Carlo–Romano Grisanti

Seminari sulle Funzioni BV

Funzioni BV

Carlo-Romano Grisanti

Introduzione

Questi appunti vogliono essere un approccio semplice per chi debba affrontare problematiche riguardanti le funzioni a variazione limitata. L'interesse dell'argomento è testimoniato dalle numerose applicazioni. Fra le più classiche vi sono i problemi di area minima con vari tipi di vincolo, ad esempio con volume o curvatura media assegnati [6] [9] . Si ambientano bene anche i problemi a frontiera libera come i problemi di transizione di fase [8] , dove la funzione di fase è facilmente rappresentabile con la funzione caratteristica di un insieme di perimetro finito. Fra le più recenti applicazioni ricordiamo il problema del riconoscimento automatico delle immagini formulato da Mumford e Shah in [11] . Tale problema ha trovato soluzione in una nuova versione basata proprio sulle funzioni BV nei lavori di Ambrosio [1] [2] e in numerosi successivi lavori di altri autori per quanto riguarda la regolarità delle soluzioni. A questo proposito va ricordato il lavoro di De Giorgi e Ambrosio [3] dove viene introdotto per la prima volta il nuovo spazio delle funzioni a variazione limitata speciali (SBV) che è un sottospazio delle funzioni BV dove trova la sua formulazione migliore il problema. Negli ultimi anni la teoria delle funzioni SBV è stata ampiamente sviluppata da Ambrosio che ha esteso numerosi risultati di semicontinuità e compattezza relativi a famiglie di funzionali definiti in BV al caso SBV .

In queste pagine vengono fornite le nozioni di base della teoria della misura

e i principali risultati sulle funzioni BV. Gran parte degli enunciati è priva di dimostrazione in quanto lo spirito del lavoro è quello di raccogliere in poche pagine i risultati e di fornire con alcuni esempi delle idee "concrete" della materia; in questa ottica è stato dato ampio spazio al caso di funzioni BV di una sola variabile essendo queste molto più semplici da visualizzare rispetto al caso generale. È comunque facile ritrovare i teoremi presi in esame nei riferimenti bibliografici forniti. Le dimostrazioni che sono state incluse hanno principalmente lo scopo di mostrare le tecniche generalmente adoperate in questo campo.
Le fonti principali dei risultati esposti sono alcuni seminari tenuti da Luigi Ambrosio al dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa nel 1992 e 1993 e le lezioni di Ennio De Giorgi presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

1. Misure astratte.

Definizione 1.1 *Dato X insieme qualsiasi, una funzione $\mu : 2^X \longrightarrow [0,+\infty]$ si dice misura (o misura esterna) se $\mu(\emptyset)=0$ ed è sub–additiva, cioè*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Se $\mu(X) < +\infty$ si dice che μ è finita.

Definizione 1.2 *Una famiglia $\mathcal{F} \subset 2^X$ si dice σ–algebra se $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ è chiusa per passaggio al complementare e per unione numerabile.*

Definizione 1.3 *Data $\mathcal{F}$ σ–algebra in X e μ misura in X, diremo che μ è σ–additiva su $\mathcal{F}$ se per ogni successione di insiemi a due a due disgiunti*

$\{A_j \in \mathcal{F} : j \in \mathbb{N}\}$ *risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Definizione 1.4 *$M \subset X$ è μ–misurabile (secondo Carathéodory) se $\forall\, A \subset X$ risulta:*

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M).$$

Osservazione 1.5 *Se indichiamo con $\mathcal{F}_\mu$ la classe degli insiemi μ–misurabili, allora $\mathcal{F}_\mu$ è una σ–algebra.*

Definizione 1.6 *Una misura μ si dice regolare se $\forall\, B \subset X$ esiste B' μ–misurabile tale che $B \subset B'$ con $\mu(B) = \mu(B')$.*

Osservazione 1.7 *μ è σ – additiva sulla σ – algebra degli insiemi μ–misurabili.*

Definizione 1.8 *$A \subset X$ si dice σ–finito rispetto a μ se $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ con A_j μ – misurabili e $\mu(A_j) < \infty\ \forall\, j \in \mathbb{N}$. Una misura μ si dice σ–finita se X è σ – finito rispetto a μ .*

Definizione 1.9 *Dato $A \subset X$ si definisce restrizione di μ ad A la funzione $(\mu\lfloor A)(B) = \mu(B \cap A)$.*

Osservazione 1.10 *$\mu\lfloor A$ è una misura in X e dato B μ – misurabile, B è anche $(\mu\lfloor A)$ – misurabile.*

Definizione 1.11 *Dato X spazio topologico indichiamo con $\mathcal{B}(X)$ la σ – algebra dei boreliani (la più piccola σ – algebra che contiene gli aperti). Data μ*

misura su X *diciamo che* μ *è Borel regolare se tutti i boreliani sono* μ – *misurabili e se per ogni* $B \subset X$ *esiste* $B' \in \mathcal{B}(X)$ *tale che* $B \subset B'$ *e* $\mu(B) = \mu(B')$.

Definizione 1.12 *Se* X *è spazio metrico con distanza* d *definiamo il supporto della misura* μ *come:*

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in X : \mu\left(B(x,\rho)\right) > 0 \quad \forall\, \rho > 0\}$$

dove $B(x,\rho) = \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$.

Osserviamo che se X è a base numerabile allora $\mathrm{supp}(\mu)$ è il più piccolo chiuso K tale che $\mu(X \setminus K) = 0$.

2. Misure vettoriali.

Definizione 2.1 *Sia* V *uno spazio di Banach con norma* $\|\cdot\|$ *e* X *un insieme qualsiasi. Sia inoltre* $\mathcal{F}$ *una* σ – *algebra in* X *. Diciamo che una funzione* $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow V$ *è una misura vettoriale se*

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) *data una famiglia numerabile e disgiunta di insiemi* $B_j \in \mathcal{F}$ *risulta che la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$ *è convergente in* V *e la sua somma è* $\mu(B)$ *dove* $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

Nel caso che sia $V = \mathbb{R}$ *si dice anche che* μ *è una misura con segno.*

Definizione 2.2 *Data* $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow V$ *misura vettoriale poniamo:*

$$|\mu|(B) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\mu(B_j)\| : B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, B_j \in \mathcal{F}\ \forall\, j \in \mathbb{N} \right\}$$

$|\mu|$ *si dice variazione totale di* μ *. Nel caso in cui sia* $V = \mathbb{R}$ *poniamo anche*

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}, \qquad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Osservazione 2.3 $|\mu|$ *è una misura definita su* $\mathcal{F}$ *ed è* σ *– additiva.*

Osservazione 2.4 *Se* (X, d) *è uno spazio metrico e* $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$ *, ogni misura vettoriale* $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *è estendibile ad una misura* $\tilde{\mu}$ *definita su tutti i sottoinsiemi di* X *nel seguente modo:*

$$\tilde{\mu}(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) : B_j \in \mathcal{B}(X), \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right\}.$$

Si ottiene che $\tilde{\mu}$ *è una misura Borel regolare su* X *e che* $\tilde{\mu}\Big|_{\mathcal{B}(X)} = \mu$ *.*

Teorema 2.5 *Sia* $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty)$ *una misura vettoriale finita e siano* $f_1, \ldots, f_p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funzioni* $\mathcal{F}$ *– misurabili e* μ *– sommabili. Definiamo* $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *come:*

$$\lambda(B) = \left(\int_B f_1 \, d\mu, \ldots, \int_B f_p \, d\mu \right).$$

Allora λ *è una misura vettoriale su* $\mathcal{F}$ *e* $|\lambda| = |f|\mu$ *con* $f = (f_1, \ldots, f_p)$ *. Indichiamo anche la misura* λ *con la notazione* $\lambda = f\mu$ *.*

Osservazione 2.6 *Se* $V = \mathbb{R}^p$ *e* μ *è una misura vettoriale a valori in* $\mathbb{R}^p$ *di componenti* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ *allora* $|\mu| \leq \sum_{j=1}^{p} |\mu_j|$ *.*

3. Derivazione di misure.

Definizione 3.1 *Una misura* μ *su* $\mathbb{R}^n$ *si dice misura di Radon se* μ *è Borel regolare e se* $\mu(K) < \infty$ *per ogni compatto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *.*

Definizione 3.2 *Siano* μ *e* ν *misure di Radon su* $\mathbb{R}^n$ *. Dato* $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ *definiamo:*

$$D_\mu^+\nu(x) = \limsup_{\rho\to 0^+} \frac{\nu(B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))}, \qquad D_\mu^-\nu(x) = \liminf_{\rho\to 0^+} \frac{\nu(B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))}.$$

Se $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$ *poniamo* $D_\mu^+\nu(x) = D_\mu^-\nu(x) = 0$ *. Se* $D_\mu^+\nu(x) = D_\mu^-\nu(x)$ *indichiamo il loro valore comune con* $D_\mu\nu(x)$ *e diciamo che* ν *è derivabile rispetto a* μ *in* x *.*

Definizione 3.3 *Diciamo che* ν *è assolutamente continua rispetto a* μ *se per ogni boreliano* B *tale che* $\mu(B) = 0$ *risulta anche* $\nu(B) = 0$ *e scriviamo* $\nu << \mu$ *. Diciamo invece che* ν *è singolare rispetto a* μ *se esiste un insieme boreliano* N *tale che* $\mu(N) = 0$ *e* $\nu\lfloor(\mathbb{R}^n \setminus N) = 0$ *.*

Teorema 3.4 (Teorema di derivazione di Besicovitch) *Siano* μ, ν *misure di Radon in* $\mathbb{R}^n$ *e sia*

$$N = \left\{ x \in \operatorname{supp}(\mu) : D_\mu^+\nu(x) = D_\mu^-\nu(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Allora $\mu(\mathbb{R}^n \setminus N) = 0, \quad \nu\lfloor N$ *è assolutamente continua rispetto a* μ *e*

$$\nu(B \cap N) = \int_{B\cap N} D_\mu\nu \; d\mu$$

per ogni boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.5 *Data* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *misura vettoriale esiste una funzione* $\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *che è* $|\mu|$ – *sommabile, tale che* $\mu = \nu|\mu|$ *e*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mu\,(B(x,\rho))}{|\mu|\,(B(x,\rho))} = \nu(x) \qquad \textit{per } |\mu| - \textit{quasi ogni } x \in \operatorname{supp}(|\mu|)\,.$$

Risulta inoltre $|\nu(x)| = 1$ *per* $|\mu|$ – *quasi ogni* $x \in \operatorname{supp}(|\mu|)$.

