Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica prima verifica intermedia	codice 140421 24 gennaio 2023

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \log\left(e^{(x^2)} - 1\right)$

(a) è iniettiva ma non surgettiva

(b) è surgettiva ma non iniettiva

► (c) non è né iniettiva né surgettiva

(d) è bigettiva

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R} \qquad f(x)=x^2\log\left(e^{x^2}-1\right).$

per $x\to 0^+$ $\quad x^2\log(e^{x^2}-1)=x^2\log\left(\cancel{1}+x^2+o(x^2)\cancel{-1}\right)=$

$=x^2\log\left(x^2(1+o(1))\right)=x^2\left(\log(x^2)+\log(1+o(1))\right)=$

$=x^2\cdot 2\log x+x^2\log(1+o(1))\to 0+0=0$

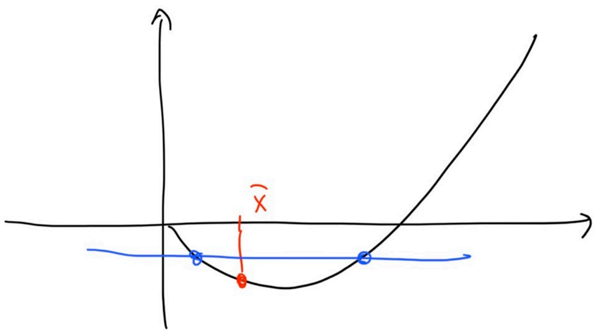
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

$f(x)\le 0 \iff x^2\log(e^{x^2}-1)\le 0 \iff \log(e^{x^2}-1)\le 0$

$\iff e^{x^2}-1\le 1 \iff e^{x^2}\le 2 \iff x^2\le\log 2$

quindi se $0<x\le\sqrt{\log 2}\Rightarrow f(x)\le 0$. Dato che f è continua, per il teorema di Weierstrass generalizzato, f ha minimo. Ne segue che f non è surgettiva.

Dato che $\exists\,\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x})<0$ $\left(\text{ad esempio } \bar{x}=\frac{\sqrt{\log 2}}{2}\right)$ per il teorema dei valori intermedi, f non è iniettiva



2. La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+1}$

(a) è limitata superiormente ma non ha massimo

► (b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2+1}$

f è continua, useremo il teorema di Weierstrass generalizzato.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$

vediamo se ha soluzione $f(x) \geq 2$

$\frac{2x^2-3x}{x^2+1} \geq 2 \iff 2x^2 - 3x \geq 2(x^2+1) \iff \cancel{2x^2} - 3x \geq \cancel{2x^2} + 2 \iff -\frac{2}{3} \geq x$

ha soluzione quindi f ha max

$f(x) \leq 2 \iff x \geq -\frac{2}{3}$ ha soluzione quindi f ha minimo.

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x-\sin x)}{x^5} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) ha un punto angoloso (b) ha un punto di cuspide (c) non è continua ► (d) è derivabile

Soluzione:

Verifichiamo la derivabilità in x=0 calcolando il rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x} \frac{1-\cos(x-\sin x)}{x^5} = \frac{1-\cos\left(x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\right)}{x^6} =$$

$$= \frac{1-\cos\left(\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)}{x^6} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3\right)\right)}{x^6}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{36} + o(x^7)}{x^6} \to \frac{1}{72} \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi f è derivabile in $x=0$ e $f'(0) = \frac{1}{72}$.

4. La funzione $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x + \cos^2 x$

(a) non ha punti né di massimo né di minimo locale

► (b) ha 2 punti di massimo locale e 3 punti di minimo locale

(c) ha un solo punto di massimo locale e due di minimo locale

(d) ha 2 punti di massimo locale e 2 di minimo locale

Soluzione:

$$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x + \cos^2 x$$

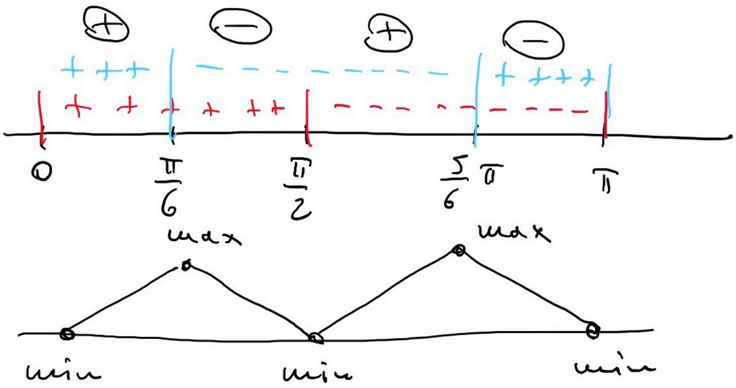
$$f'(x) = \cos x - 2\cos x \sin x = \cos x\,(1 - 2\sin x)$$

$$f'(x) > 0 \iff \cos x\,(1-2\sin x) > 0$$

$$\cos x > 0 \iff x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - 2\sin x > 0 \iff 2\sin x < 1 \iff \sin x < \tfrac{1}{2} \iff x \in \left(0, \tfrac{\pi}{6}\right) \cup \left(\tfrac{5}{6}\pi, \pi\right)$$

segno di f'



f ha 3 punti di minimo locale e 2 di massimo locale

5. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |\arctan x|^{-\cos x}$

(a) non è limitata né superiormente né inferiormente

(b) è limitata

► (c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x) = |\mathrm{arctg}\, x|^{-\cos x} = e^{-\cos x \log|\mathrm{arctg}\, x|}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^{-1 \cdot \log(0^+)} = e^{+\infty} = +\infty$$

quindi f non è limitata superiormente.

