Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica seconda verifica intermedia	codice 80022 18 aprile 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	c
3	d
4	b
5	a
6	b
7	b
8	d
9	a
10	c

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\sin x}\, \arctan \frac{1}{x^2}\, dx$

(a) non esiste

► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$

Dato che $f(x)$ non è definita per $x=0$ dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x_0 = 1$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{0^+} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

quindi f è limitata in un intorno di 0. Dato che f è continua, $\int_0^1 f(x)dx$ converge perché f è integrabile secondo Riemann.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che f è a segno variabile.

$|f(x)| = |\sqrt[3]{\sin x}| \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \leq 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^2}$.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ abbiamo che

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

Applicando il criterio del confronto otteniamo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, quindi $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge assolutamente.

Dato che anche $\int_0^1 |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge assolutamente.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x(1+x)^2}\, dx$

(a) vale $+\infty$ (b) vale $-\infty$ ► (c) non esiste (d) esiste finito

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x(1+x)^2}$$

f è definita e continua $\forall x \in (0,+\infty)$.

Dividiamo l'intervallo in $x_0 = 1$.

Dato che $f(x) = \frac{x^2-1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{x}$, scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty.$$

Per $x \to +\infty$ osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{(1+x)^2} = 1$, quindi, anche in questo caso, scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = 1$$

dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty \rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Gli integrali sui due intervalli divergono con segno opposto, quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

(a) non esiste (b) converge (c) diverge negativamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

Sia $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$. Osserviamo che f è continua in $(0,+\infty)$.

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$,

e che $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{+\infty}} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$,

la funzione f è limitata, pertanto è integrabile su ogni intervallo $[0,M]$ con $M>0$. Vediamo l'andamento per $x \to +\infty$.

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, con il cambiamento di variabile $t = -\frac{1}{x}$ otteniamo

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Poiché $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge abbiamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

4. La successione $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{\log(2+n)}$

(a) ha sia massimo che minimo

► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) non ha né massimo né minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{\log(2+n)}$$

Consideriamo la sottosuccessione estratta di indici pari:

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{\log(2+2n)} = 1 + \frac{1}{\log(2+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$. Dato che $b_n > 1$ $\forall n$, (b_n) ha massimo.

Ora consideriamo la sottosuccessione dispari:

$$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{\log(2+2n+1)} = -1 + \frac{1}{\log(3+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$. Dato che $c_n > -1$ $\forall n$, (c_n) non ha minimo.

Poiché $b_n > c_n$ $\forall n$, la successione (a_n) ha massimo ma non ha minimo.

5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n!}{n^n}\right)^{n!} =$

► (a) $+\infty$ (b) $\frac{1}{e}$ (c) 1 (d) 0

Soluzione:

$$a_n = \left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{n!} = e^{n!\log\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ con $t = \frac{n!}{n^n}$ ottenendo che

$$n!\log\left(1+\frac{n!}{n^n}\right) = n!\left(\frac{n!}{n^n} + o\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) = n!\,\frac{n!}{n^n}\left(1+o(1)\right) = \frac{(n!)^2}{n^n}\left(1+o(1)\right)$$

Poniamo $b_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$ e calcoliamo $\lim_{n\to\infty} b_n$ con il criterio del rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 = \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot (n+1)^2 =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1) = e^{n\log\left(\frac{n}{n+1}\right)} \cdot (n+1) = e^{n\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} (n+1) =$$

$$= e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} (n+1) = e^{\frac{-n}{n+1}(1+o(1))} (n+1) \to e^{-1}(+\infty) = +\infty$$

quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{n!\log\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(n!)^2}{n^n}(1+o(1))} = e^{+\infty} = +\infty$.

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^n \, n^{\log n}}{n^n} =$

(a) 1 ► (b) 0 (c) $+\infty$ (d) $\frac{1}{e}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^n \, n^{\log n}}{n^n} = \frac{e^{n\log(\log n)} \, e^{\log^2 n}}{e^{n\log n}} = e^{n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n = \lim_{n\to\infty} n\log n \left(\frac{\log(\log n)}{\log n} + \frac{\log n}{n} - 1 \right) =$$

$$= +\infty(0+0-1) = -\infty$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0.$$

7. La serie $\sum_n (1+x)^{-n}$ converge se e solo se

(a) $-1 < x < 1$

► (b) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

(c) $x > 0$

(d) $x \leq 0$

Soluzione:

Poniamo $a_n = (1+x)^{-n}$ e consideriamo prima la convergenza assoluta con il criterio della radice:

$\sqrt[n]{|a_n|} = |1+x|^{-1}$ quindi se $|1+x|^{-1} < 1$ la serie converge assolutamente pertanto anche semplicemente.

