

Analisi Matematica

Pisa, 3 novembre 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

determinandone la continuità, la derivabilità, gli eventuali punti di massimo o minimo assoluti e relativi, estremi inferiore e superiore e gli eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$ perché è somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + o(x) - 1}{x} + 2 = 5 = f(0)$$

quindi f è continua anche in 0. Se $x \neq 0$ risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}x - (e^{3x} - 1)}{x^2} = \frac{e^{3x}(3x - 1) + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2))(3x - 1) + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Quindi f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = \frac{9}{2}$. Studiamo ora il segno della derivata per $x \neq 0$. Basterà considerare il numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Poniamo

$$g(x) = e^{3x}(3x - 1) + 1$$

e osserviamo che $g'(x) = 3e^{3x}(3x - 1) + 3e^{3x} = 9xe^{3x}$; quindi $g'(x) > 0$ se $x > 0$ e $g'(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che g ha un punto di minimo assoluto stretto per $x = 0$. Dato che $g(0) = 0$, otteniamo che g è sempre positiva e di conseguenza anche $f'(x)$ è sempre positiva. Allora f è strettamente crescente in tutto \mathbb{R} , pertanto non ha né punti di massimo né punti di minimo locali e assoluti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \frac{0 - 1}{-\infty} + 2 = 2$$

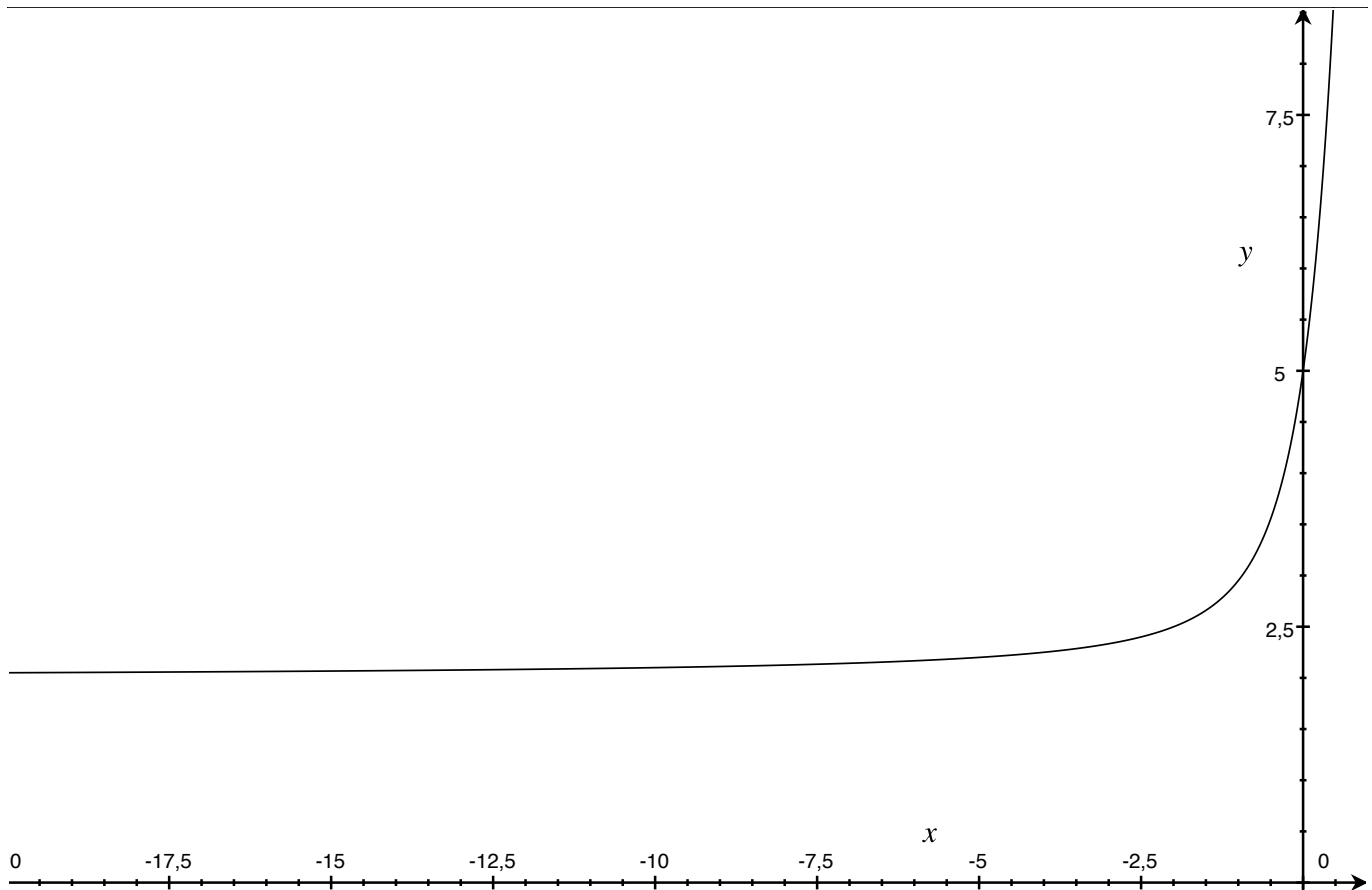
f ha quindi l'asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \rightarrow -\infty$. Applicando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{1} + 2 = +\infty.$$

