Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 617536 12 dicembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	a
3	c
4	d
5	c
6	b
7	d
8	d
9	a
10	b

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \dfrac{1}{x^2+1} > 3\}$

(a) è limitato

(b) è limitato superiormente ma non inferiormente

(c) non è limitato né inferiormente né superiormente

(d) è limitato inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{1}{x^2+1} > 3\}$.

Poniamo $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1} - 3$ in modo che risulti

$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = +\infty$

avremo che $\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. se $x > x_1 \Rightarrow f(x) > 0$. Ne segue che $(x_1, +\infty) \subset A \Rightarrow A$ non è superiormente limitato.

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = -\infty$, $\exists\ x_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

se $x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$, quindi $(-\infty, x_2) \cap A = \emptyset$ e x_2 è un

minorante di A. Ne segue che A è inferiormente limitato.

2. Sia $f(x) = 5x - \dfrac{x}{\log^2 x}$ Allora

► (a) f non ha asintoti obliqui

(b) $y = 5x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

(c) $y = 5$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

(d) non esiste $\lim_{x \to 1} f(x)$

Soluzione:

$f(x) = 5x - \dfrac{x}{\log^2 x}$.

Osserviamo che f non è definito per $x < 0$, quindi potrebbe avere un asintoto obliquo o orizzontale solo per $x \to +\infty$.

Vediamo l'asintoto obliquo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 5 - \frac{1}{\log^2 x} = 5 - \frac{1}{+\infty} = 5 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \cancel{5x} - \frac{x}{\log^2 x} - \cancel{5x} = -\infty$$ per gerarchia di infiniti.

Quindi f non ha asintoti obliqui.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$

(a) ha massimo

(b) ha minimo

► (c) è strettamente crescente

(d) è debolmente decrescente

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\, dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo che F è derivabile e che

$F'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi F è strettamente crescente.

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1)}\,dx =$

(a) $\log 2 - \frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{\log 2}{2} - \sqrt{2}$ ► (d) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Soluzione:

Calcoliamo prima l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+2\sqrt{x}+1)}\,dx$$ con la sostituzione

$\sqrt{x} = t$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ottenendo

$$\int \frac{2\,dt}{t^2+2t+1} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = 2\left(\frac{-1}{t+1}\right) + c = \frac{-2}{\sqrt{x}+1} + c$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+2\sqrt{x}+1)}\,dx = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}+1}\right]_1^2 = \frac{-2}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{-2}{\sqrt{2}+1} + 1 =$$

$$= \frac{-2+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

5. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$

(a) diverge negativamente (b) converge ► (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx .$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$.

Per $x \to 0$ consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x} \cdot x = 1$$

Dato che $\int_0^1 g(x)dx = +\infty$ otteniamo che anche $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$.

Poiché $f(x) \geq 0$, l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$ può solo convergere o divergere positivamente, quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty + \int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty .$$

6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$

(a) non esiste ► (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}\,dx$$

Poniamo $f(x)=\dfrac{\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}$ e osserviamo che

f è definita $\forall x \in [2,+\infty)$, dovremo quindi esaminare solo l'andamento di f per $x \to +\infty$.

$$\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)=\log\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\log\left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}\right)=$$

$$=\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ per } x\to+\infty.$$

Quindi $f(x)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)x^{-3/4}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+o(1)\right)x^{-3/4}=$

$$=\frac{2}{x^{5/4}}\left(1+o(1)\right).$$

Poniamo $g(x)=\dfrac{1}{x^{5/4}}$, osserviamo che $f(x)>0$ $\forall x\in[2,+\infty)$

e che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2$. Dato che $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal

criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1}=$

(a) 0 (b) non esiste (c) $+\infty$ ► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7) + 5n^2 + 1}$$

Poiché $\log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, utilizzando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con la sostituzione $t = -\frac{1}{n}$ otteniamo che

$$a_n = \frac{n^4\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin(n^7) + 5n^2 + 1} = \frac{n^3\left(-1 + o(1)\right)}{n^2\left(\frac{\sin(n^7)}{n^2} + 5 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(-1 + o(1)\right)}{\frac{\sin(n^7)}{n^2} + 5 + \frac{1}{n^2}}$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{+\infty\,(-1+0)}{\frac{\text{limitata}}{+\infty} + 5 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty\,(-1)}{0 + 5 + 0} = -\infty.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n \log(n^3+3)}$

