| | | |
|---|---|---|
| **Corso di Laurea in Informatica** | **Analisi Matematica** | **codice 316555**<br>**10 gennaio 2023** |

**1.** Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^3)}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\log(\cos x)}{1 - e^x + \sin x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) non è continua né a destra né a sinistra

(b) è continua

(c) è continua a sinistra ma non a destra

► (d) è continua a destra ma non a sinistra

*Soluzione*:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} x + o(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

quindi $f$ non è continua a sinistra in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{1-e^x+\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+x+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+o\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+\cancel{x}+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1 = f(0)$$

quindi $f$ è continua a destra in $x=0$.

**2.** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)}$

(a) ha massimo

► (b) ha minimo

(c) ha infiniti asintoti verticali

(d) non è limitata superiormente

*Soluzione*:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^4+1}\right)}$

$f(-x) = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{(-x)^4+1}\right)} = f(x)$

quindi $f$ è pari.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\infty+1}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to -\infty} f(x)$ poiché $f$ è pari

$f(0) = \sqrt{\operatorname{arctg} 1} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

quindi, per il teorema di Weierstrass generalizzato, $f$ ha minimo.

**3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \frac{1}{4}}\, dx =$

(a) $\dfrac{24\sqrt{\pi^2-6}}{4\pi^2+6}$ (b) $\sqrt{3}-4$ (c) $-4$ ► (d) $\dfrac{\pi}{2}$

*Soluzione*:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \frac{1}{4}}\, dx =$$

$\boxed{\text{integriamo con la sostituzione } \sin x = t,\ \frac{dt}{dx} = \cos x \quad dt = \cos x\, dx}$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}} = 2 \operatorname{arctg}(2t) = 2 \operatorname{arctg}(2 \sin x)$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \frac{1}{4}}\, dx = \Big[2 \operatorname{arctg}(2 \sin x)\Big]_0^{\pi/6} = 2 \operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{\pi}{6}\right) - 0 =$$

$$= 2 \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\, \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**4.** Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^3 t \cos^2 t\, dt$. Allora

(a) $F$ non è continua in $x = 0$ (b) $F(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

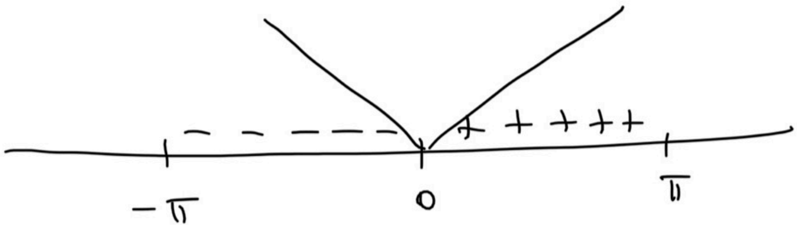
► (c) $F$ ha un punto di minimo locale per $x = 0$ (d) $F$ è crescente in $\mathbb{R}$

*Soluzione*:

$$F(x) = \int_0^x \sin^3 t \cos^2 t \, dt$$

$$F'(x) = \sin^3 x \cos^2 x$$

$$F'(x) \geq 0 \iff \sin^3 x \geq 0 \iff \sin x \geq 0$$




il punto $x=0$ è di minimo locale per $F$.

**5.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{|x|^{\frac{5}{2}}}\, dx$

(a) converge a un valore strettamente positivo

► (b) non esiste

(c) converge a 0

(d) diverge positivamente

*Soluzione*:

Poniamo $f(x) = \frac{\sin x}{|x|^{5/2}}$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione in quattro parti:

$(-\infty, +\infty) = (-\infty, -1] \cup [-1, 0) \cup (0, 1] \cup [1, +\infty)$.

Osserviamo che $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{|-x|^{5/2}} = -\frac{\sin x}{|x|^{5/2}} = -f(x)$

quindi $f$ è dispari.