controlliamo quindi l'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x^2} + \frac{2}{x} = +\infty$$

dove l'ultimo limite si può ottenere applicando il teorema di de l'Hôpital 2 volte. Non ci sono quindi asintoti obliqui, come non ci sono asintoti verticali essendo f continua in tutto \mathbb{R} .



Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2 + \alpha - 2)}}{3n}$$

determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge semplicemente e assolutamente.

Soluzione

Verifichiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio della radice.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2 + \alpha - 2)}}{3n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha^2 + \alpha - 2}}{\sqrt[n]{3n}} = e^{\alpha^2 + \alpha - 2}.$$

Avremo quindi convergenza assoluta quando $e^{\alpha^2 + \alpha - 2} < 1$, cioè se $\alpha^2 + \alpha - 2 < 0$ che corrisponde alla condizione $-2 < \alpha < 1$. Se invece $\alpha > 1$ oppure $\alpha < -2$ si ottiene subito che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge, né assolutamente né semplicemente. Nei casi $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ il criterio della radice non ci fornisce informazioni. Sostituendo direttamente i valori otteniamo, in entrambi i casi, la serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{3n}$$

che, per il criterio di Leibniz converge. Studiandone invece la convergenza assoluta abbiamo una serie armonica che è divergente. Riassumendo, la serie considerata converge semplicemente per $\alpha \in [-2, 1]$ e assolutamente per $\alpha \in (-2, 1)$.

Esercizio 3 Stabilire se esiste finito il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(2 + 3x^4) \arctan(x^{5/2})} dx .$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda diverge positivamente per $x \rightarrow 0^+$, che è continua e strettamente positiva per ogni $x > 0$. Per decidere l'integrabilità dovremo quindi esaminare separatamente gli intervalli $(0, 1)$ e $[1, +\infty)$ (ricordiamo che la scelta del punto $x = 1$ è del tutto arbitraria e poteva essere scelto qualsiasi altro punto $c > 0$ per spezzare l'intervallo di integrazione). Applicheremo il criterio del confronto asintotico. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{(2 + 3x^4) \arctan(x^{5/2})} x^{1/2} = \frac{1}{2}$$

quindi per $x \rightarrow 0^+$ la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^{1/2}}$ che è integrabile nell'intervallo $(0, 1)$. Esaminiamo ora l'altro intervallo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(2 + 3x^4) \arctan(x^{5/2})} x^2 = \frac{2}{3\pi}$$

quindi per $x \rightarrow +\infty$ la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^2}$ che è integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Ne segue che l'integrale proposto esiste finito.