Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica seconda verifica intermedia	codice 454944 04 aprile 2023

1. Sia $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2\,|\log|x||}$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ ► (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\infty$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2|\log|x||}$$

Osserviamo che $f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2\,|\log|-x||} = -\dfrac{x}{1+x^2\,|\log|x||} = -f(x)$

quindi f è dispari. Consideriamo il caso $x>0$

f non è definita per $x=0$ ma, ricordando che $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0$,

otteniamo che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+x^2|\log x|} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

quindi f è limitata in un intorno di $x=0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Per $x \to +\infty$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2\log x}$. Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x\log x}$

e otteniamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot x\log x}{1+x^2\log x} = 1$.

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico

avremo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, quindi anche $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Ne segue che $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\infty$ quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

2. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$

► (a) è limitata inferiormente (b) è limitata superiormente

(c) ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (d) ha un asintoto verticale per $x \to 0^+$

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\, dt \qquad F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}.$$

La funzione $f(t) = \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}$ è continua $\forall t \in (0,+\infty)$

e $f(t) > 0$ $\forall t \in (0,+\infty)$. Ne segue che

$F(x) > 0$ $\forall x \in (0,+\infty)$, quindi F è limitata inferiormente.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3(\log x)^2}\, dx$

(a) diverge positivamente (b) converge ► (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

$f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^3(\log x)^2}$. Osserviamo che $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

quindi $f(x)<0$ se $x \in (1,3)$ e $f(x)>0$ se $x\in(3,+\infty)$. Consideriamo

prima $\int_1^3 f(x)\,dx$. Ricordiamo che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$

Con la sostituzione $1+t = x$ otteniamo $\log x = (x-1) + o(x-1)$ per $x \to 1$

quindi $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x^3\left[(x-1)+o(x-1)\right]^2} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{x^3 (x-1)^{\cancel{2}}(1+o(1))} = \dfrac{x-3}{x^3(x-1)(1+o(1))}$.

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e otteniamo che

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{x^3\cancel{(x-1)}(1+o(1))} = -2$. Poiché $\int_1^3 g(x)\,dx = +\infty$, dal

criterio del confronto asintotico $\int_1^3 f(x)\,dx = -\infty$.

Vediamo ora $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$.

Questa volta scegliamo $h(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ e otteniamo che

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-4x+3)x\cancel{(\log x)^2}}{x^3\cancel{(\log x)^2}} = 1$. Poiché $\int_3^{+\infty} h(x)\,dx$ converge,

dal criterio del confronto asintotico, $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

4. La successione $a_n = \left(\log \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, $n \geq 2$

(a) ha massimo ma non ha minimo

► (b) ha sia massimo che minimo

(c) non è limitata superiormente

(d) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \left(\log \frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad n \geq 2.$$

$$\left(\log\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n} = (-\log n)^{-n} = (-1)^{-n} (\log n)^{-n} = (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$$

Osserviamo che $|a_n| = \frac{1}{(\log n)^n} \to 0$, quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dato che $a_2 = \left(\log \frac{1}{2}\right)^{-2} = (-\log 2)^{-2} = \frac{1}{(\log 2)^2} > 0$

e che $a_3 = \left(\log \frac{1}{3}\right)^{-3} = (-\log 3)^{-3} = \frac{-1}{(\log 3)^3} < 0$,

la successione ha sia massimo che minimo.

5. La successione $a_n = \dfrac{e^n - 2^{n \log n}}{n^n}$ definita per $n \geq 1$

► (a) tende a 0 (b) tende a $+\infty$ (c) tende a $-\infty$ (d) non ha limite

Soluzione:

$$a_n = \frac{e^n - 2^{n \log n}}{n^n}$$

Osserviamo che $2^{n\log n} = e^{n \log n \log 2} = \left(e^{\log n}\right)^{n \log 2} = n^{n \log 2}$, quindi

$$a_n = \frac{e^n - n^{n\log 2}}{n^n} = \frac{e^n}{n^n} - \frac{n^{n \log 2}}{n^n} = \left(\frac{e}{n}\right)^n - n^{n\log 2 - n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n - n^{n(\log 2 - 1)} = 0^{+\infty} - (+\infty)^{-\infty} = 0 - 0 = 0$$

6. La successione $a_n = n \arctan\left(n + (-1)^n n + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$

► (a) è limitata inferiormente ma non superiormente (b) non è limitata né superiormente né inferiormente
(c) ha massimo ma non ha minimo (d) è limitata ma non ha limite

Soluzione:

$a_n = n \operatorname{arctg}\left(n + (-1)^n n + \frac{1}{n}\right)$

Consideriamo la sottosuccessione estratta di indici pari

$b_n = a_{2n} = 2n \operatorname{arctg}\left(2n + (-1)^{2n} 2n + \frac{1}{2n}\right) = 2n \operatorname{arctg}\left(4n + \frac{1}{2n}\right)$

e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$.

quindi (a_n) non è limitata superiormente.

Osserviamo ora che

$n + (-1)^n n + \frac{1}{n} \geq n - n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ e che la funzione arcotangente

è strettamente crescente quindi

$a_n = n \cdot \operatorname{arctg}\left(n + (-1)^n n + \frac{1}{n}\right) \geq n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \geq n \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0$

quindi (a_n) è limitata inferiormente.

7. La serie $\sum_n \frac{2^n \sin(e^n + n!)}{e^n}$

► (a) converge assolutamente

(b) diverge negativamente

(c) diverge positivamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{2^n \sin(e^n + n!)}{e^n}.$$

Poniamo $a_n = \frac{2^n \sin(e^n + n!)}{e^n}$ e osserviamo che (a_n) è

a segno variabile. Consideriamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{2^n}{e^n} |\sin(e^n + n!)| \leq \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Dato che $0 < \frac{2}{e} < 1$, la serie $\sum_n \left(\frac{2}{e}\right)^n$ converge. Dal criterio

del confronto segue che $\sum_n |a_n|$ converge, quindi

$\sum_n a_n$ converge assolutamente.