Per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$ quindi $f(x) = \frac{x + o(x^2)}{x^{5/2}} = \frac{1 + o(x)}{x^{3/2}}$

Consideriamo ora $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e otteniamo che

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ (poiché $\frac{3}{2} \geq 1$),

per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

Per simmetria $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\infty$

Ne segue che nella somma di 4 integrali

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

è presente almeno una somma indeterminata $+\infty - \infty$

quindi l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

**6.** $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\log x}$

(a) vale $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}$ (b) diverge positivamente (c) diverge negativamente (d) non esiste

*Soluzione*:

$$f(x) = \frac{1}{\log x} \qquad x \in [\tfrac{1}{2}, 1).$$

f ha segno costante. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{se } t \to 0.$$

Con la sostituzione $t = x-1$ otteniamo

$$\log x = x - 1 + o(x-1) \quad \text{per } x \to 1$$

Quindi $f(x) = \dfrac{1}{x-1+o(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} \quad \dfrac{1}{1+o(1)}$.

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ottenendo

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$ Dato che

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x-1}\,dx = -\infty$$ otteniamo, applicando il criterio del confronto asintotico, che

$$\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = -\infty.$$

**7.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)^n - n^{n+1}}{n^n} =$

(a) $e$ (b) $0$ ► (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

*Soluzione*:

$$\frac{n(n+1)^n - n^{n+1}}{n^n} = n\,\frac{(n+1)^n - n^n}{n^n} = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1\right) =$$

$$= n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right) \longrightarrow +\infty\,(e-1) = +\infty$$

**8.** La successione $a_n = \dfrac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n}$, definita per $n \geq 1$,

(a) tende a 0 (b) tende a $+\infty$ (c) non ha limite ► (d) tende a $-\infty$

*Soluzione*:

$$\frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} = \frac{3^n - e^{n\log n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n - \left(e^{\log n}\right)^{n\log 3}}{n^n} =$$

$$= \frac{3^n - n^{n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - \frac{n^{n\log 3}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - n^{n\log 3 - n} =$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)^n - n^{n(\log 3 - 1)} \longrightarrow 0 - n^{\infty} = -\infty .$$

**9.** La serie $\sum_{n\geq 1} n^{\left((\cos\frac{2}{n})-1\right)n^2}$

► (a) converge assolutamente
(b) diverge positivamente
(c) converge semplicemente ma non assolutamente
(d) diverge negativamente

*Soluzione*:

La serie è a termini positivi.

Per $n \to \infty$ $\left(\cos\frac{2}{n}-1\right)n^2 = \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)n^2 =$

$= \left(-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)n^2 = -2+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Poniamo $a_n = n^{\left(\left(\cos\frac{2}{n}\right)-1\right)n^2}$ e scegliamo $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{-2+o\left(\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n^2}} = n^{-2+o\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot n^2 = n^{o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{o\left(\frac{1}{n}\right)\cdot \log n} \to e^0 = 1$$

per $n \to \infty$

Dato che $\sum b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum a_n$ converge. Dato che $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$ $\sum a_n$ converge anche assolutamente.

**10.** La serie $\sum_{n\geq 4} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{n}$

(a) diverge negativamente

(b) converge semplicemente ma non assolutamente

(c) diverge positivamente

► (d) converge assolutamente

*Soluzione*:

Poniamo $a_n = \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{n}$.

Utilizzando lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = -\frac{4}{n}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo che

$$\sqrt{1-\frac{4}{n}} = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ quindi}$$

$$a_n = \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} = \frac{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(2+o(1)\right)$$

L'ultima uguaglianza ci garantisce che $a_n > 0$ definitivamente (in realtà $a_n \geq 0$ $\forall\, n\geq 4$). Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}(2+o(1))}{\frac{1}{n^2}} = 2.$$

Dato che $\sum b_n$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\sum a_n$ converge. Poiché $|a_n| = a_n$, la serie converge anche assolutamente.

**11.** Si consideri la curva $\gamma(t) = \left(e^{t^2}+1, \arctan\frac{t}{2}\right)$. A quali delle seguenti rette è perpendicolare la retta tangente a $\gamma$ tracciata nel punto $\gamma(2)$?