Osserviamo ora che $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, quindi f è limitata inferiormente.

6. La funzione $f(x) = e^{2x}(5 - 2x)$

(a) è limitata inferiormente

(b) è convessa in $\mathbb{R}$

(c) ha un asintoto verticale

► (d) è limitata superiormente

Soluzione:

$f(x) = e^{2x}(5-2x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty}(5-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty}(5+\infty) = 0(+\infty)$ forma indeterminata

con il cambiamento di variabile $t = -x$ otteniamo

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x}(5-2x) = \lim_{t \to +\infty} e^{-2t}(5+2t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{5+2t}{e^{2t}} = 0$

per gerarchia di infiniti.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato (f è continua in $\mathbb{R}$) otteniamo che f è limitata superiormente.

7. La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x - 1|\sqrt{x}$

(a) ha un solo punto di minimo locale e nessun punto di massimo locale

(b) non ha né punti di massimo né punti di minimo locale

(c) ha esattamente due punti di massimo locale e un solo punto di minimo locale

► (d) ha esattamente due punti di minimo locale e un punto di massimo locale

Soluzione:

$f(x) = |x-1|\sqrt{x}$

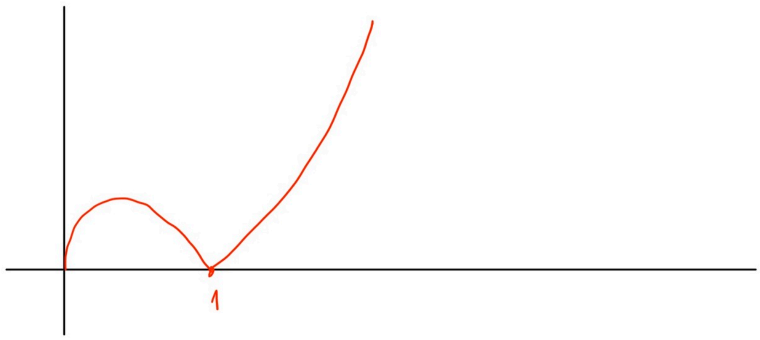
Osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ e che $f(0) = f(1) = 0$.

Da questo otteniamo che $\min(f) = 0$ e che $x=0$ e $x=1$ sono punti di minimo, quindi anche di minimo locale.

Questo basta a rispondere al quesito, in quanto una sola risposta soddisfa questa condizione.

In ogni caso, considerando f sull'intervallo $[0,1]$ e osservando che $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$ otteniamo che f ha un punto di massimo interno a $(0,1)$ che quindi diventa punto di massimo locale se considero f in tutto il dominio $[0,+\infty)$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente



8. L'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

(a) non ha soluzione ► (b) ha una sola soluzione (c) ha 3 soluzioni (d) ha 2 soluzioni

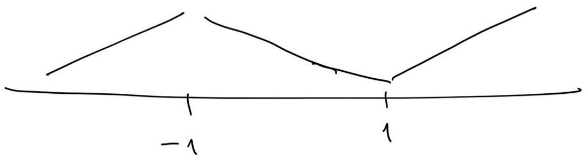
Soluzione:

$f(x) = x^3 - 3x + 5$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

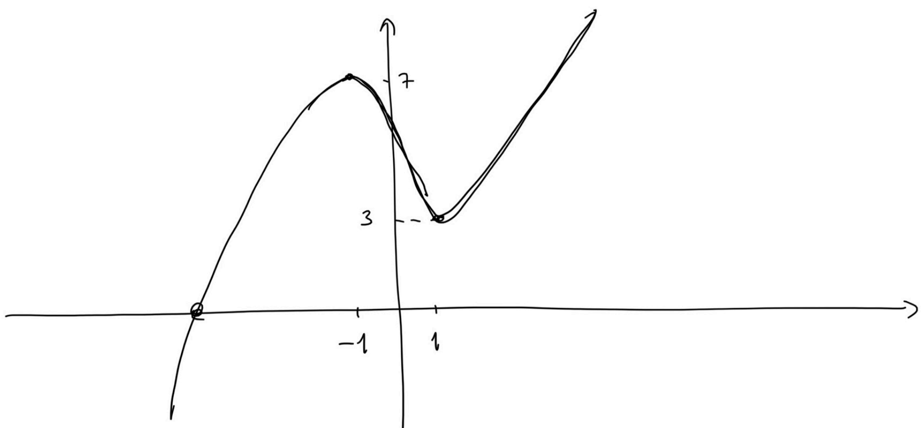
Dato che f è continua, il teorema dei valori intermedi ci garantisce che l'equazione $f(x)=0$ ha almeno una soluzione.