8. La serie $\sum_n \frac{\cos(n^2)}{n^{3/2}+1}$

(a) è indeterminata

(b) diverge

► (c) converge assolutamente

(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{\cos(n^2)}{n^{3/2}+1}$$ Sia $a_n = \frac{\cos(n^2)}{n^{3/2}+1}$.

(a_n) è a segno variabile.

$$|a_n| = \frac{|\cos(n^2)|}{n^{3/2}+1} \leq \frac{1}{n^{3/2}+1} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, dal criterio del confronto,

$\sum_n |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge assolutamente.

9. La serie $\sum_{n\geq 1} e^{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}} - \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

(a) diverge negativamente

► (b) converge assolutamente

(c) diverge positivamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = e^{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}} + \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Utilizzando lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$, $t \to 0$, otteniamo che

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} = \left(n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)^{1/2} - \left(n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2} - n^{3/2}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{1/2} = n^{3/2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] =$$

$$= n^{3/2}\left(\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n^{3/2}}\left(1+o(1)\right).$$

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1+t+o(t)$, $t \to 0$, abbiamo

$$e^{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}} = e^{\frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))} = 1+\frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$$

Dallo sviluppo di Taylor $\cos(t) = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)$, $t \to 0$, otteniamo

$$\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1+\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]^2\cdot\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ne segue che $a_n = 1+\frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1)) - \left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$ Ne segue che $a_n > 0$ definitivamente.

Utilizziamo il criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ e otteniamo che $\sum a_n$ converge dato che $\sum b_n$ converge e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Dato che $a_n > 0$ definitivamente, la serie converge anche assolutamente.

10. $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{e^{x^3+y^2}}{\arctan(x^2+y^2)} =$

(a) $+\infty$ (b) $\frac{2}{\pi}$ (c) 0 ► (d) non esiste

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{e^{x^3+y^2}}{\operatorname{arctg}(x^2+y^2)}$$

Consideriamo la restrizione di f alla retta $\gamma(t) = (t,1)$

$$\varphi(t) = f(t,1) = \frac{e^{t^3+1}}{\operatorname{arctg}(t^2+1)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \frac{e^{+\infty}}{\operatorname{artg}(+\infty)} = \frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = \frac{e^{-\infty}}{\operatorname{artg}(+\infty)} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

quindi f non ha limite per $(x,y) \to \infty$.

11. Sia $f(x,y,z) = x^3 + z^3 - 2xyz + 5$. Allora $\nabla f(1,0,1) =$

(a) $(1,1,5)$ ► (b) $(3,-2,3)$ (c) $(3,5,3)$ (d) $(0,0,0)$

Soluzione:

$$f(x,y,z) = x^3 + z^3 - 2xyz + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = 3 - 2\cdot 0\cdot 1 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = -2\cdot 1\cdot 1 = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 3\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 = 3$$

$$\nabla f(1,0,1) = (3,-2,3)$$

12. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, sul dominio $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\right\}$

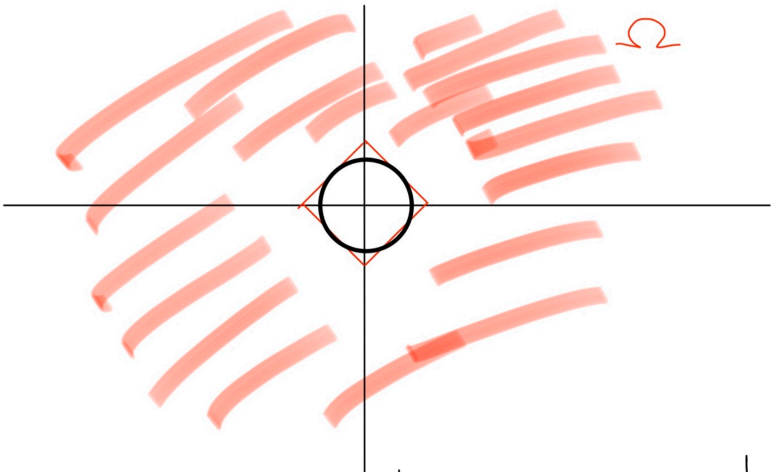
► (a) ha massimo ma non ha minimo (b) ha sia massimo che minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo (d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \geq 1\}.$$

Il dominio Ω è simmetrico rispetto all'asse x e all'asse y, infatti $(x,y) \in \Omega \iff (-x,y) \in \Omega \iff (x,-y) \in \Omega$. Tracciamo Ω nel primo quadrante, quindi consideriamo $x \geq 0, y \geq 0$ e la disequazione diventa $x+y \geq 1 \iff y \geq 1-x$ che rappresenta la parte di piano sopra la retta $y = 1-x$



Il dominio Ω è quindi l'esterno di un quadrato, bordi compresi.
Tracciamo ora le curve di livello di f.

$f(x,y) = \lambda \iff \frac{1}{x^2+y^2} = \lambda \iff x^2+y^2 = \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda > 0$

che rappresenta una circonferenza centrata nell'origine di raggio $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Il raggio della circonferenza diminuisce quando λ aumenta, quindi il massimo di f corrisponderà alla circonferenza più piccola che interseca Ω che è di raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \lambda = 2 = \max(f)$.

La f non ha minimo perché $f(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \Omega$

$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0$ quindi $\inf(f) = 0$ ma f non assume mai il valore 0.