Teorema 3.6 (Teorema di rappresentazione di Riesz) *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *. Indichiamo con* $C_0(\Omega)$ *la chiusura di* $C_c(\Omega)$ *in* L^∞ *(risulta che* $u \in C_0(\Omega)$ *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un compatto* $K \subset \Omega$ *tale che* $|u(x)| < \varepsilon$ *per ogni* $x \in \Omega \setminus K$ *.) Sia* $L : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funzionale lineare e continuo. Allora esiste una misura vettoriale* $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che* $\|L\| = |\mu|(\Omega)$ *e*

$$L(u) = \int_\Omega u \; d\mu \qquad \forall\, u \in C_0(\Omega).$$

Definizione 3.7 *Sia* (μ_h) *una successione di misure vettoriali*

$$\mu_h : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diciamo che (μ_h) *converge debolmente a* μ *misura vettoriale su* $\mathcal{B}(\Omega)$ *se*

$$\lim_{h \to \infty} \int_\Omega u \; d\mu_h = \int_\Omega u \; d\mu \qquad \forall\, u \in C_0(\Omega).$$

4. Semicontinuità e compattezza di misure.

Teorema 4.1 *Se* (μ_h) *è una successione di misure vettoriali su* $\mathcal{B}(\Omega)$ *a valori in* $\mathbb{R}$ *tale che esiste* $M \in \mathbb{R}^+$ *per cui* $|\mu_h|(\Omega) \leq M$ *per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *, allora esiste una sottosuccessione di* (μ_h) *debolmente convergente.*

Teorema 4.2 *Se* (μ_h) *converge debolmente a* μ *allora*

$$|\mu|(\Omega) \leq \liminf_{h\to\infty} |\mu_h|(\Omega).$$

5. Funzioni BV in $\mathbb{R}$.

Definizione 5.1 *Sia* $I = [a, b]$ *un intervallo limitato e chiuso di* $\mathbb{R}$ *e sia* $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *. Definiamo*

$$V(u, I) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| : a = t_1 < \cdots < t_p = b\right\}.$$

Se $a = b$ *poniamo* $V(u, [a, a]) = 0$ *. Se* $J \subset \mathbb{R}$ *è un qualsiasi intervallo di* $\mathbb{R}$ *definiamo*

$$V(u, J) = \sup\left\{V(u, [a, b]) : [a, b] \subset J, \right\}.$$

Osservazione 5.2 *Se* $V(u, J) < \infty$ *allora* u *è limitata in* J *.*

<u>Dim</u>. Dato $t_0 \in J$ qualsiasi, per ogni $t \in J$ risulta $|u(t) - u(t_0)| \leq V(u, J)$ quindi

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| + V(u, J) = c < \infty.$$

■

Osservazione 5.3 *Se* $a < b < c$ *allora* $V(u,[a,c]) = V(u,[a,b]) + V(u,[b,c])$.

<u>**Dim**</u>. Date una partizione $a = t_1 < \cdots < t_p = b$ e una partizione $b = t_p < \cdots < t_{p+q} = c$, riunendole si ottiene una partizione di $[a,c]$, quindi

$$\sum_{j=1}^{p-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| + \sum_{j=p}^{p+q-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| = \sum_{j=1}^{p+q-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \leq V(u,[a,c]).$$

Quindi, valutando l'estremo superiore al variare delle partizioni di $[a,b]$ e di $[b,c]$, si ottiene:

$$V(u,[a,b]) + V(u,[b,c]) \leq V(u,[a,c]).$$

Viceversa sia $a = t_1 < \cdots < t_p = c$ una partizione di $[a,c]$. Se b non è un elemento della partizione lo possiamo aggiungere ottenendo una somma non inferiore. Quindi possiamo trovare $r \in \mathbb{N}$ tale che posto $t_r = b$ si suddivide la partizione in due partizioni di $[a,b]$ e di $[b,c]$. Quindi:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \leq &\sum_{j=1}^{r-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| + \sum_{j=r}^{p-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \leq \\ \leq &V(u,[a,b]) + V(u,[b,c]).\end{aligned}$$

Al variare di tutte le possibili suddivisioni di $[a,c]$ si ottiene allora

$$V(u,[a,c]) \leq V(u,[a,b]) + V(u,[b,c]).$$

■

Osservazione 5.4 *Sia* $J \subset \mathbb{R}$ *intervallo. Se* $V(u,J) < \infty$ *allora* u *si può scrivere come differenza di due funzioni monotone non decrescenti in* J *.*

<u>Dim</u>. Supponiamo inizialmente che J sia chiuso e limitato inferiormente, ad esempio $J = [a, b]$. Per ogni $t \in J$ poniamo $v(t) = V(u, [a, t])$. Poniamo inoltre

$$u_1(t) = \frac{v(t) + u(t)}{2}, \qquad u_2(t) = \frac{v(t) - u(t)}{2}.$$

Dati t' e t'' con $t' < t''$ risulta

$$|u(t') - u(t'')| \leq V(u, [t', t'']) = v(t'') - v(t')$$

quindi

$$u_1(t'') - u_1(t') = \frac{v(t'') - v(t') + u(t'') - u(t')}{2} \geq 0$$

$$u_2(t'') - u_2(t') = \frac{v(t'') - v(t') + u(t'') - u(t')}{2} \geq 0.$$

Poiché $u = u_1 - u_2$ la tesi è provata. Nel caso in cui J sia un intervallo generico, si sceglie un punto qualsiasi $t_0 \in J$ e si considera la funzione

$$v(t) = \begin{cases} V(u, [t_0, t]) & \text{se } t \geq t_0 \\ -V(u, [t, t_0]) & \text{se } t \leq t_0 \end{cases}$$

e si procede come nel caso precedente. ■

Corollario 5.5 *Se $V(u, J) < \infty$ allora in ogni punto di J esistono finiti i limiti destro e sinistro di u .*

<u>Dim</u>. Utilizzando le stesse notazioni dell'osservazione 5.4 , la u è limitata poiché $V(u, J) < \infty$ ma anche v è limitata dato che

$$|v(t)| \leq \sup \{|V(u, [t_0, t])| : t \in J\} = V(u, J).$$

Ne segue che u_1 e u_2 sono funzioni monotone e limitate, pertanto ammettono limite destro e sinistro finiti in ogni punto. Tale risultato vale quindi anche per $u = u_1 - u_2$. ■

Osservazione 5.6 *Data* $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiamo*

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to a^+} u(t) \doteq u_d(a) & \text{se } t = a \\ u(t) & \text{se } a < t < b \\ \lim\limits_{t\to b^-} u(t) \doteq u_s(b) & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Allora risulta $V(\tilde{u}, [a,b]) = V(u, (a,b))$.

Dim. Dalla definizione segue subito che $V(u,[a,b]) \leq V(\tilde{u},[a,b])$. Viceversa, dato $\varepsilon > 0$ posso trovare $\delta > 0$ tale che se $a < t < a+\delta$ risulti $|u(t) - \tilde{u}(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e se $b - \delta < t < b$ sia anche $|u(t) - \tilde{u}(b)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Sia ora $a = t_1 < \cdots < t_p = b$ una partizione di $[a,b]$. Aggiungiamo due elementi s_1, s_p in modo che sia

$$a < s_1 < \min\{t_2, a+\delta\}, \qquad \max\{b-\delta, t_{p-1}\} < s_p < b.$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{p} |\tilde{u}(t_{j+1}) - \tilde{u}(t_j)| \leq$$

$$\leq |\tilde{u}(a) - u(s_1)| + \left(|u(s_1) - u(t_2)| + \sum_{j=2}^{p-2} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| + |u(t_{p-1} - u(s_p)| \right) +$$

$$+ |u(s_p) - \tilde{u}(b)| \leq V(u,(a,b)) + \varepsilon$$

Quindi $V(\tilde{u},[a,b]) \leq V(u,(a,b)) + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Da cui la tesi. ■

Osservazione 5.7 *Con le stesse notazioni dell'osservazione 5.4 , risulta:*

$$V(u,J) = V(u_1,J) + V(u_2,J)$$

dove J *è un qualsiasi intervallo di* $\mathbb{R}$.

Dim. Scegliamo $t_0 \in J$ e definiamo $v(t)$ come nell'osservazione 5.4 . Sia $[a,b] \subset J$. Osserviamo che, essendo u_1, u_2 monotone non decrescenti risulta

$$V(u_1,[a,b]) = u_1(b) - u_1(a) = \frac{v(b) + u(b) - v(a) - u(a)}{2}$$

$$V(u_2,[a,b]) = u_2(b) - u_2(a) = \frac{v(b) - u(b) - v(a) + u(a)}{2}.$$

Quindi

$$V(u_1,[a,b]) + V(u_2,[a,b]) = \frac{2v(b) - 2v(a)}{2} = V(u,[a,b]).$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} V(u,J) &= \sup\{V(u,[a,b]) : [a,b] \subset J\} = \lim_{\substack{a\to\inf J \\ b\to\sup J}} V(u,[a,b]) = \\ &= \lim_{\substack{a\to\inf J \\ b\to\sup J}} (V(u_1,[a,b]) + V(u_2,[a,b])) = V(u_1,J) + V(u_2,J). \end{aligned}$$ ■

Osservazione 5.8 *Se u è lipschitziana su un intervallo limitato J allora $V(u,J) < \infty$.*

Dim. Sia $[a,b] \subset J$ e sia $a = t_1 < \cdots < t_p = b$ una partizione. Allora:

$$\sum_{j=1}^{p-1} |u(t_{j+1} - u(t_j)| \leq \sum_{j=1}^{p-1} L|t_{j+1} - t_j| \leq L(b-a) \leq L|J| < \infty.$$

■

Osservazione 5.9 *Se u è assolutamente continua su un intervallo limitato J allora $V(u,J) < \infty$.*

Dim. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\sum_{j=1}^{p} |u(b_j) - u(a_j)| < \varepsilon$ se $\sum_{j=1}^{p} |b_j - a_j| < \delta$. Supponiamo che J sia un intervallo chiuso $[a,b]$. Possiamo trovare un numero finito di punti $s_1, \ldots, s_m$ tali che sia $a = s_1 < \cdots < s_m = b$ e risulti $\max_j |s_{j+1} - s_j| < \delta$. Sfruttando l'additività della variazione totale, si ottiene che

$$V(u,J) = \sum_{j=1}^{m-1} V(u,[s_j,s_{j+1}]) \leq m\varepsilon < \infty.$$

Nel caso che J sia limitato ma non chiuso prolunghiamo u negli estremi di J come nell'osservazione 5.6 e osserviamo che se u è assolutamente continua su J allora $\tilde{u}$ lo è su $\overline{J}$. ■

Mostriamo ora con alcuni esempi come per le funzioni di una variabile la limitatezza e la continuità non siano sufficienti per avere variazione totale finita. La continuità ovviamente non è neanche condizione necessaria.