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $f'(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



monotonia di f

$f(-1) = -1+3+5 = 7 > 0$, $f(1) = 1-3+5 = 3 > 0$



quindi $f(x)=0$ ha una sola soluzione.

9. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} |x \log |x|| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

► (a) ha un punto di cuspide e due punti angolosi

(b) ha un punto di flesso a tangente verticale

(c) ha due punti di discontinuità

(d) è derivabile in ogni punto

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x \log|x|| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$f(-x) = |(-x)\log|-x|| = |x \log|x|| = f(x)$ quindi f è pari.

Studiamo f per $x \geq 0$, quindi avremo

$$f(x) = x\,|\log x| = \begin{cases} -x \log x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x \log x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Valutiamo la derivabilità a destra in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x \log x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} -\log x = +\infty.$$

Allora $f'_+(0) = +\infty$. Per simmetria $f'_-(0) = -\infty$, quindi $x = 0$ è punto di cuspide. (f è continua in $x = 0$ perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x\log x = 0 = f(0)$ e per simmetria $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$).

Dato che f è continua in $x = 1$ (prodotto di funzioni continue) avremo che

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{d}{dx}(-x \log x) = \lim_{x \to 1^-} -(\log x + 1) = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{d}{dx}(x \log x) = \lim_{x \to 1^+} \log x + 1 = 1$$

quindi $x = 1$ è punto angoloso. Per simmetria anche $x = -1$ è punto angoloso.

10. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t \, dt$

(a) non ha né massimo né minimo | (b) ha massimo ma non ha minimo

► (c) ha minimo ma non ha massimo | (d) ha sia massimo che minimo

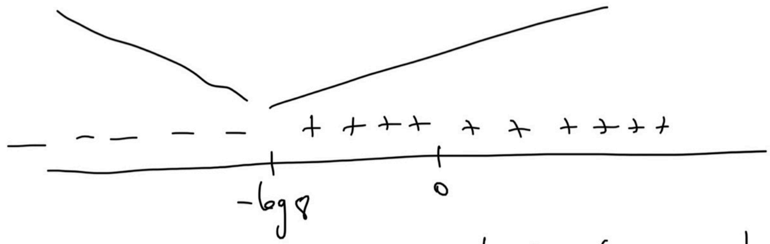
Soluzione:

$$F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t \, dt$$

$$F'(x) = \log^2(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} - \log^2 e^x \cdot e^x = (2x)^2 \cdot 2e^{2x} - x^2 \cdot e^x =$$

$$= 8x^2 e^{2x} - x^2 e^x = x^2 e^x (8e^x - 1)$$

$$F'(x) > 0 \iff 8e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{8} \iff x > \log\left(\frac{1}{8}\right) = -\log 8$$



$F'(-\log 8) = 0$

$F'(0) = 0$

F è strettamente decrescente in $(-\infty, -\log 8]$ e strettamente crescente in $[-\log 8, 0]$ e in $[0, +\infty)$, quindi strettamente crescente in $[-\log 8, 0)$. Ne segue che $x = -\log 8$ è punto di minimo per F. F non ha massimo.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x}{(\cos(x^2))^2}\, dx =$

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\dfrac{\log \pi}{2}$ (c) $\dfrac{\pi}{4}$ ► (d) $\dfrac{1}{2}$

Soluzione:

$$\int \frac{x}{(\cos(x^2))^2}\,dx =$$

eseguiamo la sostituzione

$x^2 = t \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad \frac{dt}{2} = x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\,tg\,t + c = \frac{1}{2}\,tg(x^2) + c$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x}{(\cos(x^2))^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,tg\,(x^2)\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{2}\left(tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,0\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx =$

(a) $\frac{1}{20}$ (b) $\frac{1}{400}$ ► (c) $\frac{5}{9}\log\frac{4}{5}$ (d) $\frac{7}{9}\log\frac{7}{2}$

Soluzione:

$$\int \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-x-20}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1-5}{x^2-x-20}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-20}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-20} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|x^2-x-20\right| + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-5)(x+4)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|x^2-x-20\right| + \frac{5}{2}\,\frac{1}{5-(-4)}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|x^2-x-20\right| + \frac{5}{18}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right| + c$$

$$\int_0^1 \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\log\left|x^2-x-20\right| + \frac{5}{18}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\log|-20|} + \frac{5}{18}\log\left|\frac{-4}{5}\right| \cancel{+\frac{1}{2}\log|-20|} - \frac{5}{18}\log\left|-\frac{5}{4}\right| =$$

$$= \frac{5}{18}\log\frac{4}{5} - \frac{5}{18}\log\frac{5}{4} = \frac{5}{9}\log\frac{4}{5}.$$