Corso di Laurea in Informatica	**Analisi Matematica** **appello straordinario**	**vecchio regolamento** **13 marzo 2023**

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} |x|(\cos x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) non è continua

(b) ha un punto angoloso

(c) ha un punto di cuspide

► (d) è continua ma non ha derivata

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x| \cos x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \cdot 1 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

quindi f è continua in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| \cos x \sin \frac{1}{x}}{x}$$ e questo limite non esiste,

infatti, se scegliamo $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \cos \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi)}{\frac{1}{n\pi}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} \cdot \cos \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}{\cancel{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}} = \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \cdot 1 =$$

$= \cos 0 = 1$, quindi il limite non esiste. La funzione f non ha derivata in $x=0$.

2. La funzione $f(x) = |x| \sin x$, nel punto $x_0 = 0$

► (a) è derivabile

(b) ha un punto di cuspide

(c) ha un punto angoloso

(d) non è continua

Soluzione:

$$f(x) = |x| \sin x$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sin x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} |x| \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

3. La funzione $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\tan x}{x(1+\tan^2 x)}$

► (a) non ha asintoti (b) ha due asintoti verticali (c) ha un asintoto verticale (d) ha un asintoto obliquo

Soluzione:

$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{tg\, x}{x(1+tg^2 x)}$

Dato che il dominio di f è limitato, f può avere solo asintoti verticali.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{0(1+0)} \qquad \text{indeterminata}$$

$$\frac{tg\, x}{x(1+tg^2 x)} = \frac{x + o(x^2)}{x(1+o(1))} = \frac{x(1+o(x))}{x(1+o(1))} \to 1 \quad \text{per } x \to 0^+$$

quindi non c'è asintoto per $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}(1+\infty)} \qquad \text{indeterminata}$$

$$f(x) = \frac{tg\, x}{x(1+tg^2 x)} = \frac{1}{x\left(\frac{1}{tg x} + tg x\right)} \xrightarrow{\text{per } x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{+\infty} + +\infty\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(0+\infty)} = 0$$

quindi non c'è asintoto neanche per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

f non ha asintoti.

4. La funzione $F(x) = \begin{cases} 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t}\, dt & \text{se } x > 0 \\ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) è derivabile

► (b) ha un punto angoloso

(c) è continua a sinistra ma non a destra

(d) ha un punto di cuspide

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t} & \text{se } x > 0 \\ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

F è chiaramente continua a sinistra in $x=0$. Inoltre, dato che la funzione $f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t} & \text{se } t > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } t = 0 \end{cases}$ è continua in $[0, +\infty)$

otteniamo che f è integrabile secondo Riemann in $[0, +\infty)$, quindi

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1 = 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-0} = F(0)$. Ne segue che F è

continua anche a destra.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che

$F'(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1+x} \quad \forall x > 0$. Dal teorema di de l'Hôpital avremo

che $\lim_{x \to 0^+} F'(x) = \frac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{1+0} = \frac{\pi}{2} = F'_+(0)$.

Invece, se $x < 0$, $F'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

quindi $F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} F'(x) = \arcsin 0 = 0$.

Quindi F ha un punto angoloso in $x=0$.

5. Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{(\sin x)^2} \frac{t}{1+t^4}\, dt$. Allora risulta che

(a) F ha un punto di minimo locale per $x = 1$

(b) F ha un punto di massimo locale per $x = 0$

► (c) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

(d) F ha un punto di massimo locale per $x = 1$

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{\sin^2 x} \frac{t}{1+t^4}\, dt$$

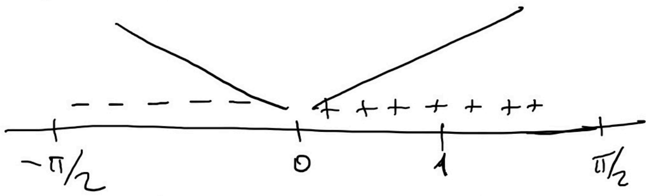
F è derivabile e

$$F'(x) = 2 \sin x \cos x \; \frac{\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \sin(2x) \, \frac{\sin^2 x}{1+\sin^4 x}$$

Dato che $\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^4 x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, il segno di $F'(x)$ è determinato

da quello di $\sin(2x)$.