Esempio 5.10 Sia $u : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < t < \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

Dato che u è monotona e limitata risulta $V(u,(0,1)) < \infty$. Osserviamo che u non è continua.

Esempio 5.11 Sia $J = (0,1)$ e $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prendendo $t_j = \dfrac{1}{j}$ e $q_j \in \mathbb{R}$ tale che $\dfrac{1}{j+1} < q_j < \dfrac{1}{j}$ risulta

$$\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(q_j)| = n$$

quindi $V(u,J) = \infty$. In questo caso u non è continua in J ma è limitata.

Esempio 5.12 Sia $J = (0,1)$ e sia $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = \sin \dfrac{1}{t}$. Scegliendo $t_j = \dfrac{2}{(2j+1)\pi}$, $j \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{j=1}^{p} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| = 2p$$

quindi $V(u,J)=\infty$. Lo stesso risultato si poteva dedurre dal fatto che non esiste il limite $\lim_{t\to 0^+} \sin\frac{1}{t}$ mentre se fosse stato $V(u,J)<\infty$ tale limite avrebbe dovuto esistere in quanto u sarebbe stata differenza di funzioni monotone. In questo caso u è continua e limitata in J .

Esempio 5.13 Sia $J=[0,1]$ e sia $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = \begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Scegliendo $t_j = \dfrac{2}{(2j+1)\pi}$ si ottiene

$$\sum_j |u(t_{j+1}) - u(t_j)| = \sum_j \left| \frac{2}{(2j+3)\pi} + \frac{2}{(2j+1)\pi} \right| = \frac{2}{\pi}\sum_j \frac{2j+1+2j+3}{(2j+3)(2j+1)} =$$
$$\frac{2}{\pi}\sum_j \frac{4j+4}{(2j+3)(2j+1)} \sim \sum_j \frac{1}{j}$$

Dato che l'ultima serie diverge, otteniamo che $V(u,J)=\infty$. Osserviamo che u è continua in J quindi per il teorema di Heine–Cantor è anche uniformemente continua.

6. Funzioni BV in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 6.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Definiamo*

$$|Du|(\Omega) = \sup\left\{ \int_\Omega u \mathrm{div}\varphi \, dx : \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n), \ |\varphi| \le 1 \right\}.$$

Se $u \in L^1(\Omega)$ *e* $|Du|(\Omega) < \infty$ *diciamo che* $u \in BV(\Omega)$.

Teorema 6.2 *Il funzionale* $\Phi(u) = |Du|(\Omega)$ *è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dim. Consideriamo i funzionali lineari $\Phi_\varphi(u) = \int_\Omega u \mathrm{div}\varphi \, dx$. Tali funzionali sono continui per la topologia $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ quindi, essendo $\Phi(u) = \sup_\varphi \Phi_\varphi(\Omega)$ si ha la tesi. Ne segue che se $(u_h) \subset BV(\Omega)$ e $u_h \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ allora $u \in BV(\Omega)$ e $|Du|(\Omega) \leq \liminf_{h\to\infty} |Du_h|(\Omega)$. ■

Teorema 6.3 *Sia* $u \in L^1(\Omega)$. *Allora* $u \in BV(\Omega)$ *se e solo se esiste una misura vettoriale* Du *di componenti* $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ *definita sui boreliani di* Ω *con variazione totale finita in* Ω *tale che:*

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega u \mathrm{div}\varphi \, dx : |\varphi| \leq 1, \ \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}$$

e che

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = -\int_\Omega \varphi \, dD_j u, \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega), \ j = 1, \ldots, n.$$

La misura Du *è la derivata distribuzionale di* u .

Dim. Supponiamo che u abbia derivata nel senso delle distribuzioni, quindi che esista la misura vettoriale Du . Allora, per il teorema 3.5 esiste una funzione $\nu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che sia $|Du|-$ misurabile con $|\nu| = 1$ $|Du|-$ q.o. in Ω e tale che $Du = \nu|Du|$. Sia quindi $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \leq 1$. Allora

$$\int_\Omega u \mathrm{div}\varphi \, dx = \sum_j \int_\Omega u \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \, dx = -\sum_j \int_\Omega \varphi_j \, dD_j u = -\sum_j \int_\Omega \varphi_j \nu_j \, d|Du| =$$

$$= -\int_\Omega \varphi \cdot \nu \, d|Du| \leq \int_\Omega \, d|Du| = |Du|(\Omega).$$

Quindi $u \in BV(\Omega)$. Viceversa, supponiamo che $u \in BV(\Omega)$ e fissiamo j con $1 \le j \le n$. Data $g \in C^1_c(\Omega)$ poniamo $L_j(g) = \int\limits_\Omega u \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx$. Definiamo ora la funzione $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \dfrac{g}{\max\limits_\Omega |g|} & \text{se } i = j \end{cases}$$

(nel caso in cui sia $g \equiv 0$ poniamo $\varphi \equiv 0$). Risulta ovviamente $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \le 1$ e ne segue che

$$|L_j(g)| = \left| \int\limits_\Omega u \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx \right| = \left| \int\limits_\Omega u \mathrm{div}\varphi\, dx \right| \max_\Omega |g| \le |Du|(\Omega) \max_\Omega |g|.$$

Allora $L_j : C^1_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continuo, può quindi essere prolungato per densità a tutto $C_0(\Omega)$ mantenendo la stessa norma, cioè $|L_j(g)| \le |Du|(\Omega)\|g\|_\infty$. Per il teorema 3.6 esiste allora una misura con segno μ_j, definita sui boreliani di Ω tale che $|\mu_j|(\Omega) \le \infty$ e

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx = L_j(g) = \int\limits_\Omega g\, d\mu_j \qquad \forall\, g \in C^1_c(\Omega).$$

Ponendo $D_j u = -\mu_j$ otteniamo la derivata distribuzionale di u. Possiamo quindi costruire la misura vettoriale $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ e trovare una funzione ν $|Du|-$ sommabile tale che $|\nu(x)| = 1$ per $|Du|-$ q.o. $x \in \Omega$ e $Du = \nu |Du|$. Quindi:

$$\int\limits_\Omega g\, dD_j u = \int\limits_\Omega g \nu_j\, d|Du| \quad \forall\, g \text{ boreliana limitata.}$$

Ricordiamo ora che per il teorema di Lusin, dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, possiamo trovare una funzione $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua tale che $|Du|\left(\{x \in \Omega : \nu(x) \neq g(x)\}\right) \le \varepsilon$. Quindi

$$|Du|(\Omega) = \int\limits_\Omega \nu \cdot \nu\, d|Du| = \sup\left\{ \int\limits_\Omega g \cdot \nu\, d|Du| : |g| \le 1,\ g \text{ continua} \right\}.$$

Osserviamo ora che per densità l'estremo superiore può essere valutato sulle $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $|g| \leq 1$ e che

$$\int\limits_\Omega g \cdot \nu \; d|Du| = \int\limits_\Omega \sum_j g_j \nu_j \; d|Du| = \int\limits_\Omega \sum_j g_j \; dD_j u = -\int\limits_\Omega \sum_j u \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \; dx =$$
$$= \int\limits_\Omega u \mathrm{div}(-g) \; dx.$$

Quindi

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int\limits_\Omega u \; \mathrm{div} g \; dx : g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \; |g| \leq 1 \right\}.$$

■

Corollario 6.4 *Se $u \in W^{1,1}(\Omega)$ allora $u \in BV(\Omega)$ e $Du = \nabla u \mathcal{L}^n$ (dove $\mathcal{L}^n$ è la misura di Lebesgue n – dimensionale).*

Dim. $u \in W^{1,1}(\Omega)$ quindi esiste la derivata distribuzionale di u cioè

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial g}{\partial x_j} \; dx = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} g \; dx \qquad \forall \, g \in C_c^1(\Omega).$$

Quindi $D_j u = \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \mathcal{L}^n$, $|Du|(\Omega) = |\nabla u| \mathcal{L}^n(\Omega) = \int\limits_\Omega |\nabla u| \; dx < \infty$ e $u \in BV(\Omega)$.

■

Teorema 6.5 *Data $u \in BV(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $(u_h) \subset BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ e $|Du_h|(\Omega) \longrightarrow |Du|(\Omega)$. Viceversa, se $u \in L^1(\Omega)$ ed esiste una successione $(u_h) \subset BV(\Omega)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ e $\limsup\limits_{h \to \infty} |Du_h|(\Omega) < \infty$ allora $u \in BV(\Omega)$ e $Du_h \rightharpoonup Du$ nel senso della convergenza debole di misure.*

Dim. Dato $\varepsilon > 0$ fissiamo $k \in \mathbb{N}$ e poniamo

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Essendo $|Du|$ una misura di Radon, visto che gli Ω_k sono aperti (quindi $|Du|$– misurabili) con $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ e $\bigcup\limits_k \Omega_k = \Omega$, possiamo trovare un intero $m > 0$ tale che $|Du|(\Omega\smallsetminus\Omega_m) < \varepsilon$. Poniamo allora $A_1 = \Omega_{m+2}$, $A_k = \Omega_{m+k+1}\smallsetminus\overline{\Omega}_{m+k-1}$ se $k \geq 2$. Per ogni k posso trovare una funzione $\varphi_k \in C_0^\infty(A_k)$ tale che $0 \leq \varphi_k \leq 1$ e $\sum\limits_k \varphi_k(x) = 1$ per ogni $x \in \Omega$. Sia ρ un nucleo di convoluzione. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ posso trovare $\varepsilon_k > 0$ tale che

$$\mathrm{supp}((u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k}) \subset \Omega_{m+k+2}\smallsetminus\overline{\Omega}_{m+k-2} \quad (\text{ponendo } \Omega_{-1} = \emptyset)$$

$$\int\limits_\Omega |(u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k} - u\varphi_k| \; dx < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\int\limits_\Omega |(u\nabla\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k} - u\nabla\varphi_k| \; dx < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Poniamo $u_\varepsilon = \sum\limits_k (u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k}$ e osserviamo che ogni $x \in \Omega$ appartiene a $\Omega_{m+k+2}\smallsetminus\overline{\Omega}_{m+k-2}$ solo per un numero finito di k, quindi $x \in \mathrm{supp}((u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k})$ solo per un numero finito di indici nella somma; ne segue che $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Ma $u = \sum\limits_k u\varphi_k$ quindi

$$\|u_\varepsilon - u\|_1 = \int\limits_\Omega |u_\varepsilon - u| \; dx \leq \sum_{k=1}^\infty \int\limits_\Omega |(u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k} - u\varphi_k| \; dx \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Dato che $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$, per semicontinuità inferiore si ha che

