Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica appello straordinario	codice 374067 13 marzo 2023

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} |x|(\cos x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) ha un punto di cuspide

► (b) è continua ma non ha derivata

(c) ha un punto angoloso

(d) non è continua

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x| \cos x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \cdot 1 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

quindi f è continua in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cos x \sin \frac{1}{x}}{x}$$ e questo limite non esiste,

infatti, se scegliamo $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ otteniamo che

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \cos \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi)}{\frac{1}{n\pi}} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} \cdot \cos \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}{\cancel{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}} = \lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \cdot 1 =$$

$= \cos 0 = 1$, quindi il limite non esiste. La funzione f non ha derivata in $x = 0$.

2. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} =$

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$

(b) $-\dfrac{e^3}{2}$

(c) 1

► (d) $\dfrac{1}{e^6}$

Soluzione:

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{3x\log\left(1-\frac{2}{x}\right)} = e^{3x\left(-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{3\left(-2+o(1)\right)} \to e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$ con la sostituzione $\frac{1}{x} = t$, $x \to \infty$.

3. La funzione $F(x) = \begin{cases} 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t}\, dt & \text{se } x > 0 \\ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) è continua a sinistra ma non a destra

(b) ha un punto di cuspide

(c) è derivabile

► (d) ha un punto angoloso

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t} & \text{se } x > 0 \\ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

F è chiaramente continua a sinistra in $x=0$. Inoltre, dato che la funzione $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t} & \text{se } t > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } t = 0 \end{cases}$ è continua in $[0, +\infty)$

otteniamo che f è integrabile secondo Riemann in $[0, +\infty)$, quindi

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1 = 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-0} = F(0)$. Ne segue che F è

continua anche a destra.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che

$F'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x}$ $\forall x > 0$. Dal teorema di de l'Hôpital avremo

che $\lim_{x \to 0^+} F'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{1+0} = \dfrac{\pi}{2} = F'_+(0)$.

Invece, se $x < 0$, $F'(x) = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

quindi $F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} F'(x) = \arcsin 0 = 0$.

Quindi F ha un punto angoloso in $x = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_1^x t^2-\sqrt{t}+\frac{1}{t}-\frac{4}{\sqrt[3]{t}}+3\,dt =$

(a) 3 ▶ (b) $-\infty$ (c) $+\infty$ (d) -1

Soluzione:

$$\int t^2-\sqrt{t}+\frac{1}{t}-\frac{4}{\sqrt[3]{t}}+3\,dt = \frac{t^3}{3}-\frac{2}{3}t^{3/2}+\log|t|-4\,\frac{3}{2}\,t^{2/3}+3t+c$$

$$\Longrightarrow \int_1^x t^2-\sqrt{t}+\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{2}{3}t^{3/2}+\log|t|-6\,t^{2/3}+3t\right]_1^x =$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^{3/2}+\log|x|-6x^{2/3}+3x-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+0-6+3\right)\longrightarrow -\infty \quad \text{per } x\to0^+$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x)-\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

(a) non esiste ▶ (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$f(x) = \frac{\log(1+x) - \log x}{\sqrt{x}}$. Risulta che $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo prima $\int_0^1 f(x)dx$.

Consideriamo separatamente $\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$ e $\frac{-\log x}{\sqrt{x}}$

Per $x \to 0$ $\log(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} = \frac{x(1+o(1))}{x^{1/2}} = x^{1/2}(1+o(1))$

quindi $\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$ è integrabile secondo Riemann e $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Per la seconda funzione eseguiamo la sostituzione $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$-\int_0^1 \frac{\log x}{x^{1/2}} dx = -\int_{+\infty}^1 \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^{3/2}} dt$$ che converge

per confronto asintotico con $g(t) = \frac{1}{t^{5/4}}$. Quindi $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x \to \infty$ $f(x) = \frac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x^{1/2}} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{1/2}} = \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}(1+o(1))$

quindi $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge per confronto con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ è definita e continua $\forall x \in [0,+\infty)$. Osserviamo che $0 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$ quindi

$\dfrac{1}{1+\sin^2 x} \geq \dfrac{1}{2}$. Dato che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto, segue che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = +\infty$.

7. La successione $a_n = \left(\dfrac{(\cos n)^2 + (-1)^n (\sin n)^2}{\cos(2n)}\right)^2$

(a) diverge positivamente

► (b) ha minimo

(c) è infinitesima

(d) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \left(\frac{\cos^2 n + (-1)^n \sin^2 n}{\cos(2n)}\right)^2$$

consideriamo la sottosuccessione di indici pari

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{\cos^2(2n) + \sin^2(2n)}{\cos(4n)}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(4n)} \geq 1$$

e la sottosuccessione di indici dispari

$$c_n = a_{2n+1} = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos(2(2n+1))}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}{\cos^2(2n+1) - \sin^2(2n+1)}\right)^2 = 1$$

Quindi $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n = 1$ per tutti gli indici dispari, ne segue che la successione ha minimo.

