

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica
Analisi Matematica - vecchio regolamento

Pisa, 3 novembre 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

determinandone la continuità, la derivabilità, gli eventuali punti di massimo o minimo assoluti e relativi, estremi inferiore e superiore e gli eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$ perché è somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + o(x) - 1}{x} + 2 = 5 = f(0)$$

quindi f è continua anche in 0. Se $x \neq 0$ risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}x - (e^{3x} - 1)}{x^2} = \frac{e^{3x}(3x - 1) + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2))(3x - 1) + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Quindi f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = \frac{9}{2}$. Studiamo ora il segno della derivata per $x \neq 0$. Basterà considerare il numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Poniamo

$$g(x) = e^{3x}(3x - 1) + 1$$

e osserviamo che $g'(x) = 3e^{3x}(3x - 1) + 3e^{3x} = 9xe^{3x}$; quindi $g'(x) > 0$ se $x > 0$ e $g'(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che g ha un punto di minimo assoluto stretto per $x = 0$. Dato che $g(0) = 0$, otteniamo che g è sempre positiva e di conseguenza anche $f'(x)$ è sempre positiva. Allora f è strettamente crescente in tutto \mathbb{R} , pertanto non ha né punti di massimo né punti di minimo locali e assoluti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \frac{0 - 1}{-\infty} + 2 = 2$$

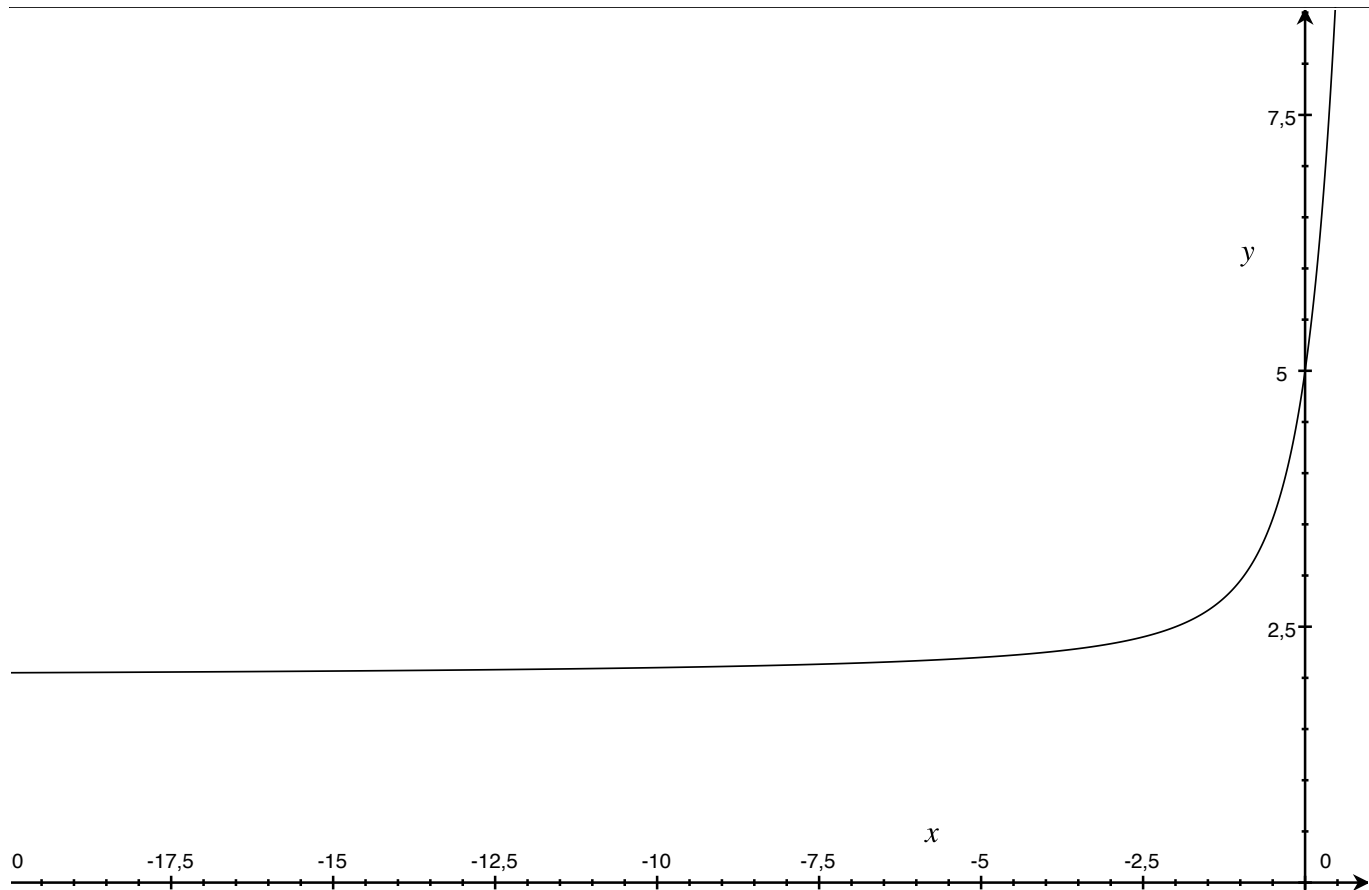
f ha quindi l'asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \rightarrow -\infty$. Applicando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{1} + 2 = +\infty.$$

controlliamo quindi l'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x^2} + \frac{2}{x} = +\infty$$

dove l'ultimo limite si può ottenere applicando il teorema di de l'Hôpital 2 volte. Non ci sono quindi asintoti obliqui, come non ci sono asintoti verticali essendo f continua in tutto \mathbb{R} .



Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione

$$a_n = \log(n^\alpha) + \frac{1}{n^{\alpha+1}} .$$

Soluzione

Se $\alpha > 0$ allora $n^\alpha \rightarrow +\infty$, quindi $\log(n^\alpha) \rightarrow \infty$. Se $\alpha = 0$ allora $n^\alpha = 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi $\log(n^\alpha) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Se $\alpha < 0$ allora $n^\alpha \rightarrow 0^+$, quindi $\log(n^\alpha) \rightarrow -\infty$.

Se $\alpha > -1$ allora $n^{\alpha+1} \rightarrow +\infty$ quindi $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \rightarrow 0$. Se $\alpha = -1$ allora $\frac{1}{n^{\alpha+1}} = 1$ per ogni $n \geq 1$. Se $\alpha < -1$ allora $n^{\alpha+1} \rightarrow 0^+$ quindi $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \rightarrow +\infty$. Mettendo insieme i risultati otteniamo che

- se $-1 \leq \alpha < 0$ allora $\lim_n a_n = -\infty$
- se $\alpha = 0$ allora $\lim_n a_n = 0$
- se $\alpha > 0$ allora $\lim_n a_n = +\infty$.

Resta fuori solo il caso di indeterminazione per $\alpha < -1$. Osserviamo a questo punto che

$$a_n = \alpha \log n + n^{-1-\alpha} = n^{-1-\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \log n}{n^{-1-\alpha}} \right)$$

e che per $\alpha < -1$ si ha $-1 - \alpha > 0$ quindi $\lim_n \frac{\alpha \log n}{n^{-1-\alpha}} = 0$ e il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y^4(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinandone l'intervallo massimale di definizione.

Soluzione

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili ed è definita per $y \neq 0$. Separando le variabili e integrando otteniamo

$$\int y^4 dy = \int x dx$$

quindi

$$\frac{y^5}{5} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Determiniamo c imponendo la condizione iniziale

$$\frac{1}{5} = 0 + c.$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{5}}$$

che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.