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} |Du_\varepsilon|(\Omega).$$

Sia ora $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ fissata con $|g| \leq 1$. Allora

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon \mathrm{div} g \; dx = \sum_k \int\limits_\Omega ((u\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k}) \, \mathrm{div} g \; dx = \sum_k \int\limits_\Omega u\varphi_k (\mathrm{div} g * \rho_{\varepsilon_k}) \; dx =$$

$$= \sum_k \int\limits_\Omega u\varphi_k \mathrm{div}(g * \rho_{\varepsilon_k}) \; dx = \sum_k \int\limits_\Omega u \left(\mathrm{div}\left(\varphi_k (g * \rho_{\varepsilon_k})\right) - \nabla\varphi_k \cdot (g * \rho_{\varepsilon_k})\right) \; dx =$$

$$= \sum_k \int\limits_\Omega u\mathrm{div}\left(\varphi_k (g * \rho_{\varepsilon_k})\right) \; dx - \sum_k \int\limits_\Omega g \cdot ((u\nabla\varphi_k) * \rho_{\varepsilon_k}) \; dx + \sum_k \int\limits_\Omega g \cdot u\nabla\varphi_k \, dx$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto un termine nullo, infatti:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega} g\cdot u\nabla\varphi_k\ dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathrm{supp}(g)} g\cdot u\nabla\varphi_k\ dx = \sum_{k=1}^{p}\int_{\mathrm{supp}(g)} g\cdot u\nabla\varphi_k\ dx =$$
$$= \int_{\mathrm{supp}(g)} g\cdot u\nabla\sum_{k=1}^{p}\varphi_k\ dx = 0$$

dove $p \in \mathbb{N}$ è tale che $\mathrm{supp}(\varphi_n)\cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$ per ogni $n \geq p$. Valutiamo ora il seguente integrale:

$$I_1^{\varepsilon} \doteq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega} u\mathrm{div}\left(\varphi_k(g*\rho_{\varepsilon_k})\right)\ dx = \int_{\Omega} u\mathrm{div}\left(\varphi_1(g*\rho_{\varepsilon_1})\right)\ dx +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\Omega} u\mathrm{div}\left(\varphi_k(g*\rho_{\varepsilon_k})\right)\ dx \leq |Du|(\Omega) + \sum_{k=2}^{\infty}|Du|(A_k) \leq$$
$$\leq |Du|(\Omega) + 2|Du|(\Omega\setminus\Omega_m) \leq |Du|(\Omega) + 2\varepsilon$$

poiché $\bigcup\limits_{k \text{ dispari}} A_k \subset \Omega\setminus\Omega_m$, $\bigcup\limits_{k \text{ pari}} A_k \subset \Omega\setminus\Omega_m$ e le due unioni sono disgiunte. Per quanto riguarda l'altro integrale abbiamo:

$$|I_2^{\varepsilon}| \doteq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega} g\cdot(u\nabla\varphi_k - (u\nabla\varphi_k)*\rho_{\varepsilon_k})\,dx\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}|g||\nabla\varphi_k - (u\nabla\varphi_k)*\rho_{\varepsilon_k}|\,dx \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}|u\nabla\varphi_k - (u\nabla\varphi_k)*\rho_{\varepsilon_k}|\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Quindi

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon}\mathrm{div} g\ dx \leq |Du|(\Omega) + 3\varepsilon.$$

Ne segue che $|Du_{\varepsilon}|(\Omega) \leq |Du|(\Omega) + 3\varepsilon$ e di conseguenza $|Du_{\varepsilon}|(\Omega) \leq |Du|(\Omega)$. Quindi $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|Du_{\varepsilon}|(\Omega) = |Du|(\Omega)$.

Viceversa, se $(u_h) \subset BV(\Omega)$ è una successione convergente a u nella topologia

$L^1(\Omega)$, allora per semicontinuità inferiore $|Du|(\Omega) \leq \liminf_{h\to\infty} |Du_h|(\Omega) < \infty$ quindi $u \in BV(\Omega)$. Inoltre, data $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ si ha che

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \; dD_j u_h = \lim_{h\to\infty} \left(-\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u_h \; dx \right) = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u \; dx = \int_\Omega \varphi \; dD_j u.$$

Possiamo estendere per densità questa uguaglianza a tutte le $\varphi \in C_0(\Omega)$, quindi $D_j u_h \rightharpoonup D_j u$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ e questo significa che le misure vettoriali Du_h convergono debolmente a Du . ∎

Vediamo ora con il seguente teorema quale legame esiste fra la definizione distribuzionale di funzione BV e quella classica di funzione a variazione limitata nel caso di una sola variabile.

Teorema 6.6 *Sia $J = (a, b)$. Data $u \in BV(J)$ si ha che*

$$|Du|(J) = \min\{V(v, J) : v = u \text{ q.o. in } J\} \tag{6.2}$$

inoltre per ogni $t \in J$ esistono finiti i seguenti limiti

$$u^+(t) \doteq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau) \; d\tau, \qquad u^-(t) \doteq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} u(\tau) \; d\tau.$$

Le funzioni u^+ e u^- sono continue rispettivamente a destra e a sinistra ed esiste un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$u^+(t) = c + Du((a, t]), \qquad u^-(t) = c + Du((a, t)) \qquad \forall\, t \in J.$$

Infine u^+ e u^- sono funzioni minimizzanti nella (6.2) e data una qualsiasi v minimizzante nella (6.2) , $v(t)$ è compreso fra $u^+(t)$ e $u^-(t)$, per ogni $t \in J$. In particolare se $|Du|(\{t\}) = 0$ allora $v(t) = u^+(t) = u^-(t)$.

Dim. Vediamo dapprima che $|Du|(J) \leq \inf\{V(v, J) : v = u \text{ q.o. in } J\}$. Possiamo supporre che esista una $v = u$ quasi ovunque in J tale che $V(v, J) < \infty$

(altrimenti la tesi è banale). Per l'osservazione 5.4 possiamo trovare due funzioni v_1 e v_2 non decrescenti e limitate tali che

$$v = v_1 - v_2, \qquad V(v, J) = V(v_1, J) + V(v_2, J).$$

Poniamo $h_j = v_j - \inf v_j$, $V_j = V(v_j, J)$, $j = 1, 2$. Dimostriamo ora l'identità:

$$h_j(t) = \int_0^{V_j} \chi_{\{h_j > s\}}(t)\ ds.$$

Infatti: $\chi_{\{h_j>s\}}(t) = 1$ se e solo se $t \in \{h_j > s\}$ se e solo se $h_j(t) > s$ quindi:

$$\int_0^{V_j} \chi_{\{h_j > s\}}(t)\ ds = \int_0^{h_j(t)} 1\ ds = h_j(t).$$

Valutiamo ora $|Dv_j|(J)$. Sia $g \in C_c^1(J)$ con $|g| \leq 1$; allora:

$$\int_J v_j g'\ dt = \int_J (h_j + \inf v_j) g'\ dt = \int_J h_j g'\ dt + \inf v_j\ (g(b) - g(a)) =$$

$$= \int_J \left(\int_0^{V_j} \chi_{\{h_j > s\}}(t)\ ds \right) g'(t)\ dt = \int_0^{V_j} \left(\int_a^b \chi_{\{h_j > s\}}(t) g'(t)\ dt \right)\ ds.$$

Osserviamo che h_j è non decrescente, quindi:

$$\chi_{\{h_j>s\}} = 1 \Longleftrightarrow t \in \{h_j > s\} \Longleftrightarrow h_j(t) > s \Longleftrightarrow t > \sup\{\tau : h_j(\tau) = s\}.$$

Quindi, sostituendo nell'ultimo integrale si ottiene:

$$\int_J v_j g'\ dt = \int_0^{V_j} \left(\int_{\sup\{\tau : h_j(\tau) = s\}}^{b} g'(t)\ dt \right)\ ds =$$

$$= \int_0^{V_j} g(b) - g\left(\sup\{\tau : h_j(\tau) = s\}\right)\ ds = -\int_0^{V_j} g\left(\sup\{\tau : h_j(\tau) = s\}\right)\ ds \leq V_j$$

poiché $|g| \leq 1$. Quindi $|Dv_j|(J) \leq V_j = V(v_j, J)$ e di conseguenza:

$$|Du|(J) = |Dv|(J) = \leq |Dv_1|(J) + |Dv_2|(J) \leq V(v_1, J) + V(v_2, J) = V(v, J).$$

Ne segue che

$$|Du|(J) \leq \inf \{V(v, J) : v = u \text{ q.o. in } J\} . \tag{6.3}$$

Troviamo ora una funzione che realizzi il minimo. Poniamo, per ogni $t \in J$: $w(t) = Du((a, t))$. Osserviamo che data una partizione

$$a < c = t_1 < \cdots < t_p = d < b$$

sarà:

$$|w(t_{j+1}) - w(t_j)| = |Du([t_j, t_{j+1}))|.$$

Poiché $\bigcup_{j=1}^{p-1} [t_j, t_{j+1}) \subset J$, risulta:

$$|Du|(J) \geq \sum_{j=1}^{p-1} |Du\left([t_j, t_{j+1})\right)| = \sum_{j=1}^{p-1} |w(t_{j+1}) - w(t_j)| \, .$$

Valutando l'estremo superiore su tutte le suddivisioni di $[c, d]$ si ottiene che $V(w, [c, d]) \leq |Du|(J)$, quindi $V(w, J) \leq |Du|(J)$. Dimostriamo ora che $w - u$ è costante quasi ovunque in J . Data $g \in C^1_c(J)$, utilizzando il teorema di Fubini–Tonelli, si ha:

$$\int_a^b wg' \; dt = \int_a^b \left(\int_a^t \; dDu(s) \right) g'(t) \; dt = \int_a^b \left(\int_s^b g'(t) \; dt \right) \; dDu(s) =$$
$$= \int_a^b g(b) - g(s) \; dDu(s) = \int_a^b ug'(s) \; ds$$

quindi $\int\limits_a^b (w-u)g'\ dt = 0$ per ogni $g \in C^1_c(J)$. Sia ora $\varepsilon > 0$. Definiamo $J_\varepsilon = (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ e poniamo $h_\varepsilon = (w-u) * \rho_\varepsilon$ con ρ nucleo di convoluzione. Data $g \in C^1_c(J_\varepsilon)$ risulta

$$\int\limits_J h'_\varepsilon g\ dt = -\int\limits_J g' h_\varepsilon\ dt = -\int\limits_J g'\left((w-u)*\rho_\varepsilon\right)\ dt = -\int\limits_J (w-u)(g' * \rho_\varepsilon)\ dt =$$

$$= -\int\limits_J (w-u)(g*\rho_\varepsilon)'\ dt = 0$$

poiché $g*\rho_\varepsilon \in C^1_c(J)$. Dato che $C^1_c(J_\varepsilon)$ è denso in $L^1(J_\varepsilon)$ risulta che $h'_\varepsilon = 0$ in J_ε, quindi h_ε è costante in J_ε. Ma le h_ε convergono il $L^1(J)$ a $w-u$, quindi $w-u$ è costante quasi ovunque in J. Possiamo allora trovare $c \in \mathbb{R}$ tale che $u = w+c$ quasi ovunque in J. Vediamo che il minimo nella (6.2) è realizzato in $w+c$. Infatti:

$$V(w+c, J) = V(w, J) \leq |Du|(J)$$

che insieme alla (6.3) prova la tesi.