8. La sucessione $a_n = \log(n^2) - \log^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(a) non ha limite

(b) è limitata

► (c) è definitivamente strettamente decrescente e $\inf(a_n) = -\infty$

(d) è definitivamente strettamente crescente e $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

$$a_n = \log(n^2) - \log^2\left(\frac{1}{n}\right) = 2\log n - (-\log n)^2 = 2\log n - \log^2 n = \log n\,(2 - \log n)$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Se consideriamo la funzione $f(x) = 2\log x - \log^2 x$ otteniamo che

$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\log x}{x} = \frac{2(1-\log x)}{x}$. Ne segue che $f'(x) < 0$ se $x > e$

e f è strettamente decrescente per $x > e$. Ne segue che

$a_n = f(n)$ è definitivamente strettamente decrescente.

9. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{(-1)^n} + n^{(-1)^{n+1}}}$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) converge assolutamente

(c) diverge negativamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{1}{n^{(-1)^n} + n^{(-1)^{n+1}}}$ e osserviamo che

$$n^{(-1)^n} + n^{(-1)^{n+1}} = \begin{cases} n + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n} + n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi $a_n = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2+1} > 0 \quad \forall n \geq 1$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n}$ otteniamo che

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$, quindi, per il criterio del

confronto asintotico, $\sum_n a_n$ diverge positivamente, come $\sum_n b_n$.

10. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}(-1)^n$

► (a) converge assolutamente

(b) diverge positivamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \dfrac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} (-1)^n$

Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$, $e^t = 1 + t + o(t)$, $t \to 0$ con la sostituzione $t = \frac{1}{n}$

otteniamo

$$|a_n| = \left| \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{1 - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}\left(-1 + o(1)\right)} \right| = \frac{1}{n^2} \left| \frac{\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{-1 + o(1)} \right|$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}$, quindi, per

il criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\sum |a_n|$ converge,

quindi $\sum a_n$ converge assolutamente.

11. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y^2(y + x - 1)$ è costituito da

(a) due punti (b) una retta (c) l'insieme vuoto ► (d) due rette e un punto

Soluzione:

$$f(x,y) = x^2y^2(y+x-1)$$

$$f_x = y^2\left(2x(y+x-1)+x^2\right) = y^2x\left(2(y+x-1)+x\right) = y^2x(3x+2y-2)$$

$$f_y = x^2\left(2y(y+x-1)+y^2\right) = x^2y\left(2(y+x-1)+y\right) = x^2y\ (2x+3y-2)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y^2x(3x+2y-2) = 0 \\ x^2y(2x+3y-2) = 0 \end{cases}.$$

La prima equazione ha come soluzioni $y=0 \vee x=0 \vee 3x+2y-2=0$.

Se $y=0$ anche la seconda equazione è risolta, quindi la retta $y=0$ è una retta di punti stazionari.

Lo stesso succede alla retta $x=0$.

Se $3x+2y-2=0$ allora $2y = 2-3x \iff y = \frac{2-3x}{2}$.

Possiamo dividere la seconda equazione per x^2y perché i casi $x=0$ oppure $y=0$ sono già stati considerati. Quindi resta $2x+3y-2=0$.

Sostituiamo la y ottenuta dalla prima equazione ottenendo:

$$2x+3\,\frac{2-3x}{2}-2=0 \iff 4x+6-9x-4=0 \iff 2=5x \iff x=\frac{2}{5}.$$

Sostituendo nell'equazione $y=\frac{2-3x}{2}$ abbiamo $y = \frac{2-3\cdot\frac{2}{5}}{2} = \frac{2-\frac{6}{5}}{2} =$

$= \frac{2}{5}$. Quindi $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ è punto stazionario.

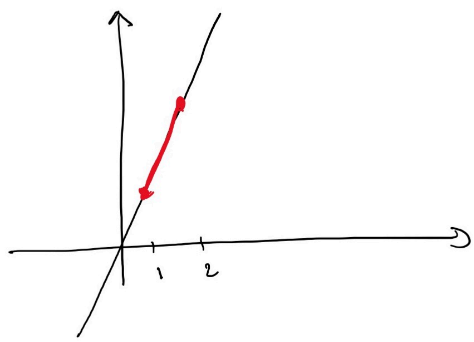
L'insieme dei punti stazionari è formato da due rette e un punto.

