Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 4 novembre 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

determinandone insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, punti di massimo o di minimo locale, massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), intervalli di monotonia e di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per verificare la continuità basta osservare che e^{-x^2} è continua in tutto $\mathbb{R}$ quindi a maggior ragione nella semiretta $[0, +\infty)$. Analogamente la funzione $1 + e^{1/x}$ è continua nella semiretta $(-\infty, 0)$. Resta quindi solo da verificare la continuità di f in $x = 0$ che è garantita del fatto che

$$\lim_{x \to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1 + 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2}$$

Per la derivabilità vale un discorso analogo al precedente: basta verificarla in $x = 0$. Calcoliamo $f'(x)$ per $x > 0$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

quindi, essendo f continua in $x = 0$ sarà:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

Per la derivata sinistra utilizziamo invece direttamente il limite del rapporto incrementale:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{-\frac{1}{t}} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

dove abbiamo utilizzato la sostituzione $t = -\frac{1}{x}$. La f è quindi derivabile anche in $x = 0$ e la sua derivata vale 0. Valutiamo ora i limiti.

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + e^{1/x} = 1 + e^0 = 2, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ per $x \to -\infty$ e un altro asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui. Studiamo ora il segno della derivata. Per $x > 0$ abbiamo già calcolato $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ che risulta strettamente negativa. Per $x < 0$ abbiamo:

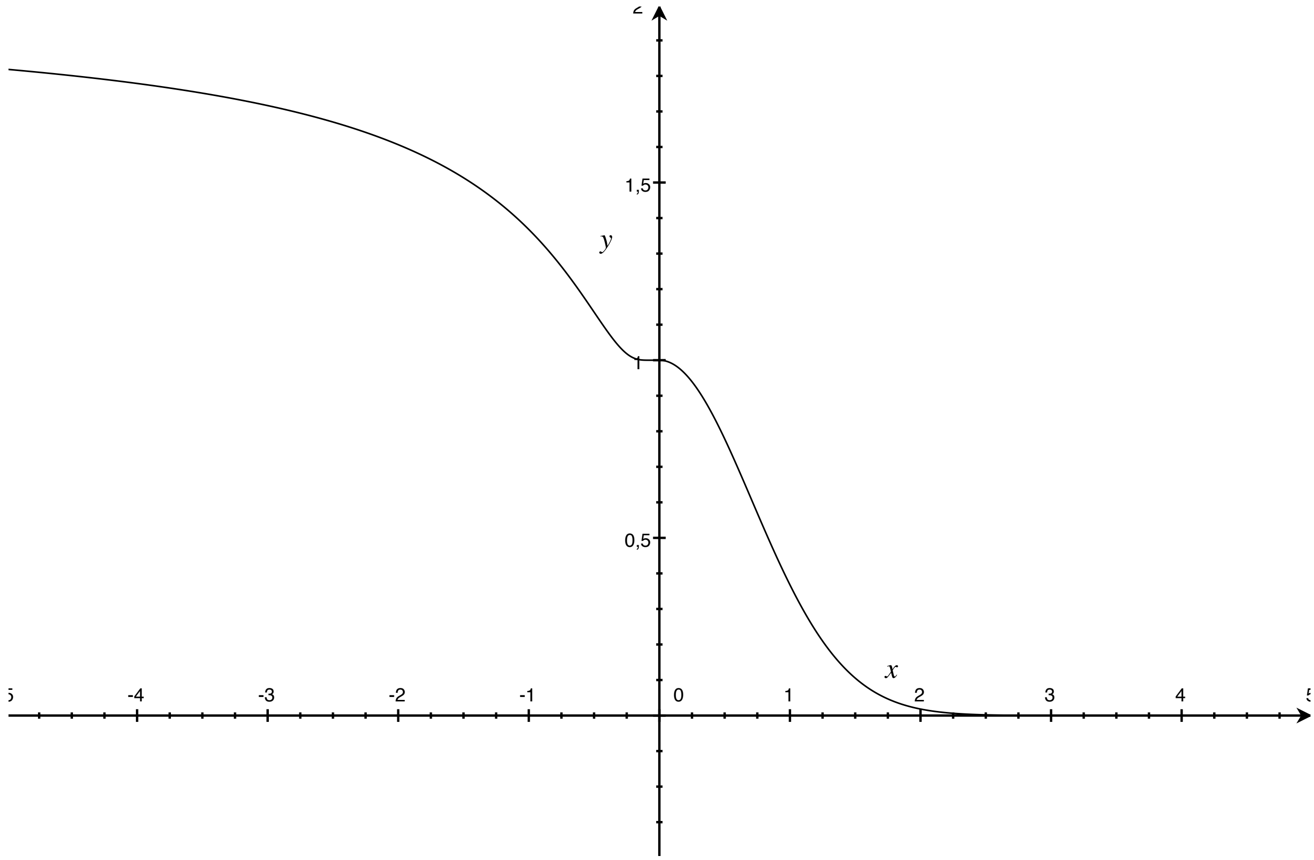
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} < 0$$