Vediamo ora l'esistenza di u^+ e di u^-. Ricordiamo che se f è una qualsiasi funzione monotona limitata, esistono finiti i limiti destro e sinistro di f che indichiamo con $f_s(t) \doteq \lim\limits_{h\to 0^+} f(t-h)$ e $f_d(t) = \lim\limits_{h\to 0^+} f(t+h)$. Allora avremo:

$$f_d(t) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(\tau)\ d\tau \leq \lim_{h\to 0^+} f(t+h) = f_d(t)$$

quindi anche il primo limite è uguale a $f_d(t)$. Nel nostro caso $u = w+c$ quasi ovunque e

$$u^+(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} u(\tau)\ d\tau = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} c + w(\tau)\ d\tau =$$

$$= c + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} w(\tau)\ d\tau = c + w_d(t)$$

dove l'ultimo limite esiste poichè $V(w,J)<\infty$ quindi w è differenza di funzioni monotone. Analogamente esiste il limite che definisce $u^-(t)$ e risulta $u^-(t) = = c + w_s(t)$. Osserviamo ora che $\bigcap\limits_{h>0}(a,t+h) = (a,t]$, quindi

$$w_d(t) = \lim_{h\to 0^+} w(t+h) = \lim_{h\to 0^+} Du\left((a,t+h)\right) = Du\left(\bigcap_{h>0}(a,t+h)\right) = Du\left((a,t]\right).$$

Analogo risultato per $w_s(t)$. Quindi

$$u^+(t) = c + Du\left((a,t]\right), \qquad u^-(t) = c + Du\left((a,t)\right).$$

Da queste formule segue subito la continuità a destra di u^+, infatti:

$$\lim_{h\to 0^+} u^+(t+h) = c + \lim_{h\to 0^+} Du\left((a,t+h]\right) = c + Du\left(\bigcap_{h>0}(a,t+h]\right) =$$
$$= c + Du\left((a,t]\right) = u^+(t).$$

In modo analogo si prova la continuità a sinistra di u^-. Vediamo ora che u^+ è minimizzante. Scegliendo una partizione di $[c,d]\subset J$ $c = t_1 < \cdots < t_p = d$ risulta:

$$\sum_j \left|u^+(t_{j+1}) - u^+(t_j)\right| = \sum_j \left|c + Du\left((a,t_{j+1}]\right) - c - Du\left((a,t_j]\right)\right| =$$
$$= \sum_j \left|Du\left((t_j,t_{j+1}]\right)\right| \le |Du|(J)$$

quindi $V(u^+,[c,d]) \le |Du|(J)$ e di conseguenza $V(u^+,J)\le |Du|(J)$, quindi u^+ è punto di minimo. Analogo risultato per u^-.

Sia ora v minimizzante. Poichè $V(v,J)<\infty$, v è differenza di funzioni monotone limitate quindi esistono finiti i limiti $v_d(t)$ e $v_s(t)$ per ogni $t\in J$. Inoltre dal fatto che $u=v$ quasi ovunque in J si ha che:

$$v_d(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(s)\ ds = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\ ds = u^+(t)$$

e allo stesso modo $v_s(t) = u^-(t)$. Proviamo ora che v minimizza anche su ogni sottointervallo $(c,d) \subset J$. Supponiamo che esista un intervallo dove v non minimizza, quindi esiste una funzione $z:(c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $z = u$ quasi ovunque tale che $V(z,(c,d)) < V(v,(c,d))$. Poniamo allora

$$\psi(t) = \begin{cases} z(t) & \text{se } t \in (c,d) \\ v(t) & \text{se } t \in J \setminus (c,d). \end{cases}$$

Usando le stesse notazioni dell'osservazione 5.6 si ha allora:

$$V(\psi,J) = V(\tilde{\psi},\bar{J}) = V(\tilde{\psi},[a,c]) + V(\tilde{\psi},[c,d]) + V(\tilde{\psi},[d,b]) = V(\tilde{v},[a,c]) +$$

$$+V(\psi,(c,d)) + V(\tilde{v},[d,b]) < V(\tilde{v},[a,c]) + V(v,(c,d)) + V(\tilde{v},[d,b]) = V(v,J)$$

e questo è assurdo perché v minimizza in J. Dal fatto che v minimizza in qualsiasi intervallo $J' \subset J$ segue che $V(v,J') = |Du|(J')$. Sia ora $t \in J$ fissato. Risulta:

$$\lim_{\rho \to 0^+} V(v,(t-\rho,t+\rho)) = \lim_{\rho \to 0^+} |Du|((t-\rho,t+\rho)) =$$

$$= |Du| \left(\bigcap_{\rho > 0} (t-\rho,t+\rho) \right) = |Du|\left(\{t\}\right) = \left|u^+(t) - u^-(t)\right|.$$

Dal fatto che

$$|v(t) - v(t+\rho)| \le V(v,(t-\rho,t+\rho)) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \to 0^+} |v(t) - v(t+\rho)| = |v(t) - v_d(t)|$$

segue che

$$|v(t) - v_d(t)| \le \left|u^+(t) - u^-(t)\right|$$

e analogamente

$$|v(t) - v_s(t)| \le \left|u^+(t) - u^-(t)\right|.$$

Ricordando che $v_d = u^+$, $v_s = u^-$, si ottiene

$$\begin{cases} u^+ - |u^+ - u^-| \le v \le u^+ + |u^+ - u^-| \\ u^- - |u^+ - u^-| \le v \le u^- + |u^+ - u^-| \end{cases}$$

segue la tesi. Ovviamente se $|Du|(\{t\}) = 0$ allora $v(t) = u^+(t) = u^-(t)$. ■

Corollario 6.7 *Se $u \in BV(J)$ allora l'insieme dei punti $t \in J$ tali che $u^+(t) \neq u^-(t)$ è al più numerabile.*

__Dim.__ Sia $S = \{t \in J : u^+(t) \neq u^-(t)\}$. Osserviamo che per il teorema 6.6 per ogni $t \in J$ risulta $Du(\{t\}) = Du((a,t]) - Du((a,t)) = u^+(t) - u^-(t)$ quindi $|Du|(\{t\}) = |u^+(t) - u^-(t)|$. Poniamo $A_0 = \{t \in S : |u^+(t) - u^-(t)| > 1\}$ e dato $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ $A_n = \left\{t \in S : \frac{1}{n+1} < \left|u^+(t) - u^-(t)\right| \leq \frac{1}{n}\right\}$. Allora risulta $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Se esistesse $\bar{n} \in n$ tale che $A_{\bar{n}}$ è infinito allora sarebbe (supponendo $\bar{n} \geq 1$)

$$\infty = \sum_{t \in A_{\bar{n}}} \frac{1}{\bar{n}+1} \leq \sum_{t \in A_{\bar{n}}} \left|u^+(t) - u^-(t)\right| \leq \sum_{t \in S} |Du|(\{t\}) \leq |Du|(J) < \infty$$

e questo è assurdo (lo stesso sarebbe se fosse A_0 infinito). Ne segue che ogni A_n è finito e quindi S è al più numerabile. ■

Definizione 6.8 *Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ boreliano e $t \in [0,1]$, poniamo*

$$\Omega_t = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B(x,\rho))}{\mathcal{L}^n(B(x,\rho))} = t\right\}.$$

Se $x \in \Omega_t$ diciamo che Ω ha densità t in x.

Definizione 6.9 *Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana e sia $x \in \Omega$. Poniamo*

$$u_+(x) = \inf\left\{t \in [-\infty, +\infty] : u^{-1}((t,+\infty)) \text{ ha densità } 0 \text{ in } x\right\}$$

$$u_-(x) = \sup\left\{t \in [-\infty, +\infty] : u^{-1}((t,+\infty)) \text{ ha densità } 1 \text{ in } x\right\}.$$

Se $u_+(x) = u_-(x)$ *diciamo che* u *è continua in senso approssimato in* x *e indichiamo il valore comune di* u_+ *e* u_- *con* $\tilde{u}(x)$ *. Scriviamo anche*

$$\tilde{u}(x) = \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y).$$

Indichiamo infine con S_u *l'insieme dei punti dove* $u_+(x) \neq u_-(x)$ *che chiameremo insieme di salto per* u *.*

Definizione 6.10 *Data* $u \in BV(\Omega)$ *indichiamo con* $D^a u$ *la parte assolutamente continua di* Du *rispetto alla misura di Lebesgue* $\mathcal{L}^n$ *e con* D^s *la sua parte singolare. Suddividiamo ulteriormente* $D^s u$ *definendo:*

$$Ju = D^s u \lfloor Su, \qquad Cu = D^s u \lfloor (\Omega \setminus S_u).$$

Chiamiamo rispettivamente Ju *e* Cu *parte di salto e parte cantoriana di* Du *.*

Osservazione 6.11 *Se* u *è continua in* x_0 *allora* u *è anche continua in senso approssimato in* x_0 *e* $\tilde{u}(x_0) = u(x_0)$ *.*