12. Il minimo della funzione $f(x,y) = e^{\frac{x^4+y^2}{x^2y}}$ sul dominio $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, 1 \le x \le 2\right\}$ vale

(a) $e^{\frac{5}{2}}$ (b) $\frac{1}{e}$ (c) $e^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ ► (d) e^2

Soluzione:

Il dominio Ω è un segmento di retta, estremi inclusi che è un insieme limitato e chiuso.



f è continua, quindi ha max e min su Ω.

Possiamo parametrizzare Ω in questo modo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

e considerare f composta con la parametrizzazione

$$g(t) = f(t, 2t) = e^{\frac{t^4 + 4t^2}{t^2 \cdot 2t}} = e^{\frac{t^2(t^2+4)}{2t^3}} = e^{\frac{t^2+4}{2t}}$$

$$g'(t) = e^{\frac{t^2+4}{2t}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot t - (t^2+4)}{t^2} = \frac{e^{\frac{t^2+4}{2t}}}{2} \cdot \frac{2t^2 - t^2 - 4}{t^2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2+4}{2t}}}{2} \cdot \frac{t^2-4}{t^2}$$

$$g'(t) \geq 0 \iff t^2 - 4 \geq 0 \iff t \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

ne segue che nell'intervallo $1 \leq t \leq 2$, $g'(t) \leq 0$.

La funzione g è quindi decrescente e $\max(g) = g(1) = e^{\frac{5}{2}}$

$$\min(g) = g(2) = e^{\frac{8}{4}} = e^2$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 13 marzo 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e continua per ogni $x \neq 0$. Verifichiamo la continuità in $x = 0$ da destra (da sinistra è ovvia).

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$$

quindi f è continua in $x = 0$. Vediamo la derivabilità in $x = 0$. Da sinistra avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Da destra

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

La funzione è quindi derivabile anche in $x = 0$ (in tutti gli altri punti è ovviamente derivabile) e $f'(0) = 0$. Vediamo gli asintoti.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$$

quindi f ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-1/x^2} = e^{-1/+\infty} = e^0 = 1$$

quindi abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui. Studiamo la monotonia calcolando la derivata. Ovviamente

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x < 0$$

Se invece $x > 0$ avremo

$$f'(x) = e^{-1/x^2}(-(-2)x^{-3}) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} > 0 \qquad \forall x > 0.$$

Ne segue che f è costante in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$. I punti in $(-\infty, 0]$ sono tutti di minimo e la funzione non ha massimo. Inoltre

$$\min(f) = 0, \qquad \sup(f) = 1.$$

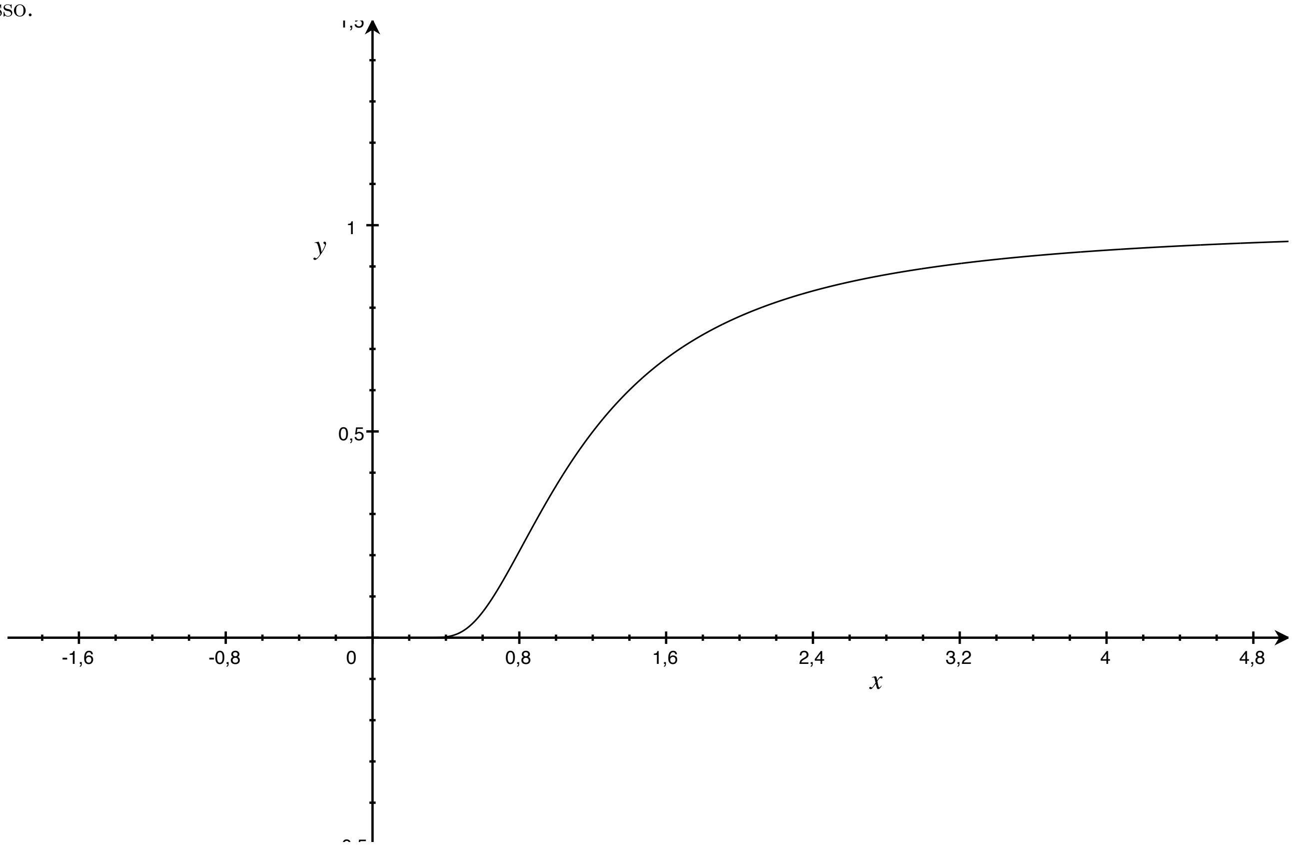
Calcoliamo ora la derivata seconda per vedere la convessità. Se $x < 0$ avremo che $f''(x) = 0$. Se $x > 0$ allora $f'(x) = 2e^{-x^{-2}}(x^{-3})$ quindi