$|1+x|^{-1} < 1 \iff 1 < |1+x| \iff 1+x < -1$ oppure $1+x > 1$

$\iff x < -2$ oppure $x > 0$ quindi $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Se invece $x \in [-2, 0]$ risulta $|1+x|^{-1} \geq 1$ quindi $\lim_{n\to\infty} (1+x)^{-n} \neq 0$ (non esiste oppure vale $+\infty$) e la serie non converge.

8. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2) - 4n}$

(a) diverge positivamente

(b) diverge negativamente

(c) converge assolutamente

► (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$$

Osserviamo che $\dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = \dfrac{(-1)^n}{\sin(n^2)-4n} = -\dfrac{(-1)^n}{4n-\sin(n^2)}$.

Poniamo $a_n = \dfrac{1}{4n-\sin(n^2)}$ e osserviamo che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{+\infty + \text{limitata}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Mostriamo ora che (a_n) è decrescente.

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{4(n+1)-\sin((n+1)^2)} \leq \frac{1}{4n-\sin(n^2)}$$

$$\iff \cancel{4n} - \sin(n^2) \leq \cancel{4n}+4 - \sin((n+1)^2) \iff \sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 4$$

che è sempre vera perché $\sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 2$.

Dal criterio di Leibniz la serie data $\sum_n \dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = -\sum_n (-1)^n a_n$

converge.

Per la convergenza assoluta, scegliamo $b_n = \dfrac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}\right|}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-\sin(n^2)} = \frac{1}{4}.$$ Dato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie non converge assolutamente.

9. $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 + 4y^2 - \log\left(\dfrac{2+\sin(xy)}{3}\right) =$

► (a) $+\infty$ (b) $\log\dfrac{\pi}{2}$ (c) $-\infty$ (d) non esiste

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2+\sin(xy)}{3} \leq 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \text{quindi}$$

$$-\log 3 \leq \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \leq 0$$

Quindi $x^2+4y^2-\log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \geq x^2+4y^2+0 \geq x^2+y^2$.

Poiché $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+y^2 = +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+4y^2-\log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) = +\infty .$$

10. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$ sono

(a) due (b) nessuno ► (c) tre (d) uno

Soluzione:

$f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$

$f_x = -e^{-x}(y^3 - 2xy) + e^{-x}(-2y) = e^{-x}(-y^3 + 2xy - 2y) =$

$= e^{-x} \cdot y(-y^2 + 2x - 2)$

$f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{-x} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ e^{-x}(3y^2 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$

Dalla 2^a equazione otteniamo $3y^2 = 2x$. Sostituendo nella 1^a otteniamo

$y(-y^2 + 3y^2 - 2) = 0 \iff y(2y^2 - 2) = 0 \iff y = 0 \vee y^2 = 1$

Se $y = 0$, da $3y^2 = 2x$ otteniamo $x = 0$, quindi il punto $\boxed{(0,0)}$

Se $y = 1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}$

Se $y = -1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, -1\right)}$.

La funzione ha quindi 3 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica seconda verifica intermedia	codice 857306 18 aprile 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	d
4	c
5	c
6	b
7	a
8	d
9	c
10	a

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\sin x}\,\arctan\frac{1}{x^2}\,dx$

► (a) converge assolutamente

(b) non esiste

(c) diverge positivamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$

Dato che $f(x)$ non è definita per $x=0$ dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{0^+} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di 0. Dato che f è continua, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge perché f è integrabile secondo Riemann.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che f è a segno variabile.

$$|f(x)| = |\sqrt[3]{\sin x}| \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \leq 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^2}$.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ abbiamo che

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Applicando il criterio del confronto otteniamo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Dato che anche $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

► (a) diverge positivamente (b) converge (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ è definita e continua $\forall x \in [0,+\infty)$. Osserviamo che $0 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$ quindi

$\dfrac{1}{1+\sin^2 x} \geq \dfrac{1}{2}$. Dato che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto, segue che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = +\infty$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x}}\, dx$

(a) non esiste (b) converge (c) diverge negativamente ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Sia $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$. Osserviamo che f è continua in $(0, +\infty)$.