Dim. Sia $t \in [-\infty, \infty]$ tale che $u^{-1}((t, \infty))$ ha densità 0 in x_0. Se fosse $t < u(x_0)$ allora potrei trovare $\varepsilon > 0$ tale che $t < u(x_0) - \varepsilon$. Per la continuità esiste $r > 0$ tale che se $|x - x_0| < r$ allora $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ quindi $B(x_0, r) \subset u^{-1}((t, \infty))$ e di conseguenza $u^{-1}((t, \infty))$ avrebbe densità 1 in x_0. Quindi $u(x_0) \leq t$ e $u(x_0) \leq u_+(x_0)$. Se fosse $u(x_0) < u_+(x_0)$ potrei trovare $\varepsilon > 0$ tale che $u(x_0) + \varepsilon < u_+(x_0)$. Scegliendo $t = u(x_0) + \varepsilon$ la continuità mi garantisce l'esistenza di $r > 0$ tale che se $|x - x_0| < r$ allora $u(x) < u(x_0) + \varepsilon = t$ quindi $u^{-1}((t, \infty)) \cap B(x_0, r) = \emptyset$ e $u^{-1}((t, \infty))$ ha densità 0 in x_0; questo è assurdo perché vorrebbe dire che $t < u_+(x_0)$. ∎

Osservazione 6.12 *Sia* $u \in BV((a,b))$. *Con le stesse notazioni del teorema 6.6 e della definizione 6.9 risulta:*

$$u_+(t) = \max\left\{u^+(t), u^-(t)\right\}, \qquad u_-(t) = \min\left\{u^+(t), u^-(t)\right\}.$$

<u>Dim</u>. Fissiamo $t \in (a,b)$ e supponiamo per semplicità che sia $u^+(t) \geq u^-(t)$. Poniamo $w(t) = Du\,((a,t))$. Allora, per il teorema 6.6 esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $u = w + c$ quasi ovunque in (a,b) . Definiamo ora $v(t) = w(t) + c$. Essendo $v = u$ quasi ovunque è facile verificare che $v^+ = u^+$, $v_+ = u_+$, $v^- = u^-$, $v_- = u_-$. Ricordiamo che dalla dimostrazione del teorema 6.6 la w è differenza di funzioni monotone limitate, quindi anche la v lo è, pertanto esistono finiti il limite destro e sinistro di v in ogni punto di (a,b) . Anche in questo caso è facile verificare che $v_d = v^+$ e $v_s = v^-$. Se ora fissiamo $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che se $t < \tau < t + \delta$ allora $|v(\tau) - v_d(t)| < \varepsilon$, in particolare $v(\tau) > v_d(t) - \varepsilon$. Ne segue che $(t, t+\rho) \subset \{y : v(y) > v_d(t) - \varepsilon\}$ per ogni ρ con $0 < \rho < \delta$; quindi l'insieme $\{y : v(y) > v_d(t) - \varepsilon\}$ ha densità non inferiore a $\frac{1}{2}$ nel punto t e di conseguenza $v_+(t) > v_d(t) - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Risulta allora $v_+(t) \geq v_d(t) = v^+(t)$. Per provare la disuguaglianza opposta fissiamo nuovamente $\varepsilon > 0$. Possiamo trovare allora due numeri $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ tali che se $t < \tau < t+\delta_1$ allora $v(\tau) < v_d(t)+\varepsilon$ e se $t-\delta_2 < \tau < t$ allora $v(\tau) < v_s(t)+\varepsilon$. Ponendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e tenendo conto del fatto che abbiamo supposto $v_s \leq v_d$, otteniamo che se $\tau \in (t-\delta, t+\delta)$ allora $v(\tau) < v_d(t)+\varepsilon$ quindi $\{\tau : v(\tau) > v_d(t) + \varepsilon\} \cap (t-\delta, t+\delta) = \emptyset$ e di conseguenza $\{\tau : v(\tau) > v_d(t) + \varepsilon\}$ ha densità 0 in t . Ne segue che $v_+(t) \leq v_d(t) + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ cioè $v_+(t) \leq v_d(t) = v^+(t)$. Dal fatto che $u^+ = v^+$, $u_+ = v_+$ segue la tesi. Lo stesso risultato si ottiene per u_- . ■

Richiamiamo ora la definizione di misura di Hausdorff:

Definizione 6.13 *Dato $B \subset \mathbb{R}^n$, $k, \delta \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $\delta > 0$ poniamo:*

$$\mathcal{H}^k_\delta(B) = \omega_k \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(B_j)}{2} \right)^k : \operatorname{diam}(B_j) < \delta, \ B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right\}$$

dove $\omega_k = \dfrac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1+\frac{k}{2})}$ *e* $\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty e^{-s} s^{t-1} \, ds$ *. Poniamo inoltre*

$$\mathcal{H}^k(B) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^k_\delta(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^k_\delta(B).$$

$\mathcal{H}^k$ *si dice misura di Hausdorff* k *– dimensionale.*

Raccogliamo nel seguente teorema le principali proprietà delle misure di Hausdorff:

Teorema 6.14

1) $\mathcal{H}^k$ *è una misura di Borel–regolare.*
2) *Se* $k > n$ *allora* $\mathcal{H}^k(B) = 0$ *per ogni* $B \subset \mathbb{R}^n$.
3) $\mathcal{H}^0(B) = \#(B)$ *(cardinalità di* B *)*
4) *Sia* $k > k' \geq 0$. *Se* $\mathcal{H}^k(B) > 0$ *allora* $\mathcal{H}^{k'}(B) = \infty$ *; se* $\mathcal{H}^{k'}(B) < \infty$ *allora* $\mathcal{H}^k(B) = 0$
5) *Se* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *è lipschitziana con costante di Lipschitz* M *allora* $\mathcal{H}^k(f(B)) \leq M^k \mathcal{H}^k(B)$
6) *Se* $B \subset \mathbb{R}^n$ *allora* $\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n_\delta(B) = \mathcal{L}^n(B)$ *per ogni* $\delta > 0$.

Mostriamo ora con un esempio che il risultato del corollario 6.7 sul numero di discontinuità di una funzione BV non si estende al caso di più variabili. Avremo bisogno della seguente:

Osservazione 6.15 *Se E è un insieme con frontiera di classe C^1 a tratti e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega) < \infty$ allora $\chi_E \in BV(\Omega)$.*

Dim. Sia ν la normale esterna a ∂E. Data $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ con $|\varphi| \leq 1$, per il teorema della divergenza, si ha:

$$\int_\Omega \chi_E \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{E\cap\Omega} \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{\partial(E\cap\Omega)} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega) < \infty.$$

■

Esempio 6.16 Sia $\Omega = (0,1)^n$ con $n \geq 2$ e (q_j) una numerazione di $\Omega \cap \mathbb{Q}^n$. Costruiamo un insieme che sia unione di sfere di raggi opportuni $\rho_j = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j+1}{n}}$ e definiamo $A_h = \bigcup_{j=1}^{h} B(q_j, \rho_j) \cap \Omega$. Osserviamo che A_h è aperto e ∂A_h è di classe C^∞ a tratti. Ponendo $u_h = \chi_{A_h}$ si ha che $u_h \in BV(\Omega)$ e

$$|Du_h|(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{h} |D\chi_{B(q_j,\rho_j)}|(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{h} c_{n-1}\rho_j^{n-1}$$

dove $c_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1))$. Poniamo quindi $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(q_j, \rho_j) \cap \Omega$ e $u = \chi_A$. Risulta $\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_1 = 0$ quindi per semicontinuità

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_h |Du_h|(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_{n-1}\rho_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(j+1)\frac{n-1}{n}} < \infty.$$

Ne segue che $u \in BV(\Omega)$. Ma A è denso in Ω allora

$$\mathcal{L}^n(\partial A \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(\bar{A} \setminus \mathring{A} \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(\Omega \setminus A \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(\Omega \setminus A) = 1 - \mathcal{L}^n(A)$$

essendo A aperto quindi $\mathcal{L}^n$ – misurabile. Ma

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \rho_j^n = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} = \frac{1}{2}$$

quindi $\mathcal{L}^n(\partial A \cap \Omega) > \frac{1}{2}$ e di conseguenza $\partial A \cap \Omega$ è formato da un infinità più che numerabile di punti. Basta ora osservare che in ogni punto di $\partial A \cap \Omega$ la funzione $u = \chi_A$ non è continua. Osserviamo anche che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) = \infty$.

Teorema 6.17 *Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana e sia S_u l'insieme di salto di u. Risulta $\mathcal{L}^n(S_u) = 0$. Inoltre se $u \in L^1(\Omega)$ e per $x \in \Omega$ esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B(x,\rho)} |u(y) - z| \ dy = 0$$

allora $x \notin S_u$ e $\tilde{u}(x) = z$. Viceversa se $u \in L^\infty(\Omega)$ e $x \notin S_u$ allora

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B(x,\rho)} |u(y) - \tilde{u}(x)| \ dy = 0.$$

Facciamo vedere con un esempio che l'ipotesi $u \in L^\infty$ nella seconda parte del teorema 6.17 non può essere eliminata.

Esempio 6.18 Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ e sia $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$u(x, y) = \begin{cases} y^{-\frac{3}{4}} & \text{se } 0 < y \leq x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo il punto $(0, 0)$.

Se fissiamo $t < 0$, essendo $u(x, y) \geq 0$ in tutto $\mathbb{R}^2$ si ha che

$$\{(x, y) : u(x, y) > t\} = \mathbb{R}^2$$

quindi $\{(x, y) : u(x, y) > t\}$ ha densità 1 in $(0, 0)$. Allora $u_-(0, 0) \geq t$ per ogni $t < 0$ e quindi $u_-(0, 0) \geq 0$. Sia ora $t > 0$ Consideriamo nuovamente l'insieme $\{(x, y) : u(x, y) > t\}$ che è costituito dall'intersezione dell'insieme $\{u > 0\}$ con la striscia $0 < y < t^{-\frac{4}{3}}$. Quindi se poniamo $A_\rho = \{(x,y) : -\rho \le x \le \rho,\ 0 \le y \le x^2\}$ sarà $(\{(x,y) : u(x,y) > t\} \cap B(x,\rho)) \subset A_\rho$. Valutiamo ora la misura di A_ρ :

$$\mathcal{L}^2(A_\rho) = 2\int_0^\rho x^2\ dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\rho = \frac{2}{3}\rho^3.$$