(a) converge (b) è indeterminata (c) diverge negativamente ▶ (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che, per $n\to+\infty$,

$$\log(1+\sqrt{n}) = \log\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\right) = \log\sqrt{n} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = \frac{1}{2}\log n + o(1)$$

$$\log(n^3+3) = \log\left(n^3\left(1+\frac{3}{n^3}\right)\right) = \log(n^3) + \log\left(1+\frac{3}{n^3}\right) = 3\log n + o(1)$$

Quindi

$$a_n = \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)} = \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{n\,(3\log n + o(1))} = \frac{1}{n}\;\frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)}$$

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)} = \frac{1}{6}$$

e $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, otteniamo che anche $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$.

La serie quindi diverge positivamente.

9. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

► (a) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua (b) è differenziabile

(c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali (d) è continua ma non è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0 \cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

10. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{x+y}(y^2 - xy)$ sono

(a) nessuno ▶ (b) due (c) infiniti (d) uno

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x+y}(y^2 - xy)$$

$$f_x = e^{x+y}(y^2-xy) + e^{x+y}(-y) = e^{x+y}(y^2-xy-y) = e^{x+y}\, y\,(y-x-1)$$

$$f_y = e^{x+y}(y^2-xy) + e^{x+y}(2y-x) = e^{x+y}(y^2-xy+2y-x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \cancel{e^{x+y}}\, y(y-x-1) = 0 \\ \cancel{e^{x+y}}(y^2-xy+2y-x) = 0 \end{cases}$$

dalla prima equazione abbiamo $y=0$ oppure $y-x-1=0$

se $y=0$, dalla seconda otteniamo $-x=0 \Rightarrow x=0$

quindi il punto stazionario $(0,0)$.

Se $y-x-1=0 \Rightarrow x=y-1$ e dalla seconda

$$y^2-(y-1)y+2y-(y-1)=0 \iff \cancel{y^2}\cancel{-y^2}\cancel{+y}+2y\cancel{-y}+1=0 \iff y=-\frac{1}{2}$$

quindi $x=y-1=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$ e il punto stazionario è $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

La funzione ha 2 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 237075 12 dicembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	b
3	d
4	a
5	a
6	c
7	d
8	b
9	c
10	a

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \dfrac{1}{x^2+1} > 3\}$

(a) è limitato

► (b) è limitato inferiormente ma non superiormente

(c) è limitato superiormente ma non inferiormente

(d) non è limitato né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{1}{x^2+1} > 3\}$.

Poniamo $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1} - 3$ in modo che risulti

$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = +\infty$

ovvero che $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. se $x > x_1 \Rightarrow f(x) > 0$. Ne segue che $(x_1, +\infty) \subset A \Rightarrow A$ non è superiormente limitato.

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = -\infty$, $\exists\, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

se $x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$, quindi $(-\infty, x_2) \cap A = \emptyset$ e x_2 è un

minorante di A. Ne segue che A è inferiormente limitato.

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} (e^x - 1) =$

(a) $+\infty$ ► (b) non esiste (c) 0 (d) 1

Soluzione:

Poniamo $f(x)=\frac{\sin x}{x}(e^x-1)$ e osserviamo che

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=+\infty$ per gerarchia di infiniti mentre

$\lim_{x\to+\infty}\sin x$ non esiste. Dimostriamo ora che

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ non esiste.

Scegliamo due successioni $a_n=n\pi$ e $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ e

osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(n\pi)\,\frac{e^{n\pi}-1}{n\pi}=\lim_{n\to+\infty}0\cdot\frac{e^{n\pi}-1}{n\pi}=\lim_{n\to+\infty}0=0.$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\frac{e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=\lim_{n\to+\infty}1\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=$$

$=1\cdot(+\infty)=+\infty$,

quindi $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ non esiste.

3. La funzione $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{1+t^2}\,dt$

(a) ha minimo

(b) è debolmente decrescente

(c) ha massimo

► (d) è strettamente crescente

Soluzione:

$$F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{1+t^2}\,dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo che

F è derivabile e che

$F'(x)=\frac{e^x}{1+x^2}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, quindi F è strettamente

crescente.