Dato che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$,

e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{+\infty}} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$,

la funzione f è limitata, pertanto è integrabile su ogni intervallo $[0, M]$ con $M > 0$. Vediamo l'andamento per $x \to +\infty$.

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, con il cambiamento di variabile $t = -\frac{1}{x}$ otteniamo

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Poiché $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge abbiamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

4. La successione $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{\log(2+n)}$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha sia massimo che minimo

▶ (c) ha massimo ma non ha minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{\log(2+n)}$$

Consideriamo la sottosuccessione estratta di indici pari:

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{\log(2+2n)} = 1 + \frac{1}{\log(2+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$. Dato che $b_n > 1$ $\forall n$, (b_n) ha massimo.

Ora consideriamo la sottosuccessione dispari:

$$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{\log(2+2n+1)} = -1 + \frac{1}{\log(3+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$. Dato che $c_n > -1$ $\forall n$, (c_n) non ha minimo.

Poiché $b_n > c_n$ $\forall n$, la successione (a_n) ha massimo ma non ha minimo.

5. La successione $a_n = \log(n^2) - \log^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(a) è definitivamente strettamente crescente e $\sup(a_n) = +\infty$

(b) non ha limite

▶ (c) è definitivamente strettamente decrescente e $\inf(a_n) = -\infty$

(d) è limitata

Soluzione:

$$a_n = \log(n^2) - \log^2\left(\frac{1}{n}\right) = 2\log n - (-\log n)^2 = 2\log n - \log^2 n = \log n\,(2 - \log n)$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Se consideriamo la funzione $f(x) = 2\log x - \log^2 x$ otteniamo che

$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\log x}{x} = \frac{2(1-\log x)}{x}$. Ne segue che $f'(x) < 0$ se $x > e$

e f è strettamente decrescente per $x > e$. Ne segue che

$a_n = f(n)$ è definitivamente strettamente decrescente.

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^n\, n^{\log n}}{n^n} =$

(a) $+\infty$ ► (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{e}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^n\, n^{\log n}}{n^n} = \frac{e^{n\log(\log n)}\, e^{\log^2 n}}{e^{n\log n}} = e^{n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n = \lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{\log(\log n)}{\log n} + \frac{\log n}{n} - 1\right) =$$

$$= +\infty(0 + 0 - 1) = -\infty$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0.$$

7. La serie $\sum_n (1+x)^{-n}$ converge se e solo se

► (a) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (b) $x \leq 0$

(c) $-1 < x < 1$ (d) $x > 0$

Soluzione:

Poniamo $a_n = (1+x)^{-n}$ e consideriamo prima la convergenza assoluta con il criterio della radice:

$\sqrt[n]{|a_n|} = |1+x|^{-1}$ quindi se $|1+x|^{-1} < 1$ la serie converge assolutamente pertanto anche semplicemente.

$|1+x|^{-1} < 1 \iff 1 < |1+x| \iff 1+x < -1$ oppure $1+x > 1$

$\iff x < -2$ oppure $x > 0$ quindi $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Se invece $x \in [-2, 0]$ risulta $|1+x|^{-1} \geq 1$ quindi

$\lim_{n\to\infty} (1+x)^{-n} \neq 0$ (non esiste oppure vale $+\infty$) e la serie non converge.