Se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow F'(x) \leq 0$, se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow F'(x) \geq 0$



$x=0$ è punto di minimo locale per F.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(3x)\, dx =$

(a) $\dfrac{1}{9}$ (b) 3π ▶ (c) $\dfrac{\pi}{3}$ (d) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{9}$

Soluzione:

$\int x \sin(3x)\, dx$ integriamo per parti, integrando $\sin(3x)$ e derivando x

$$\int x \sin(3x)\, dx = x \, \frac{(-\cos(3x))}{3} - \int \frac{1 \cdot (-\cos(3x))}{3}\, dx = -\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\, \frac{\sin(3x)}{3} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x \sin(3x)\, dx = \left[-\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{1}{9}\sin(3x) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-\pi\cos(3\pi)}{3} + \cancel{\frac{1}{9}\sin(3\pi)} - 0 - \cancel{\frac{1}{9}\sin 0} = \frac{-\pi(-1)}{3} = \frac{\pi}{3}$$

7. La successione $a_n = \left(\dfrac{(\cos n)^2 + (-1)^n (\sin n)^2}{\cos(2n)} \right)^2$

(a) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(b) diverge positivamente

(c) è infinitesima

► (d) ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \left(\frac{\cos^2 n + (-1)^n \sin^2 n}{\cos(2n)}\right)^2$$

consideriamo la sottosuccessione di indici pari

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{\cos^2(2n) + \sin^2(2n)}{\cos(4n)}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(4n)} \geq 1$$

e la sottosuccessione di indici dispari

$$c_n = a_{2n+1} = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos(2(2n+1))}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}\right)^2 = 1$$

Quindi $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n = 1$ per tutti gli indici dispari,

ne segue che la successione ha minimo.

8. Sia (a_n) la successione definita da $a_n = n^2 \sin \dfrac{n\pi}{2}$. Allora

► (a) non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(b) (a_n) è limitata inferiormente

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(d) (a_n) è limitata

Soluzione:

$$a_n = n^2 \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Consideriamo la sottosuccessione

$b_n = a_{2n} = 4n^2 \sin(n\pi) = 0$ $\forall n$. Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Consideriamo ora la sottosuccessione

$$c_n = a_{4n+1} = (4n+1)^2 \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = (4n+1)^2 \cdot \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (4n+1)^2 \sin\frac{\pi}{2} = (4n+1)^2$$

quindi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

La successione (a_n) non ha limite.

9. La successione $a_n = e^n\left(\log(e^n+1) - \log(e^n-1)\right)$, definita per $n \geq 1$,

(a) non è limitata inferiormente

► (b) è limitata superiormente

(c) non ha limite ma è limitata

(d) non ha né massimo né minimo

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' - 15y = 0 \\ y(-5) = 3e^{25} + 5e^{-15} \\ y'(-5) = -15e^{25} + 15e^{-15} \end{cases}$ allora $y(2) =$

(a) $40+\frac{3}{32}$ (b) $15e^{-10}(e^4-1)$ ▶ (c) $3e^{-10}+5e^6$ (d) $-75e^{25}+45e^{-15}$

Soluzione:

$$y''+2y'-15y=0$$

L'equazione è lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2+2\lambda-15$. Troviamo le radici:

$$\lambda^2+2\lambda-15=0 \iff \lambda=-1\pm\sqrt{1+15}=-1\pm 4= \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}.$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$y(x)=c_1e^{-5x}+c_2e^{3x}$. Ne segue che $y(-5)=c_1e^{25}+c_2e^{-15}$

Derivando otteniamo

$y'=-5c_1e^{-5x}+3c_2e^{3x}$, quindi $y'(-5)=-5c_1e^{25}+3c_2e^{-15}$.