4. $\int\frac{\cos(2\log x)}{x}\,dx=$

► (a) $\sin(\log x)\cos(\log x)+c$

(b) $\log x\cos(2x)+c$

(c) $\sin(2\log x)\log x+c$

(d) $-\frac{\sin(2\log x)}{x^2}+c$

Soluzione:

$$\int \frac{\cos(2\log x)}{x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $\log x = t$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{dx}{x} = dt$

ottenendo $\int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(2t) + c = \sin t \cos t + c$

$= \sin(\log x)\cos(\log x) + c$

5. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$

► (a) diverge positivamente (b) non esiste (c) diverge negativamente (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx .$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 1$.

Per $x \to 0$ consideriamo la funzione $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x} \cdot x = 1$$

Dato che $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ otteniamo che anche $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

Poichè $f(x) \geq 0$, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$ può solo convergere o divergere positivamente, quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty .$$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(a) diverge negativamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cos\frac{1}{x}\, dx.$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cos\dfrac{1}{x}\, dx$ e osserviamo che

$x>1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}<1 \Rightarrow \cos\frac{1}{x}>0$, quindi $f(x)\geq 0 \ \forall x\in(1,+\infty)$.

Inoltre $x^2-1\neq 0 \ \forall x>1$, quindi f è definita e continua in tutto l'intervallo di integrazione che dividiamo nel punto $x=2$.

Osserviamo ora che $\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \left((x+1)^2(x-1)^2\right)^{1/3} = (x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}$

Per $x\to 1^+$ scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^{2/3}}$ per il criterio del confronto asintotico. Dato che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2 x}{(x+1)^{2/3}} \cos\frac{1}{x} = \frac{\sin^2 1}{2^{2/3}} \cos 1 \neq 0$$

e che $\int_1^2 g(x)\, dx$ converge, otteniamo che anche

$\int_1^2 f(x)\, dx$ converge.

Per $x\to+\infty$ osserviamo che $\left|\sin^2 x \cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$, quindi

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(x^2-1)^{2/3}}.$$

Ora scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{4/3}}$ e osserviamo che

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{(x^2-1)^{2/3}}}{g(x)} = 1$. Poiché $\int_2^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{(x^2-1)^{2/3}}\, dx$

converge. Per il criterio del confronto avremo che anche $\int_2^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, quindi, per il criterio di assoluta integrabilità, $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Unendo i risultati sui due intervalli otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1} =$

(a) non esiste (b) 0 (c) $+\infty$ ► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1}$$

Poiché $\log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$, utilizzando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t\to 0$ con la sostituzione $t = -\frac{1}{n}$ otteniamo che

$$a_n = \frac{n^4\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1} = \frac{n^3\left(-1+o(1)\right)}{n^2\left(\frac{\sin(n^7)}{n^2}+5+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(-1+o(1)\right)}{\frac{\sin(n^7)}{n^2}+5+\frac{1}{n^2}}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{+\infty\,(-1+0)}{\frac{\text{limitata}}{+\infty}+5+\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty\,(-1)}{0+5+0} = -\infty.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$

(a) è indeterminata ► (b) diverge positivamente (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che, per $n\to+\infty$,

$$\log(1+\sqrt{n}) = \log\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\right) = \log\sqrt{n} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = \frac{1}{2}\log n + o(1)$$

$$\log(n^3+3) = \log\left(n^3\left(1+\frac{3}{n^3}\right)\right) = \log(n^3) + \log\left(1+\frac{3}{n^3}\right) = 3\log n + o(1)$$

Quindi

$$a_n = \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)} = \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{n(3\log n + o(1))} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)}$$

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)} = \frac{1}{6}$$

e $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, otteniamo che anche $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$.

La serie quindi diverge positivamente.

9. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(b) è differenziabile

► (c) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua

(d) è continua ma non è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

10. L'insieme $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\right\}$ è

► (a) l'unione disgiunta di infinite corone circolari

(b) la parte di piano delimitata da una parabola

(c) l'esterno di un disco

(d) un'unione di infiniti dischi disgiunti

Soluzione:

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$.