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{4^n + n^2}{\sqrt{n} - 7^n}$

(a) diverge negativamente

(b) è indeterminata

(c) converge semplicemente ma non assolutamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Sia $a_n = \dfrac{4^n + n^2}{\sqrt{n} - 7^n}$. Osserviamo che

$$a_n = \frac{4^n\left(1+\frac{n^2}{4^n}\right)}{7^n\left(\frac{\sqrt{n}}{7^n}-1\right)} = \left(\frac{4}{7}\right)^n \frac{1+\frac{n^2}{4^n}}{\frac{\sqrt{n}}{7^n}-1}$$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{n^2}{4^n}}{\frac{\sqrt{n}}{7^n}-1} = -1$ scegliamo $b_n = \left(\frac{4}{7}\right)^n$ e

ottieniamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \cancel{\left(\frac{4}{7}\right)^n} \left|\dfrac{1+\frac{n^2}{4^n}}{\frac{\sqrt{n}}{7^n}-1}\right| \cdot \cancel{\left(\frac{7}{4}\right)^n} = 1$

Poiché $\sum_n \left(\frac{4}{7}\right)^n$ converge (criterio della radice), per il criterio del confronto asintotico anche $\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} x^2 + 4y^2 - \log\left(\dfrac{2+\sin(xy)}{3}\right) =$

(a) $-\infty$ (b) non esiste ▶ (c) $+\infty$ (d) $\log\frac{\pi}{2}$

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1}{3} \le \frac{2+\sin(xy)}{3} \le 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad , \text{quindi}$$

$$-\log 3 \le \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \le 0$$

Quindi $x^2+4y^2-\log\left(\dfrac{2+\sin(xy)}{3}\right) \ge x^2+4y^2+0 \ge x^2+y^2$.

Poiché $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} x^2+y^2 = +\infty$ ottieniamo che

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+4y^2-\log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) = +\infty.$$

10. La funzione $f(x,y) = xy(2x + y - 2)$

► (a) ha 4 punti stazionari

(b) non ha punti stazionari

(c) ha una retta di punti stazionari

(d) ha 2 punti stazionari

Soluzione:

$$f(x,y) = xy(2x+y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[2x+y-2+x\cdot 2\right] = y(4x+y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left[2x+y-2+y\cdot 1\right] = x(2x+2y-2)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y(4x+y-2)=0 \\ x(2x+2y-2)=0 \end{cases} \implies y=0 \vee 4x+y-2=0$$

Se $y=0$, dalla seconda equazione $x(2x-2)=0 \implies x=0 \vee x=1$

quindi abbiamo i punti $(0,0)$ e $(1,0)$.

Se invece $4x+y-2=0 \implies y=2-4x$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$x(2x+2(2-4x)-2)=0 \iff x(2x+4-8x-2)=0$$

$$\iff x(-6x+2)=0 \iff x=0 \vee x=\frac{1}{3}$$

se $x=0$ da $y=2-4x$ abbiamo $y=2-4\cdot 0=2$ quindi il punto $(0,2)$.

Se $x=\frac{1}{3}$ da $y=2-4x$ abbiamo $y=2-4\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

quindi il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Risultano quindi i punti stazionari

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica seconda verifica intermedia	codice 545682 18 aprile 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	a
3	a
4	b
5	b
6	c
7	d
8	a
9	d
10	b

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\sin x}\,\arctan\frac{1}{x^2}\,dx$

(a) non esiste

► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$

Dato che $f(x)$ non è definita per $x=0$ dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x_0 = 1$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{0^+} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

quindi f è limitata in un intorno di 0. Dato che f è continua, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge perché f è integrabile secondo Riemann.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che f è a segno variabile.

$|f(x)| = |\sqrt[3]{\sin x}| \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} \leq 1 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^2}$.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ abbiamo che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Applicando il criterio del confronto otteniamo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Dato che anche $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

2. L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)\log(1+t^2)}\,dt$

► (a) diverge positivamente (b) non esiste (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)\log(1+t^2)}\,dt$$

Poniamo $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)\log(1+t^2)}$ e osserviamo che

$f(t) > 0 \quad \forall\, t \in (1,+\infty)$.

Scegliamo ora $g(t) = \dfrac{1}{t\log t}$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{(1+t^2)\log(1+t^2)} \cdot t\log t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\,\frac{\log t}{\log(1+t^2)} = 1 \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\log\left(t^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{2\log t + \log\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{2\log t + o(1)} = \frac{1}{2}.$$

Dato che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\log t} = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$, quindi

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty.$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

► (a) diverge positivamente (b) converge (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

Sia $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$. Osserviamo che f è continua in $(0, +\infty)$.

Dato che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$,

e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{+\infty}} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$,

la funzione f è limitata, pertanto è integrabile su ogni intervallo $[0, M]$ con $M > 0$. Vediamo l'andamento per $x \to +\infty$.