Ne segue che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^2\left(\{(x,y) : u(x,y) > t\} \cap B(x,\rho)\right)}{\mathcal{L}^2\left(B(x,\rho)\right)} \le \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\rho^3}{\pi\rho^2} = 0$$

quindi $u_+(0,0) \le t$ per ogni $t > 0$, allora $u_+(0,0) \le 0$. Raccogliendo insieme le due disuguaglianze si ha: $0 \le u_-(0,0) \le u_+(0,0) \le 0$ quindi $(0,0) \notin S_u$ e $\tilde{u}(0,0) = 0$. Vediamo ora che $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \int_{B(0,\rho)} |u(x,y)|\ dx\, dy = \infty$. Sia (x_ρ, y_ρ) il punto del I quadrante intersezione tra le curve $x^2+y^2 = \rho^2$ e $y = x^2$. Avremo che $y_\rho = \dfrac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2} = \dfrac{4\rho^2}{2(\sqrt{1+4\rho^2}+1)} \sim \rho^2$ per $\rho \to 0$. Quindi $x_\rho = \sqrt{y_\rho} \sim \rho$. Poniamo ora $D_\rho = \{(x,y) : 0 \le x \le x_\rho, 0 \le y \le x^2\}$. Allora

$$\int_{B(0,\rho)} |u(x,y)|\ dx\, dy = \int_{B(0,\rho)\cap\{0<y\le x^2\}} y^{-\frac{3}{4}}\ dx\, dy \ge 2\int_{D_\rho} y^{-\frac{3}{4}}\ dx\, dy = 2\int_0^{x_\rho} dx \int_0^{x^2} y^{-\frac{3}{4}}\ dy =$$

$$= 2\int_0^{x_\rho} \left[4y^{\frac{1}{4}}\right]_0^{x^2}\ dx = 8\int_0^{x_\rho} x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{16}{3}x_\rho^{\frac{3}{2}} \sim \rho^{\frac{3}{2}}$$

quindi $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \int_{B(0,\rho)} |u(x,y)|\ dx\, dy \ge \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\rho^2} = \infty$. ■

Definizione 6.19 *Siano $S \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$ con $1 \le k \le n$. Si dice che S è numerabilmente $\mathcal{H}^k$ – rettificabile se S è unione, al più numerabile, di grafici di funzioni lipschitziane a meno di un insieme di misura $\mathcal{H}^k$ – nulla. Più precisamente devono esistere dei piani k – dimensionali P_j , degli insiemi $D_j \subset P_j$ e delle funzioni lipschitziane $\varphi_j : D_j \longrightarrow P_j^\perp$ tali che ponendo $\Gamma_j = \mathrm{graph}(\varphi_j)$ risulti*

$$\mathcal{H}^k(S \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j) = 0.$$

Osserviamo che un punto $x \in \mathbb{R}^n$ appartiene al grafico di φ_j se e solo se proiettandolo sui due spazi ortogonali P_j e $P_j^{\perp}$ le due proiezioni sono in corrispondenza tramite φ_j , cioè: $\pi_j^{\perp}(x) = \varphi_j\left(\pi_j(x)\right)$.

Definizione 6.20 *Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana e sia $x \in \Omega \setminus S_u$. Diciamo che u è differenziabile in senso approssimato in x se $\tilde{u}(x) \in \mathbb{R}$ e se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\operatorname*{aplim}_{y \to x} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - L \cdot (y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

Se il vettore L esiste allora è unico e lo indichiamo con $\nabla u(x)$.

I seguenti due teoremi illustrano come si possono rappresentare più concretamente le tre componenti di Du della definizione 6.10 . In particolare si vede che il gradiente approssimato è la parte assolutamente continua di Du , la parte di salto è un integrale $n-1$ dimensionale su Su dei salti della u considerati con la loro direzione ν mentre la parte cantoriana non può essere concentrata su insiemi di misura $\mathcal{H}^{n-1}$ – finita risultando così diffusa in Ω .

Teorema 6.21 *Sia $u \in BV(\Omega)$ e sia $D^a u$ la parte assolutamente continua di Du rispetto a $\mathcal{L}^n$. Se poniamo $\varphi = \dfrac{dD^a u}{d\mathcal{L}^n}$ abbiamo che:*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{B(x,\rho)} \frac{|u(y) - u(x) - \varphi(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|}\, dy = 0$$

per $\mathcal{L}^n$ – quasi ogni $x \in \Omega$. In particolare u è $\mathcal{L}^n$ – quasi ovunque differenziabile in senso approssimato e $\nabla u(x) = \varphi(x)$ per $\mathcal{L}^n$ – quasi ogni $x \in \Omega$.

Teorema 6.22 *Se $u \in BV(\Omega)$ allora S_u è numerabilmente $\mathcal{H}^{n-1}$ rettificabile e*

$$Ju(B) = \int\limits_{B \cap S_u} (u_+ - u_-)\nu \; d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

dove ν *è la densità della misura* Du *, cioè* $Du = \nu|Du|$ *. Inoltre se* B *è un boreliano di* Ω *e* $\mathcal{H}^{n-1}(B) < \infty$ *allora* $|Cu|(B) = 0$ *.*

Teorema 6.23 *Sia* $u \in BV(\Omega)$ *e sia* ν *la densità di* Du *, cioè* $\nu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $Du = \nu|Du|$ *e* $|\nu(x)| = 1$ *per* $|Du|$ *– quasi ogni* $x \in \Omega$ *. Nei punti* $x \in \Omega$ *dove* $|\nu(x)| = 1$ *definiamo:*

$$B_\nu^+(x,\rho) = \{y \in B(x,\rho) : (y-x)\cdot\nu(x) > 0\}\,,$$

$$B_\nu^-(x,\rho) = \{y \in B(x,\rho) : (y-x)\cdot\nu(x) \le 0\}\,.$$

Allora per $\mathcal{H}^{n-1}$ *– quasi ogni* $x \in \Omega$ *risulta che* $u_+(x) \in \mathbb{R}$, $u_-(x) \in \mathbb{R}$ *e*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \left(\int\limits_{B_\nu^+(x,\rho)} |u(y) - u_+(x)|^{n'}\, dy + \int\limits_{B_\nu^-(x,\rho)} |u(y) - u_-(x)|^{n'}\, dy \right) = 0$$

dove $n' = \dfrac{n}{n-1}$ *.*

Questo risultato applicato nei punti $x \in S_u$ mostra come i salti della u avvengono con ampiezza $u_+ - u_-$ in una direzione ben precisa indicata da ν ; quindi in un certo senso i salti possono essere visti come nel caso unidimensionale. Il teorema seguente ci mostra come una funzione BV di più variabili possa essere sezionata per ottenere funzioni BV di una variabile e viceversa.

Teorema 6.24 *Sia* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *. Dato* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *indichiamo con* π_i *l'iperpiano perpendicolare al vettore* e_i *della base canonica . Fissato* $y \in \pi_i$ *definiamo* $u_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *come* $u_y(t) = u(y + te_i)$ *. Se* $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ *allora* $u_y \in BV(\mathbb{R})$ *per* $\mathcal{H}^{n-1}$ *– quasi ogni* $y \in \pi_i$ *e*

$$\int\limits_{\pi_i} |Du_y|(\mathbb{R})\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \infty. \tag{6.4}$$

Viceversa, se la (6.4) vale per ogni $i = 1, \dots, n$ *allora* $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\int_{\pi_i} |Du_y|(\mathbb{R})\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = |D_i u|(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

7. Insiemi di perimetro finito.

Definizione 7.1 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *. Dato* $E \subset \Omega$ *boreliano poniamo* $P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$ *. Diremo che* E *ha perimetro finito in* Ω *se* $P(E, \Omega) < \infty$ *. Diremo invece che* E *ha perimetro localmente finito in* Ω *se* $P(E, K) < \infty$ *per ogni* K *compatto contenuto in* Ω *.*

Definizione 7.2 *Sia* $E \subset \Omega$ *boreliano con* $P(E, \Omega) < \infty$ *. Dato* $x \in \Omega$ *diremo che* $x \in \mathcal{F}^*(E)$ *se* $P(E, \Omega \cap B(x, \rho)) > 0$ *per ogni* $\rho > 0$ *, esiste il limite*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{D\chi_E\,(B(x,\rho))}{|D\chi_E|(B(x,\rho))} \doteq \nu_E(x)$$

e $|\nu_E(x)| = 1$ *. L'insieme* $\mathcal{F}^*(E)$ *si dice frontiera ridotta di De Giorgi di* E *e la funzione* $\nu_E : \mathcal{F}^*(E) \longrightarrow S^{n-1}$ *si dice normale interna ad* E *.*

Mostriamo ora con un esempio che la frontiera ridotta in generale non coincide con la frontiera topologica.

Esempio 7.3 Sia $E \subset \mathbb{R}^2$, $E = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. E è boreliano e $\partial E = [0,1]^2$ poiché E è denso e $\mathring{E} = \emptyset$. Inoltre $\chi_E = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^2$ quindi $|D\chi_E| = 0$ e di conseguenza anche $D\chi_E = 0$. Quindi E è di perimetro finito in $\mathbb{R}^2$ con $P(E, \mathbb{R}^2) = 0$ e $P(E, B(x,\rho)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\rho > 0$ quindi $\mathcal{F}^*(E) = \emptyset$.

Teorema 7.4 (Formula di Gauss–Green)
Dato $E \subset \Omega$ *con* $P(E,\Omega) < \infty$ *risulta* $P(E,B) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \mathcal{F}^*(E))$ *per ogni* B *boreliano in* Ω *e in particolare* $\mathcal{H}^{n-1}((\mathcal{F}^*(E)) < \infty$. *Inoltre* $\mathcal{F}^*(E)$ *è numerabilmente* $\mathcal{H}^{n-1}$*–rettificabile,* ν_E *è ortogonale a* $\mathcal{F}^*(E)$ *e*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \setminus (E_0 \cup E_1 \cup \mathcal{F}^*(E))) = 0$$

dove E_0 *e* E_1 *sono gli insiemi di densità 0 e 1 per* E *come nella definizione 6.8*
Vale infine la formula di Gauss–Green:

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \; dx = -\int_{\mathcal{F}^*(E)} \nu_E \cdot \varphi \; d\mathcal{H}^{n-1}(x) \qquad \forall\, \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Mostriamo ora il legame che esiste fra la frontiera ridotta e la densità degli insiemi.

Definizione 7.5 *Dato* $x \in \mathcal{F}^*(E)$ *poniamo:*

$$\begin{aligned} H^+(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : \nu_E(x) \cdot (y-x) > 0\} \\ H^-(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : \nu_E(x) \cdot (y-x) < 0\} \end{aligned}.$$

Dato $r > 0$ *definiamo inoltre*

$$E_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : x + r(y-x) \in E\}.$$

Teorema 7.6 *Se* $x \in \mathcal{F}^*(E)$ *allora*

$$\chi_{E_r(x)} \longrightarrow \chi_{H^+(x)} \qquad \textit{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \textit{ per } r \to 0^+.$$

Corollario 7.7 $\mathcal{F}^*(E) \subset E_{\frac{1}{2}}$.