Ricordiamo che $\sin t > 0 \iff t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $(x,y) \in \Omega \iff 2k\pi < x^2+y^2-1 < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni fissato $k \geq 0$, l'insieme

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1\}$$

è una corona circolare di centro l'origine e raggi

$\sqrt{2k\pi+1}$, $\sqrt{(2k+1)\pi+1}$.

Ω è quindi l'unione di infinite corone circolari disgiunte tra loro.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 281432 12 dicembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	a
3	c
4	d
5	d
6	d
7	d
8	d
9	a
10	a

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \dfrac{1}{x^2+1} > 3\}$

(a) non è limitato né inferiormente né superiormente (b) è limitato

(c) è limitato superiormente ma non inferiormente ► (d) è limitato inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{1}{x^2+1} > 3\}$.

Poniamo $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1} - 3$ in modo che risulti

$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = +\infty$

avremo che $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. se $x > x_1 \Rightarrow f(x) > 0$. Ne segue che $(x_1, +\infty) \subset A \Rightarrow A$ non è superiormente limitato.

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = -\infty$, $\exists\, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

se $x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$, quindi $(-\infty, x_2) \cap A = \emptyset$ e x_2 è un

minorante di A. Ne segue che A è inferiormente limitato.

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-1)\arctan(x+1)$

► (a) ha minimo

(b) è strettamente decrescente

(c) è debolmente crescente

(d) è limitata superiormente

Soluzione:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\,\mathrm{arctg}(x+1)$.

La funzione f è continua e

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)\,\mathrm{artg}(-\infty) = -\infty\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)\,\mathrm{artg}(+\infty) = (+\infty)\,\frac{\pi}{2} = +\infty$.

Applicando il teorema di Weierstrass generalizzato, otteniamo che f ha minimo.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$

(a) ha minimo

(b) è debolmente decrescente

► (c) è strettamente crescente

(d) ha massimo

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo che

F è derivabile e che

$F'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi F è strettamente

crescente.

4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ ► (d) $\log \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + c$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log|x^2+2x+2|\Big]_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\log|1\cancel{-2}\cancel{+2}| - \log|\cancel{4}-\cancel{4}+2|\Big) = \frac{1}{2}(0-\log 2) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$

(a) converge (b) non esiste (c) diverge negativamente ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx .$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty]$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$.

Per $x \to 0$ consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x} \cdot x = 1$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ otteniamo che anche $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

Poichè $f(x) \geq 0$, l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$ può solo convergere o divergere positivamente, quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty .$$

6. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x + 1 - \cos x}{x^2 + x^3}\,dx$

(a) non esiste (b) converge (c) diverge negativamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x + 1 - \cos x}{x^2 + x^3}\, dx$$

osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \dfrac{\sin x + 1 - \cos x}{x^2 + x^3}$

è di segno costante in un intorno destro di 0, ad esempio $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = \dfrac{x + o(x^2) + 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x^2 + x^3} = \dfrac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + x^3} =$

$= \dfrac{1 + \frac{x}{2} + o(x)}{x + x^2} = \dfrac{1 + o(1)}{x(1 + o(1))}$. Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$ abbiamo

che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ Dato che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = +\infty.$$

Se invece $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty)$ osserviamo che

$$|f(x)| \leq \frac{|\sin x| + 1 + |\cos x|}{x^2 + x^3} \leq \frac{3}{x^2 + x^3} \leq \frac{3}{x^3}$$

Dato che $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{3}{x^3}\, dx$ converge, per il criterio del confronto

otteniamo che $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge assolutamente, quindi

converge. In conclusione $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$.

7. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7) + 5n^2 + 1} =$

(a) non esiste (b) $+\infty$ (c) 0 ► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1}$$

Poiché $\log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$, utilizzando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con la sostituzione $t = -\frac{1}{n}$ otteniamo che

$$a_n = \frac{n^4\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1} = \frac{n^3\left(-1+o(1)\right)}{n^2\left(\frac{\sin(n^7)}{n^2}+5+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(-1+o(1)\right)}{\frac{\sin(n^7)}{n^2}+5+\frac{1}{n^2}}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{+\infty\,(-1+0)}{\frac{\text{limitata}}{+\infty}+5+\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty\,(-1)}{0+5+0} = -\infty.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$

(a) converge (b) diverge negativamente (c) è indeterminata ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che, per $n\to+\infty$,

$$\log(1+\sqrt{n}) = \log\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\right) = \log\sqrt{n} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = \frac{1}{2}\log n + o(1)$$

$$\log(n^3+3) = \log\left(n^3\left(1+\frac{3}{n^3}\right)\right) = \log(n^3) + \log\left(1+\frac{3}{n^3}\right) = 3\log n + o(1)$$

Quindi

$$a_n = \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)} = \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{n(3\log n + o(1))} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)}$$

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)} = \frac{1}{6}$$

e $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, otteniamo che anche $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$.

La serie quindi diverge positivamente.

9. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

► (a) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua (b) è continua ma non è differenziabile
(c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali (d) è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

10. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

► (a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(c) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

(d) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

Soluzione:

Verifichiamo prima la continuità utilizzando le coordinate polari.

Poniamo

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{(\rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta)^{4/3}}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \frac{\rho^{8/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{\rho^2} =$$

$$= \rho^{2/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Dato che $|g(\rho,\vartheta)| \leq \rho^{2/3} \to 0$ per $\rho \to 0$, f è continua in $(0,0)$.

Vediamo ora le derivate parziali.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(h^2-0)^{4/3}}{h^2+0} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{8/3}}{h^2 \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h\to 0^- \end{cases}$$

quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste.

Dato che $f(y,x) = f(x,y)$, non esiste neanche $f_y(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 462154 12 dicembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	c
3	a
4	c
5	b
6	d
7	a
8	a
9	b
10	a

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{1}{x^2+1} > 3\}$

(a) è limitato superiormente ma non inferiormente ► (b) è limitato inferiormente ma non superiormente

(c) non è limitato né inferiormente né superiormente (d) è limitato

Soluzione:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{1}{x^2+1} > 3\}$.

Poniamo $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1} - 3$ in modo che risulti

$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = +\infty$

avremo che $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. se $x > x_1 \Rightarrow f(x) > 0$. Ne segue che $(x_1, +\infty) \subset A \Rightarrow A$ non è superiormente limitato.

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \frac{1}{+\infty} - 3 = -\infty$, $\exists\, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

se $x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$, quindi $(-\infty, x_2) \cap A = \emptyset$ e x_2 è un

minorante di A. Ne segue che A è inferiormente limitato.

2. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\alpha x^2)}{5 \log(1 + x^4)} = +\infty$

(a) solo se $\alpha = \frac{5}{3}$ (b) per ogni $\alpha \neq \frac{5}{3}$ ► (c) per ogni $\alpha > 0$ (d) per ogni α

Soluzione:

Se $\alpha = 0$ abbiamo che $\frac{\sin(3\alpha x^2)}{5\log(1+x^4)} = 0 \quad \forall x \neq 0$

(per $x = 0$ la funzione non ha senso perché $\log(1+0^4) = 0$).

Quindi, nel caso $\alpha = 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\alpha x^2)}{5\log(1+x^4)} = 0$.

Se $\alpha \neq 0$ allora $3\alpha x^2 \neq 0 \quad \forall x \neq 0$, quindi

$$\frac{\sin(3\alpha x^2)}{5\log(1+x^4)} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin(3\alpha x^2)}{3\alpha x^2}}}_{\to 1} \cdot 3\alpha x^2 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x^4}{5\log(1+x^4)}}}_{\to \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{x^4}$$

quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\alpha x^2)}{5\log(1+x^4)} = \frac{1}{5} \lim_{x \to 0} \frac{3\alpha x^2}{x^4} = \frac{3\alpha}{5} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{3\alpha}{5}(+\infty)$.

Ne segue che il limite vale $+\infty \iff \alpha > 0$.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int\limits_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$

► (a) è strettamente crescente

(b) ha minimo

(c) ha massimo

(d) è debolmente decrescente

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\, dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo che

F è derivabile e che

$F'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, quindi F è strettamente crescente.