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, con il cambiamento di variabile $t = -\frac{1}{x}$ otteniamo

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx = +\infty$. Poichè $\int_0^1 f(x) \, dx$ converge abbiamo che $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = +\infty$.

4. La successione $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{\log(2+n)}$

(a) ha minimo ma non ha massimo ► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) non ha né massimo né minimo (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{\log(2+n)}$$

Consideriamo la sottosuccessione estratta di indici pari:

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{\log(2+2n)} = 1 + \frac{1}{\log(2+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$. Dato che $b_n > 1$ $\forall n$, (b_n) ha massimo.

Ora consideriamo la sottosuccessione dispari:

$$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{\log(2+2n+1)} = -1 + \frac{1}{\log(3+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$. Dato che $c_n > -1$ $\forall n$, (c_n) non ha minimo.

Poiché $b_n > c_n$ $\forall n$, la successione (a_n) ha massimo ma non ha minimo.

5. La successione $a_n = \dfrac{e^n}{n} - \cos n$

(a) è a segni alternati ► (b) è limitata inferiormente (c) tende a $-\infty$ (d) non ha limite

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} - \cos n = +\infty - \text{limitata} = +\infty$$

quindi, per la versione per le successioni del teorema di Weierstrass generalizzato, la successione è limitata inferiormente.

6. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\log n)^n\, n^{\log n}}{n^n} =$

(a) $\dfrac{1}{e}$ (b) 1 ► (c) 0 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^n\, n^{\log n}}{n^n} = \frac{e^{n\log(\log n)}\, e^{\log^2 n}}{e^{n\log n}} = e^{n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n = \lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{\log(\log n)}{\log n} + \frac{\log n}{n} - 1\right) =$$

$$= +\infty(0+0-1) = -\infty$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0.$$

7. La serie $\sum_n (1+x)^{-n}$ converge se e solo se

(a) $x > 0$ (b) $x \le 0$

(c) $-1 < x < 1$ ► (d) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Soluzione:

Poniamo $a_n = (1+x)^{-n}$ e consideriamo prima la convergenza assoluta con il criterio della radice:

$\sqrt[n]{|a_n|} = |1+x|^{-1}$ quindi se $|1+x|^{-1} < 1$ la serie converge assolutamente pertanto anche semplicemente.

$$|1+x|^{-1} < 1 \iff 1 < |1+x| \iff 1+x < -1 \text{ oppure } 1+x > 1$$

$\iff x < -2$ oppure $x > 0$ quindi $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Se invece $x \in [-2, 0]$ risulta $|1+x|^{-1} \ge 1$ quindi $\lim_{n\to\infty} (1+x)^{-n} \ne 0$ (non esiste oppure vale $+\infty$) e la serie non converge.

8. La serie $\sum_{n\ge 2} \dfrac{\cos(n\pi)}{n\log n}$

► (a) converge semplicemente (b) è indeterminata (c) diverge (d) converge assolutamente

Soluzione:

Sia $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n\log n} = \frac{(-1)^n}{n\log n}$. Poiché $\frac{1}{n\log n} > 0 \quad \forall n \geq 2$

la serie è a segni alterni.

Osserviamo ora che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e che la

successione $b_n = \frac{1}{n\log n}$ è decrescente (basta osservare

che $n\log n$ è crescente).

Applicando il criterio di Leibniz otteniamo che la serie

converge.

9. $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 + 4y^2 - \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) =$

(a) $-\infty$ (b) non esiste (c) $\log\frac{\pi}{2}$ ► (d) $+\infty$

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2+\sin(xy)}{3} \leq 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ , quindi}$$

$$-\log 3 \leq \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \leq 0$$

Quindi $x^2+4y^2 - \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \geq x^2+4y^2+0 \geq x^2+y^2$.