__Dim.__ Fissati $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ definiamo $g_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ come $g_r(y) = \dfrac{y-x}{r} + x$. Allora risulta:

$$g_r(E \cap B(x,r)) = E_r \cap B(x,1).$$

Osserviamo che g_r è invertibile e che $g_r^{-1}(z) = x + r(z - x)$. Ne segue che

$$B(x,r) \cap E = g_r^{-1}\left(E_r \cap B(x,1)\right) = x + r\left(E_r \cap B(x,1) - x\right)$$

quindi

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,r) \cap E\right)}{\omega_n r^n} = \frac{r^n \mathcal{L}^n\left(E_r \cap B(x,1)\right)}{\omega_n r^n} \longrightarrow \frac{\mathcal{L}^n\left(H^+(x) \cap B(x,1)\right)}{\omega_n} = \frac{1}{2}$$

e questo vuol dire che $x \in E_{\frac{1}{2}}$. ■

Definizione 7.8 *Sia E un insieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Diremo che $x \in \partial_* E$ se*

$$\limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \cap E\right)}{\rho^n} > 0 \quad e \quad \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \setminus E\right)}{\rho^n} > 0.$$

$\partial_* E$ si dice frontiera teorica di E .

Osservazione 7.9 $\partial_* E = \mathbb{R}^n \setminus (E_0 \cup E_1)$

<u>Dim</u>. Se $x \in E_1$ allora

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \cap E\right)}{\rho^n} = 1 \quad \text{quindi} \quad \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \setminus E\right)}{\rho^n} = 0$$

e di conseguenza $x \notin \partial_* E$. Analogo risultato se $x \in E_0$.
Viceversa, se $x \notin \partial_* E$ allora

$$\limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \cap E\right)}{\rho^n} = 0 \quad \text{oppure} \quad \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \setminus E\right)}{\rho^n} = 0.$$

Nel primo caso $x \in E_0$ mentre nel secondo, tenendo conto del fatto che $\mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \cap E\right) + \mathcal{L}^n\left(B(x,\rho) \setminus E\right) = 1$, si ottiene che $x \in E_1$. ■

Mostriamo che anche la frontiera teorica e la frontiera topologica in generale non coincidono.

Esempio 7.10 Sia $E = B(0,1) \cup \{(x,y) : y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Ovviamente $\partial E = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{y = 0, |x| \geq 1\}$ mentre se $|x| > 1$, $y = 0$ si ha che $(x,y) \in E_0$. Quindi $\partial_* E = \{x^2 + y^2\} = 1$. ■

Osserviamo che nel corollario 7.7 l'inclusione opposta è in generale falsa come mostra il seguente esempio:

Esempio 7.11 Sia $E = B(0,1) \cap \{(x_1,x_2) : x_1 x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia $\Omega = B(0,1)$. Risulta semplice verificare che $P(E,\Omega) < \infty$ e che $(0,0) \in E_{\frac{1}{2}}$; vediamo che $(0,0) \notin \mathcal{F}^*(E)$.
Sappiamo che $|D\chi_E| = \mathcal{H}^1 \lfloor \partial_* E$ quindi, se $0 < \rho < 1$ si ha:

$$|D\chi_E| \left(B(0,\rho)\right) = \mathcal{H}^1 \left(\partial_* E \cap B(0,\rho)\right) = 4\rho.$$

Dalla formula di Gauss–Green segue che per ogni $g \in C_c^1(\Omega)$ risulta:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_j} \chi_E \; dx = \int\limits_{E} \frac{\partial g}{\partial x_j} \; dx = -\int\limits_{\partial * E} g \nu_j \; d\mathcal{H}^1 = -\int\limits_{\Omega} g \; d\mu_j$$

dove abbiamo preso $\mu_j = \mathcal{H}^1 \lfloor (\nu_j \chi_{\partial_* E})$. Da questo segue che $D\chi_E = \mathcal{H}^1 \lfloor (\nu \chi_{\partial_* E})$, quindi

$$D_1 \chi_E \left(B(0,\rho)\right) = \mathcal{H}^1 \left(\{x_1 = 0, \; -\rho < x_2 \leq 0\}\right) - \mathcal{H}^1 \left(x_1 = 0, \; 0 \leq x_2 < \rho\}\right) =$$
$$= \rho - \rho = 0.$$

Allo stesso modo $D_2 \chi_E \left(B(0,\rho)\right) = 0$, quindi

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{D\chi_E \left(B(0,\rho)\right)}{|D\chi_E| \left(B(0,\rho)\right)} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{0}{4\rho} = 0.$$

Ne segue che $(0,0) \notin \mathcal{F}^*(E)$ in quanto sarebbe $|\nu_E(0,0)| = 0 \neq 1$. ■

Teorema 7.12 *Sia E un insieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$. Allora risulta:*

$$\mathcal{F}^*(E) \subset \partial_*(E) \qquad e \qquad \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial_* E \setminus \mathcal{F}^*(E)\right) = 0.$$

<u>Dim</u>. L'inclusione segue dal fatto che $\mathcal{F}^*(E) \subset E_{\frac{1}{2}} \subset \partial_* E$. La seconda affermazione segue invece dall'osservazione 7.9 e dal teorema 7.4 poiché:

$$\partial_* E \setminus \mathcal{F}^*(E) = (\mathbb{R}^n \setminus (E_0 \cup E_1)) \setminus \mathcal{F}^*(E) = \mathbb{R}^n \setminus (E_0 \cup E_1 \cup \mathcal{F}^*(E)).$$

■

Concludiamo queste note con un risultato di grande importanza per le funzioni BV:

Teorema 7.13 (Formula di Coarea di Fleming–Rishel)
Data $u \in L^1(\Omega)$ si ha:

$$|Du|(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\{x \in \Omega : u(x) > t\}, \Omega\right)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial_* \{x \in \Omega : u(x) > t\}\right)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}\left(\mathcal{F}^*\left(\{x \in \Omega : u(x) > t\}\right)\right)\, dt.$$

Come esempio delle possibilità di applicazione della coarea dimostriamo che la parte cantoriana del gradiente di una funzione BV non si concentra su insiemi di misura $\mathcal{H}^{n-1}$ finita (vedi teorema 6.22).

Teorema 7.14 *Sia $u \in BV(\Omega)$ e sia $F \subset \Omega$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(F) < \infty$. Allora $|Cu|(F) = 0$.*

<u>Dim</u>. Supponiamo inizialmente che sia $F \cap S_u = \emptyset$. Allora $|Ju|(F) = 0$. Ma $\mathcal{H}^{n-1}(F) < \infty$ quindi $\mathcal{L}^n(F) = 0$ e di conseguenza $\int_{\Omega} |\nabla u|\, dx = 0$. Ricordando che $Du = \mathcal{L}^n \lfloor \nabla u + Ju + Cu$ si ottiene che $|Cu|(F) = |Du|(F)$. Dalla formula di coarea abbiamo:

$$|Du|(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}\left(\{y \in F : y \in \partial_* E_t\}\right) dt$$

dove $E_t = \{y \in \Omega : u(y) > t\}$. Poniamo $\tilde{E}_t = \{y \in \Omega : \tilde{u}(y) = t\}$ e vediamo che $\partial_* E_t \cap F \subset \tilde{E}_t \cap F$.

Sia $x \in \partial_* E_t$ allora E_t non ha né densità 0 né densità 1 in x. Quindi $u_+(x) \geq t$ e $u_-(x) \leq t$. Ma se $x \in F$ allora $u_+(x) = u_-(x) = \tilde{u}(x)$ quindi $\tilde{u}(x) = t$.

Torniamo ora alla dimostrazione del teorema. Poniamo

$$A_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{E}_t \cap F) \geq 1 \right\}$$

e, dato $m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, $A_m = \left\{ t \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{m+1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{E}_t \cap F) < \dfrac{1}{m} \right\}$.

Risulta ovviamente

$$F = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\tilde{E}_t \cap F) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in A_m} (\tilde{E}_t \cap F).$$

Supponiamo che esista $\bar{m} \geq 1$ tale che $A_{\bar{m}}$ è infinito. Allora poiché $\tilde{E}_t \cap \tilde{E}_s = \emptyset$ se $t \neq s$ si ha:

$$\infty = \frac{1}{\bar{m}+1} \#(A_{\bar{m}}) \leq \mathcal{H}^{n-1}\left(\bigcup_{t \in A_{\bar{m}}} (\tilde{E}_t \cap F) \right) \leq \mathcal{H}^{n-1}(F) < \infty$$

e questo è assurdo. Quindi ogni A_m con $m \geq 1$ è finito e lo stesso vale per A_0. Poniamo ora $A = \left\{ t \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{E}_t \cap F) > 0 \right\}$. Essendo $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ si ottiene che A è al più numerabile e di conseguenza:

$$|Cu|(F) = |Du|(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{E}_t \cap F)\, dt = 0.$$

Nel caso che invece $F \cap S_u \neq \emptyset$ consideriamo il fatto che:

$$|Cu|(F) = |Cu|(F \setminus S_u) + |Cu|(F \cap S_u) = |Cu|(F \setminus S_u)$$

e si applica quanto dimostrato in precedenza. ■

Bibliografia

1. L. Ambrosio: "A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation", *Boll. Un. Mat. Ital.* **3-B** (1989), 857–881.
2. L. Ambrosio: "Variational problems in SBV and image segmentation", *Acta Appl. Math.* **17** (1989), 1–40.
3. E. De Giorgi & L. Ambrosio: "Un nuovo funzionale del calcolo delle variazioni", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **82** (1988), 199–210.
4. L. C. Evans & R. F. Gariepy: *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Ann Harbor (1992).
5. H. Federer: *Geometric Measure Theory*, Springer–Verlag, Berlin (1969).
6. E. Giusti: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston (1984).
7. S. I. Hudjaev & A. I. Vol'pert: *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Martinus Nijhoff Publishers (1985).
8. S. Luckhaus: "Solutions for the Two-Phase Stefan Problem with the Gibbs–Thomson Law for the Melting Temperature", *Euro. Jnl of Applied Mathematics* **1** (1990), 101–111.
9. U. Massari & M. Miranda: *Minimal Surfaces of Codimension One*, North-Holland, Amsterdam (1984).

10. F. MORGAN: *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*, Academic Press, New York (1988).

11. D. MUMFORD & J. SHAH: "Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems", *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1989), 577–685.

12. L. SIMON: *Lectures on Geometric Measure Theory*, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra (1984).

13. W. P. ZIEMER: *Weakly Diferentiable Functions*, Springer–Verlag, New–York (1989).