► (a) $y = -16e^4x+7$

(b) $y = \frac{\pi}{4(e^4+1)}x+2$

(c) $y = 4e^4x+1$

(d) $y = \frac{1}{4}x-1$

*Soluzione*:

$$\gamma(t) = \left(e^{t^2}+1, \operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right).$$

Calcoliamo la velocità della curva

$$\dot\gamma(t) = \left(2te^{t^2}, \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(2te^{t^2}, \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)\cdot 2}\right) = \left(2te^{t^2}, \frac{2}{4+t^2}\right)$$

Nel punto corrispondente a $t=2$ avremo

$$\dot\gamma(2) = \left(2\cdot 2\, e^{2^2}, \frac{2}{4+2^2}\right) = \left(4e^4, \frac{1}{4}\right).$$

Un vettore perpendicolare a $\dot\gamma(2)$ è il vettore $\vec v = \left(-\frac{1}{4}, 4e^4\right)$

Il coefficiente angolare di una retta che ha $\vec v$ come vettore direzione è $\dfrac{4e^4}{-\frac{1}{4}} = -16e^4.$

Ne segue che la retta perpendicolare cercata ha equazione $y = -16e^4x+7.$

**12.** L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\arctan(xy)| \leq 1\}$

► (a) non è limitato

(b) è aperto

(c) non è chiuso

(d) ha complementare limitato

*Soluzione*:

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |\operatorname{arctg}(xy)| \leq 1\}.$$

Osserviamo che se $x=0 \Rightarrow |\operatorname{arctg}(xy)| = |\operatorname{arctg} 0| = 0 \leq 1$ quindi $A$ contiene l'asse $y$, pertanto $A$ non è limitato.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica

Pisa, 10 gennaio 2023

**Esercizio 1** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

## Soluzione

Data la presenza del logaritmo, dobbiamo imporre la condizione di esistenza $|x| > 0$ che equivale a $x \neq 0$. Inoltre, la funzione è definita laddove non si annulla il suo denominatore, ovvero per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq \pm e$. Il dominio della funzione risulta quindi essere $(-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio in quanto composizione e quoziente di funzioni derivabili nel loro dominio. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Notiamo che la funzione è pari perchè soddisfa $f(-x) = f(x)$. Possiamo quindi limitare lo studio della funzione agli $x > 0$ e concludere poi per simmetria nel caso $x < 0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0^+ \frac{1}{-\infty} = 0^-,$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{e}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

Le rette $x = \pm e$ sono asintoti verticali. Non esistono invece asintoti orizzontali. Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui. Calcoliamo in primo luogo il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log(x) - 1} = +\infty \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

Il risultato ottenuto esclude l'esistenza di asintoti obliqui. Dai limiti deduciamo che $\sup(f) = +\infty$ e $\inf(f) = -\infty$ e quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluti. Il Teorema di Weierstrass generalizzato applicato all'intervallo $(e, +\infty)$ ci garantisce l'esistenza di un punto di minimo locale in questo intervallo. Per individuare questo punto di minimo locale e trovare eventuali altri punti di massimo e minimo locali studiamo la derivata prima. Possiamo calcolare, per $x > 0$,