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^{x^2} t^4 e^{(t^2)}\, dt$

(a) ha un asintoto obliquo

(b) è debolmente crescente

► (c) è limitata inferiormente

(d) è concava

Soluzione:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\, dt$

Osserviamo che $t^4 e^{t^2} \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$ e che $x^2 \geq 0$,

quindi $\int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\, dt \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

La funzione F è quindi limitata inferiormente.

5. L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$

(a) converge

► (b) diverge positivamente

(c) non esiste

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx .$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,+\infty]$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$.

Per $x \to 0$ consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x} \cdot x = 1$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ otteniamo che anche $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

Poiché $f(x) \geq 0$, l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$ può solo convergere o divergere positivamente, quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty .$$

6. Sia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin^2 x \cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = +\infty$

(b) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

(c) f ha integrale finito su $(0,1]$

► (d) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\infty$

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin^2 x \cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

Se $x \in [-1,0] \Rightarrow f(x) \leq 0$, inoltre, per $x \to 0^-$

$$f(x) = \frac{x}{(x+o(x^2))^2(1+o(1))} = \frac{x}{(x^2+o(x^3))(1+o(1))} = \frac{x}{x^2(1+o(x))(1+o(1))} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+o(x))(1+o(1))}$$. Se scegliamo $g(x) = -\frac{1}{x}$ otteniamo

che $$\lim_{x\to 0^-} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} \frac{1}{(1+o(x))(1+o(1))}(-x) = 1$$

quindi possiamo applicare il confronto asintotico ($-f \geq 0$, $g > 0$)

e otteniamo che $\int_{-1}^{0} -f(x)\,dx = +\infty$ dato che

$\int_{-1}^{0} \frac{-1}{x}\,dx = +\infty$. Ne segue che

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\infty .$$

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \log\left(\dfrac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7)+5n^2+1} =$

► (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) 0 (d) non esiste

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^4 \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sin(n^7) + 5n^2 + 1}$$

Poiché $\log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, utilizzando lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con la sostituzione $t = -\frac{1}{n}$

otteniamo che

$$a_n = \frac{n^4\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin(n^7) + 5n^2 + 1} = \frac{n^3\left(-1 + o(1)\right)}{n^2\left(\frac{\sin(n^7)}{n^2} + 5 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(-1 + o(1)\right)}{\frac{\sin(n^7)}{n^2} + 5 + \frac{1}{n^2}}$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{+\infty\,(-1+0)}{\frac{\text{limitata}}{+\infty} + 5 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty\,(-1)}{0+5+0} = -\infty.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n \log(n^3+3)}$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) è indeterminata (d) converge

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che, per $n\to+\infty$,

$$\log(1+\sqrt{n}) = \log\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\right) = \log\sqrt{n} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = \frac{1}{2}\log n + o(1)$$

$$\log(n^3+3) = \log\left(n^3\left(1+\frac{3}{n^3}\right)\right) = \log(n^3) + \log\left(1+\frac{3}{n^3}\right) = 3\log n + o(1)$$

Quindi

$$a_n = \frac{\log(1+\sqrt{n})}{n\log(n^3+3)} = \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{n(3\log n + o(1))} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)}$$

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\log n + o(1)}{3\log n + o(1)} = \frac{1}{6}$$

e $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, otteniamo che anche $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$.

La serie quindi diverge positivamente.

9. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) è continua ma non è differenziabile

► (b) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua

(c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(d) è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\log(y^2) =$

► (a) non esiste (b) 1 (c) $-\infty$ (d) 0

Soluzione:

Poniamo $f(x,y) = x \log(y^2)$ e osserviamo che f è definita per $y \neq 0$, quindi in $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x.

Consideriamo prima la curva $\gamma(t) = (0,t)$ (corrispondente all'asse y).

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} f(0,t) = \lim_{t \to 0} 0 \cdot \log(t^2) = 0 .$$

Consideriamo ora $\alpha(t) = (t, e^{-1/t})$ e osserviamo che

$$\lim_{t \to 0^+} \alpha(t) = (0,0)$$

Dato che $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} f(\alpha(t)) = \lim_{t \to 0^+} f(t, e^{-1/t}) = \lim_{t \to 0^+} t \log\left(e^{-\frac{2}{t}}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{t \to 0^+} t\left(-\frac{2}{t}\right) = -2$, possiamo concludere che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \text{ non esiste.}$$