pi$ in $\mathbb{R}^3$. Ma dalle relazioni (3)e (4)segue che $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ sono entrambi ortogonali al piano $\pi$, pertanto sono multipli uno dell'altro. Quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$. ■

Consideriamo ora il caso in cui l'insieme $W$ è dato come luogo di zeri di due funzioni.

**Teorema 19** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, $g_1:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_2:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$. Sia*

$$W = \{(x,y,z) \in \Omega : g_1(x,y,z) = 0,\ g_2(x,y,z) = 0\}.$$

*Se $(x_0,y_0,z_0)$ è punto di minimo relativo per $f$ vincolato a $W$ e se*

$$\mathrm{rh}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = 2$$

*allora esistono* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$

**<u>Dim.</u>** Supponiamo che sia

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Dal teorema del Dini sappiamo che $W$ è grafico di una funzione di una variabile in un intorno del punto $(x_0, y_0, z_0)$ , quindi possiamo trovare un intorno $U \subset \mathbb{R}$ di $x_0$ e due funzioni $y(x), z(x)$ definite in $U$ tali che risulti $g_1(x, y(x), z(x)) = 0$ , $g_2(x, y(x), z(x)) = 0,\ \forall x \in U$ . Definendo le due funzioni

$$G_1(x) = g_1(x, y(x), z(x)), \qquad G_2(x) = g_2(x, y(x), z(x))$$

e osservando che sono costanti in $U$ si ottiene che $G_1'(x) = G_2'(x) = 0$ , $\forall x \in U$ , quindi in particolare, valutandole in $x_0$ :

$$0 = G_1'(x_0) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) y'(x_0) + \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) z'(x_0)$$

$$0 = G_2'(x_0) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) y'(x_0) + \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) z'(x_0).$$

Di nuovo scriviamo queste relazioni in forma vettoriale:

$$\left( \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix} \right) = 0, \qquad \left( \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Osserviamo ora che, grazie alla (5)i vettori $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$ sono linearmente indipendenti, quindi generano un piano $\pi$ che è ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix}$ .

Consideriamo ora la funzione di una variabile $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = f(x, y(x), z(x))$. Tale funzione è di classe $C^1$ ed ha un punto di minimo relativo in $x_0$ che è interno a $U$, quindi $F'(x_0) = 0$, cioè:

$$0 = F'(x_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(x_0).$$

Ne segue che

$$\left( \nabla f(x_0, y_0, z_0) \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix} \right) = 0$$

cioè $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix}$. Questo significa che $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ appartiene al piano $\pi$, quindi esistono due numeri $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$. ■

Diamo ora l'enunciato, senza darne dimostrazione, del risultato che vale più in generale nel caso di funzioni di $n$ variabili con un vincolo dato come luogo di zeri di $m$ funzioni con $m < n$.

**Teorema 20** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$. Sia $m < n$ e $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $C^1(\Omega)$. Indichiamo con $W = \{x \in \Omega : G(x) = 0\}$. Se $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$ vincolato a $W$, e se la matrice $\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_0)\right)$ ha rango $m$, allora esistono $m$ numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \cdots \lambda_m \nabla G_m(x_0)$$

*dove le $G_j$ sono le componenti della funzione vettoriale* $G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ \vdots \\ G_m(x) \end{pmatrix}$.

Osserviamo che qualche volta il precedente teorema viene enunciato in un modo alternativo. Introduciamo una nuova funzione di $n + m$ variabili:

$$\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Phi(x, \lambda) = f(x) - (\lambda | G(x))$$

dove $x$ rappresenta un punto di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda$ un vettore di $\mathbb{R}^m$. Osserviamo che $\Phi$ è una funzione di classe $C^1$ di cui possiamo calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \quad \forall\, j = 1, \ldots n$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = -G_j \quad \forall\, j = 1, \ldots m.$$

Quindi se $x_0$ è un punto di minimo per $f$ vincolato a $W$, per il teorema precedente esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x_0, \lambda) = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots n$ , inoltre è anche $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j}(x_0, \lambda) = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots m$ in quanto $x_0 \in W$ quindi $G_j(x_0) = 0$ $\forall\, j = 1, \ldots m$. Ne segue che $\nabla \Phi(x_0, \lambda) = 0$. Il teorema 20 trova quindi la seguente formulazione: *Se $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$ vincolato a $W$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che $(x_0, \lambda)$ è punto stazionario libero per $\Phi$.*