quindi la f è sempre decrescente. In $x = 0$ la derivata prima si annulla ma il punto non è né di massimo né di minimo locale. Non ci sono massimi e minimi assoluti (altrimenti sarebbero anche locali). L'estremo superiore vale 2 mentre quello inferiore vale 0 (segue dalla monotonia di f). Valutiamo ora la derivata seconda.

$$f''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \qquad \text{per } x > 0$$

$$f''(x) = e^{1/x}\frac{2x + 1}{x^4} \qquad \text{per } x < 0$$

Dallo studio del segno di f'' si ottiene che f è convessa sulla semiretta $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ mentre è concava nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e sulla semiretta $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Ne segue che i punti $-\frac{1}{2}$, 0 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso.



Esercizio 2 Data la funzione $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ dire se è integrabile in senso generalizzato rispettivamente sugli intervalli $(0, +\infty)$ e $(0, 1]$ e in caso affermativo calcolare il valore dell'integrale.

Soluzione

La f è definita e continua su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Per $x \to \infty$ poniamo $t = \frac{1}{x}$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo per $t \to 0^+$ ottenendo che $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Osserviamo ora che f è positiva, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico alle funzioni $f(x)$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Essendo g non integrabile sulla semiretta $[1, +\infty)$ non lo è neanche f, a maggior ragione f non è integrabile su $(0, +\infty)$. Sull'intervallo $(0, 1]$ invece la f non è limitata nell'intorno di 0. Di nuovo applichiamo il confronto asintotico utilizzando la funzione $h(x) = \log \frac{1}{x} = -\log x$. Infatti, risulta $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$. Per ottenere questo risultato si può applicare il teorema di de l'Hopital oppure osservare che $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log \frac{1}{x} + \log(1 + x)$. La funzione $h(x)$ è integrabile su $(0, 1]$, quindi anche f lo è. Passiamo ora al calcolo dell'integrale. Dato $\varepsilon > 0$ risulta:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_{\varepsilon}^{1} \log(1 + x) - \log x \, dx = \int_{\varepsilon+1}^{2} \log t \, dt - \int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx =$$

$$= [x \log x - x]_{\varepsilon+1}^{2} - [x \log x - x]_{\varepsilon}^{1} = 2 \log 2 - 2 - (\varepsilon + 1) \log(\varepsilon + 1) + \varepsilon + 1 - (1 \log 1 - 1 - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon)$$

e questa quantità, quando ε tende verso 0 tende a $2 \log 2$ che è il valore dell'integrale cercato.

Esercizio 3 Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Soluzione

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni $\sin t$ e $\log(1+t)$ per $t \to 0^+$:

$$\sin t = t + o(t^2), \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Applichiamo ora questi sviluppi ponendo $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ avendo osservato che per $n \to +\infty$, $t \to 0^+$. Allora otteniamo che:

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

In virtù del teorema sulla permanenza del segno si ottiene subito che il termine generale della serie è definitivamente positivo quindi possiamo applicare il teorema del confronto asintotico ottenendo che la serie è equivalente a una serie armonica, pertanto risulta divergente positivamente.