Poiché $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+y^2 = +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+4y^2 - \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) = +\infty.$$

10. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$ sono

(a) uno ► (b) tre (c) nessuno (d) due

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$$

$$f_x = -e^{-x}(y^3 - 2xy) + e^{-x}(-2y) = e^{-x}(-y^3 + 2xy - 2y) =$$

$$= e^{-x} \cdot y(-y^2 + 2x - 2)$$

$$f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{-x} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ e^{-x}(3y^2 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione otteniamo $3y^2 = 2x$. Sostituendo nella 1^a otteniamo

$$y(-y^2 + 3y^2 - 2) = 0 \iff y(2y^2 - 2) = 0 \iff y = 0 \lor y^2 = 1$$

Se $y = 0$, da $3y^2 = 2x$ otteniamo $x = 0$, quindi il punto $\boxed{(0,0)}$

Se $y = 1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}$

Se $y = -1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, -1\right)}$.

La funzione ha quindi 3 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica seconda verifica intermedia	codice 926130 18 aprile 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	d
3	a
4	c
5	d
6	c
7	d
8	c
9	d
10	c

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\sin x}\, \arctan \frac{1}{x^2}\, dx$

► (a) converge assolutamente
(b) non esiste
(c) diverge positivamente
(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$

Dato che $f(x)$ non è definita per $x=0$ dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{0^+} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di 0. Dato che f è continua, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge perché f è integrabile secondo Riemann.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che f è a segno variabile.

$$|f(x)| = |\sqrt[3]{\sin x}| \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \leq 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^2}$.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ abbiamo che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Applicando il criterio del confronto otteniamo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Dato che anche $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

2. La funzione $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)}$

(a) ha massimo

(b) ha un asintoto obliquo

(c) ha minimo

► (d) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

Soluzione:

$$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \qquad F(x)=\int_1^x \frac{dt}{(e^t-1)(t^2+1)}$$

La funzione integranda è definita e positiva $\forall t>0$, quindi F è definita $\forall x>0$.

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)=\int_1^0 \frac{dt}{(e^t-1)(t^2+1)} = -\int_0^1 \frac{dt}{(e^t-1)(t^2+1)}$$

per $t\to 0$ $\quad e^t-1 = 1+t+o(t)-1 = t(1+o(1))$ quindi

$$f(t)=\frac{1}{(e^t-1)(t^2+1)} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{(1+o(1))(t^2+1)}$$

scegliendo $g(t)=\frac{1}{t}$ otteniamo che $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{g(t)}=1$

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico abbiamo che $\int_0^1 f(t)\,dt=+\infty$, quindi $\lim_{x\to 0^+}F(x)=-\infty$.

F ha quindi un asintoto verticale.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

Dato che $0\le f(t)\le \frac{1}{(e-1)(t^2+1)}\le \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{t^2}$

scegliendo $g(t)=\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{t^2}$ e applicando il criterio del confronto abbiamo che $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, dato che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Quindi $\lim_{x\to\infty}F(x)$ è finito e F ha un asintoto orizzontale.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1-e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

► (a) diverge positivamente (b) non esiste (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

Sia $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$. Osserviamo che f è continua in $(0, +\infty)$.

Dato che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$,

e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{+\infty}} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$,

la funzione f è limitata, pertanto è integrabile su ogni intervallo $[0, M]$ con $M > 0$. Vediamo l'andamento per $x \to +\infty$.

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, con il cambiamento di variabile $t = -\frac{1}{x}$ otteniamo

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$. Poiché $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge abbiamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$.

4. La successione $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{\log(2+n)}$

(a) ha minimo ma non ha massimo

(b) ha sia massimo che minimo

▶ (c) ha massimo ma non ha minimo

(d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{\log(2+n)}$$

Consideriamo la sottosuccessione estratta di indici pari:

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{\log(2+2n)} = 1 + \frac{1}{\log(2+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$. Dato che $b_n > 1$ $\forall n$, (b_n) ha massimo.

Ora consideriamo la sottosuccessione dispari:

$$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{\log(2+2n+1)} = -1 + \frac{1}{\log(3+2n)}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$. Dato che $c_n > -1$ $\forall n$, (c_n) non ha minimo.

Poiché $b_n > c_n$ $\forall n$, la successione (a_n) ha massimo ma non ha minimo.