$$f''(x) = 2\left(e^{-x^{-2}}(-(-2)x^{-3}(x^{-3}) + e^{-x^{-2}}(-3)x^{-4}\right) = 2e^{-x^{-2}}\left(2x^{-6} - 3x^{-4}\right) = \frac{2e^{-1/x^2}(2 - 3x^2)}{x^6}.$$

Dato che $e^{-1/x^2} > 0$ e $x^6 > 0$ per ogni $x > 0$, otteniamo che

$$f''(x) > 0 \text{ se } 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad f''(x) < 0 \text{ se } x > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

quindi f è convessa in $\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ e concava in $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$. Dato che f è derivabile in $x = 0$ e che f è (debolmente) convessa in $(-\infty, 0]$ possiamo anche dire che f è debolmente convessa in $\left(-\infty, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Il punto $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ è punto di flesso.



Esercizio 2 Dire se la successione

$$a_n = (-1)^n \frac{\log\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^{1/n^6} - 1}$$

è superiormente o inferiormente limitata.

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^{1/n^6} - 1} = \frac{\log 0 - \sin 0}{e^0 - 1} = \frac{-\infty - 0}{0^+} = -\infty$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il denominatore è sempre positivo.

Per la presenza del fattore $(-1)^n$ otteniamo che la sotto successione di indici pari diverge negativamente, mentre quella di indici dispari diverge positivamente. Ne segue che la successione (a_n) non è né superiormente né inferiormente limitata.

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{3/2})}{x^3 + \log(1+x^2)}\, dx.$$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ ha denominatore positivo ma numeratore di segno variabile. Dividiamo l'intervallo di integrazione in $x = 1$. Per $x \in (0, 1]$ abbiamo che anche il numeratore è positivo, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0$ avremo che

$$\sin(x^{3/2}) = x^{3/2} + o(x^3), \qquad \log(1 + x^2) = x^2 + o(x^2)$$

quindi

$$f(x) = \frac{x^{3/2}\left(1 + o(x^{3/2})\right)}{x^3 + x^2 + o(x^2)} = \frac{x^{3/2}\left(1 + o(x^{3/2})\right)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{x^{3/2}\left(1 + o(x^{3/2})\right)}{x^2(1 + o(1)} = \frac{1}{x^{1/2}}(1 + o(1)).$$

Utilizzando come funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$, dato che $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e che $\int_0^1 g(x)\, dx$ converge, otteniamo che anche $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge.

Se invece $x \in [1, +\infty)$ la funzione ha segno variabile, quindi utilizzeremo la convergenza assoluta.

$$|f(x)| = \frac{\left|\sin(x^{3/2})\right|}{x^3 + \log(1 + x^2)} \leq \frac{1}{x^3 + \log(1 + x^2)} \leq \frac{1}{x^3}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ converge, per il criterio del confronto, anche $\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, quindi per il criterio di convergenza assoluta, $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Unendo i due risultati otteniamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.