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} c_1e^{25}+c_2e^{-15}=3e^{25}+5e^{-15} \\ -5c_1e^{25}+3c_2e^{-15}=-15e^{25}+15e^{-15} \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo

$c_2=3e^{40}+5-c_1e^{40}$. Sostituendo nella seconda abbiamo

$$-5c_1e^{25}+3e^{-15}\left(3e^{40}+5-c_1e^{40}\right)=-15e^{25}+15e^{-15}$$

$$-5c_1e^{25}+9e^{25}+\cancel{15e^{-15}}-3c_1e^{25}=-15e^{25}+\cancel{15e^{-15}} \iff$$

$$-8c_1\cancel{e^{25}}=-24\cancel{e^{25}} \iff c_1=3, \text{ quindi}$$

$$c_2=\cancel{3e^{40}}+5-\cancel{3e^{40}}=5.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y=3e^{-5x}+5e^{3x}.$$

Avremo quindi

$$y(2)=3e^{-10}+5e^6.$$

11. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y+3)^3 \\ y(0) = -2. \end{cases}$ Allora $y\left(-\dfrac{3}{2}\right) =$

► (a) $-\dfrac{5}{2}$ (b) -2 (c) $-\dfrac{1}{2}$ (d) $\sqrt{\dfrac{1}{2}} - 3$

12. Sia $y(x)$ una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale $y' = y + e^{3x}$. Allora $\lim_{x \to +\infty} y(x) =$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) dipende dalla soluzione scelta

(c) 0 ► (d) $+\infty$

vecchio regolamento

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica (vecchio regolamento)

Pisa, 13 marzo 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e continua per ogni $x \neq 0$. Verifichiamo la continuità in $x = 0$ da destra (da sinistra è ovvia).

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$$

quindi f è continua in $x = 0$. Vediamo la derivabilità in $x = 0$. Da sinistra avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Da destra

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{t\to +\infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

La funzione è quindi derivabile anche in $x = 0$ (in tutti gli altri punti è ovviamente derivabile) e $f'(0) = 0$. Vediamo gli asintoti.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 0 = 0$$

quindi f ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-1/x^2} = e^{-1/+\infty} = e^0 = 1$$

quindi abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui. Studiamo la monotonia calcolando la derivata. Ovviamente

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x < 0$$

Se invece $x > 0$ avremo

$$f'(x) = e^{-1/x^2}(-(-2)x^{-3}) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} > 0 \qquad \forall x > 0.$$

Ne segue che f è costante in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$. I punti in $(-\infty, 0]$ sono tutti di minimo e la funzione non ha massimo. Inoltre