5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\log n)^n}{n^{\log n}} =$

(a) 0

(b) e

(c) 1

▶ (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\frac{(\log n)^n}{n^{\log n}} = \frac{e^{n \log\log n}}{e^{\log^2 n}} = e^{n \log\log n - \log^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \log\log n - \log^2 n = \lim_{n\to\infty} n\left(\log\log n - \frac{\log^2 n}{n}\right) =$$

$$= \infty(\infty - 0) = \infty$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^n \, n^{\log n}}{n^n} =$

(a) 1 (b) $\frac{1}{e}$ ▶ (c) 0 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^n \, n^{\log n}}{n^n} = \frac{e^{n\log(\log n)} \, e^{\log^2 n}}{e^{n \log n}} = e^{n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log(\log n) + \log^2 n - n\log n = \lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{\log(\log n)}{\log n} + \frac{\log n}{n} - 1\right) =$$

$$= +\infty(0 + 0 - 1) = -\infty$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0.$$

7. La serie $\sum_n (1+x)^{-n}$ converge se e solo se

(a) $x > 0$ (b) $x \leq 0$
(c) $-1 < x < 1$ ▶ (d) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Soluzione:

Poniamo $a_n = (1+x)^{-n}$ e consideriamo prima la convergenza assoluta con il criterio della radice:

$\sqrt[n]{|a_n|} = |1+x|^{-1}$ quindi se $|1+x|^{-1} < 1$ la serie converge assolutamente pertanto anche semplicemente.

$|1+x|^{-1} < 1 \iff 1 < |1+x| \iff 1+x < -1$ oppure $1+x > 1$

$\iff x < -2$ oppure $x > 0$ quindi $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$.

Se invece $x \in [-2,0]$ risulta $|1+x|^{-1} \geq 1$ quindi

$\lim_{n\to\infty} (1+x)^{-n} \neq 0$ (non esiste oppure vale $+\infty$) e la serie non converge.

8. La serie $\sum_{n\geq 4} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{n}$

(a) diverge negativamente

(b) diverge positivamente

► (c) converge assolutamente

(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{n}$.

Utilizzando lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$, $t \to 0$ con $t = -\frac{4}{n}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo che

$$\sqrt{1-\frac{4}{n}} = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$ quindi

$$a_n = \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} = \frac{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(2+o(1)\right)$$

L'ultima uguaglianza ci garantisce che $a_n > 0$ definitivamente (in realtà $a_n \geq 0 \ \forall\, n \geq 4$). Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}(2+o(1))}{\frac{1}{n^2}} = 2.$$

Dato che $\sum b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\sum a_n$ converge. Poiché $|a_n| = a_n$, la serie converge anche assolutamente.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 + 4y^2 - \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) =$

(a) non esiste   (b) $-\infty$ (c) $\log\frac{\pi}{2}$ ► (d) $+\infty$

Soluzione:

Osserviamo che

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2+\sin(xy)}{3} \leq 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \text{quindi}$$

$$-\log 3 \leq \log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \leq 0$$

Quindi $\quad x^2+4y^2-\log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) \geq x^2+4y^2+0 \geq x^2+y^2 \quad .$

Poiché $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} x^2+y^2 = +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+4y^2-\log\left(\frac{2+\sin(xy)}{3}\right) = +\infty .$$

10. La funzione $f(x,y) = xy(2x+y-2)$

(a) non ha punti stazionari

(b) ha una retta di punti stazionari

► (c) ha 4 punti stazionari

(d) ha 2 punti stazionari

Soluzione:

$f(x,y) = xy(2x+y-2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[2x+y-2+x\cdot 2\right] = y(4x+y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left[2x+y-2+y\cdot 1\right] = x(2x+2y-2)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y(4x+y-2)=0 & \to y=0 \vee 4x+y-2=0 \\ x(2x+2y-2)=0 \end{cases}$$

se $y=0$, dalla seconda equazione $x(2x-2)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1$

quindi abbiamo i punti $(0,0)$ e $(1,0)$.

Se invece $4x+y-2=0 \Rightarrow y=2-4x$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$x(2x+2(2-4x)-2)=0 \iff x(2x+4-8x-2)=0$$

$$\iff x(-6x+2)=0 \iff x=0 \quad \vee \quad x=\frac{1}{3}$$

se $x=0$ da $y=2-4x$ abbiamo $y=2-4\cdot 0=2$ quindi il punto $(0,2)$.

Se $x=\frac{1}{3}$ da $y=2-4x$ abbiamo $y=2-4\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

quindi il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Risultano quindi i punti stazionari

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.