$$\min(f) = 0, \qquad \sup(f) = 1.$$

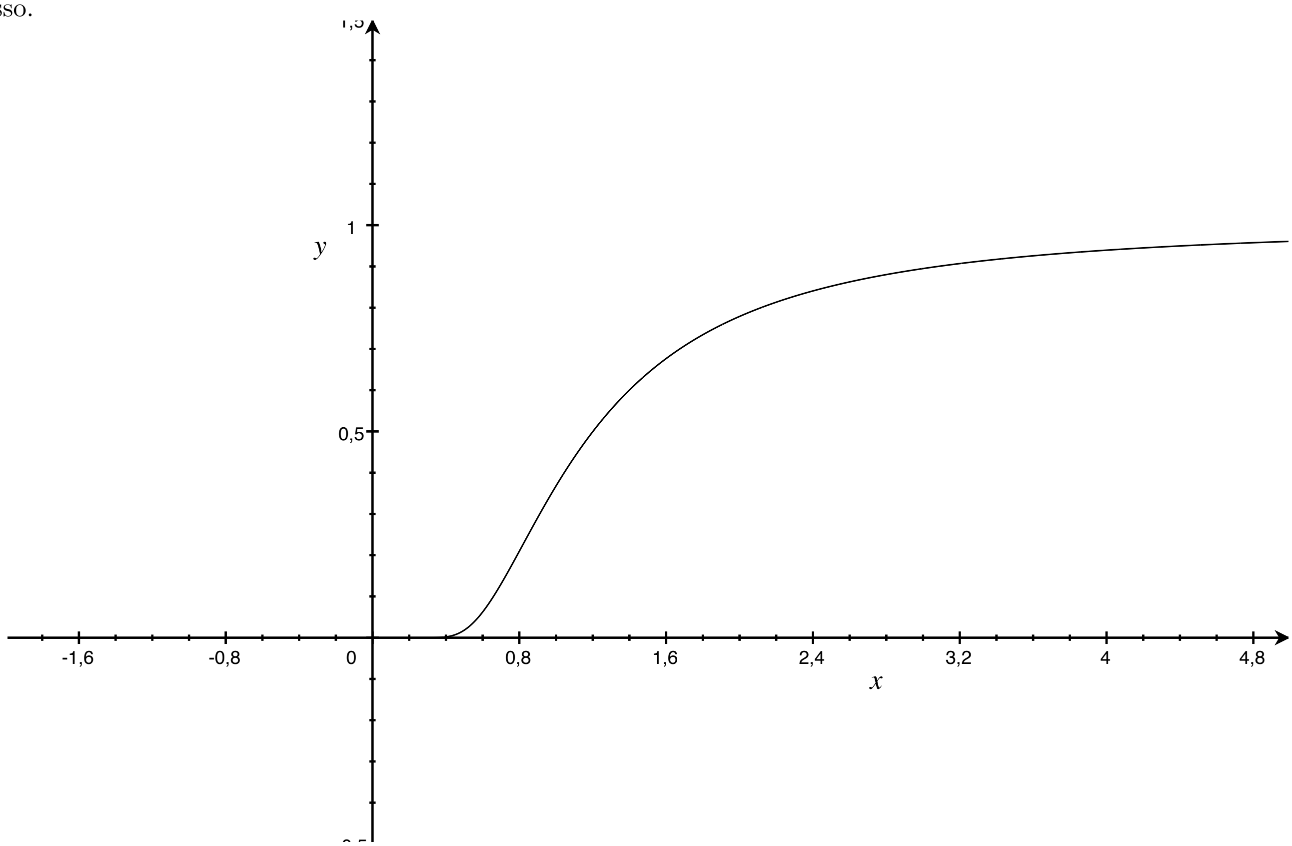
Calcoliamo ora la derivata seconda per vedere la convessità. Se $x < 0$ avremo che $f''(x) = 0$. Se $x > 0$ allora $f'(x) = 2e^{-x^{-2}}(x^{-3})$ quindi

$$f''(x) = 2\left(e^{-x^{-2}}(-(-2)x^{-3}(x^{-3}) + e^{-x^{-2}}(-3)x^{-4}\right) = 2e^{-x^{-2}}\left(2x^{-6} - 3x^{-4}\right) = \frac{2e^{-1/x^2}(2 - 3x^2)}{x^6}.$$

Dato che $e^{-1/x^2} > 0$ e $x^6 > 0$ per ogni $x > 0$, otteniamo che

$$f''(x) > 0 \text{ se } 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad f''(x) < 0 \text{ se } x > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

quindi f è convessa in $\left[0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ e concava in $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$. Dato che f è derivabile in $x=0$ e che f è (debolmente) convessa in $(-\infty,0]$ possiamo anche dire che f è debolmente convessa in $\left(-\infty,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Il punto $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ è punto di flesso.



Esercizio 2 Dire se la successione

$$a_n = (-1)^n \frac{\log\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^{1/n^6}-1}$$

è superiormente o inferiormente limitata.

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^{1/n^6}-1} = \frac{\log 0 - \sin 0}{e^0-1} = \frac{-\infty-0}{0^+} = -\infty$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il denominatore è sempre positivo.

Per la presenza del fattore $(-1)^n$ otteniamo che la sotto successione di indici pari diverge negativamente, mentre quella di indici dispari diverge positivamente. Ne segue che la successione (a_n) non è né superiormente né inferiormente limitata.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \arctan x \, dx.$$

Soluzione

Integriamo per parti derivando $\arctan x$ e integrando x^2:

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

Utilizzando la divisione tra polinomi, otteniamo che

$$x^3 = x(x^2+1) - x$$

quindi

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int x - \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$$

Riunendo tutti i risultati otteniamo

$$\int x^2 \arctan x\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right) + c.$$