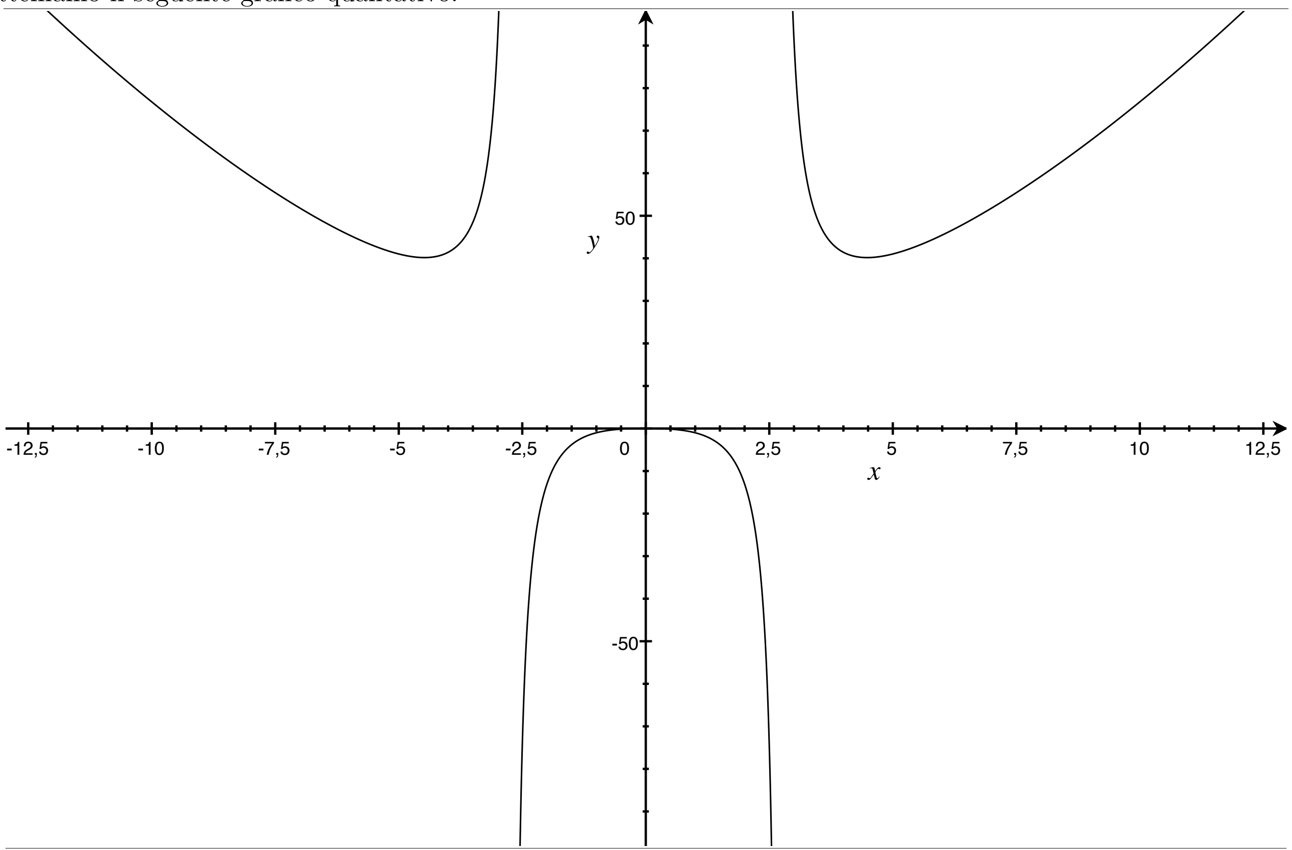
$$f'(x) = \frac{x(2\log(x) - 3)}{(\log(x) - 1)^2}$$

e notiamo che il denominatore risulta sempre positivo nel dominio della funzione. Il segno della derivata prima dipende dal segno del suo numeratore. Poiché stiamo studiando la funzione per $x > 0$, avremo che $f'(x) > 0$ se e solo se $2\log(x) - 3 > 0$. Concludiamo quindi che $f'(x) < 0$ per $0 < x < e$ e per $e < x < e^{3/2}$, intervalli in cui la funzione risulta strettamente decrescente, mentre $f'(x) > 0$ per $x > e^{3/2}$, dove la funzione risulta strettamente crescente. Ne segue che il punto $x = e^{3/2}$ è il punto di minimo locale la cui esistenza era garantita dal Teorema di Weierstrass generalizzato e non esistono altri punti di minimo o massimo locale. Per studiare la convessità della funzione, ne calcoliamo la derivata seconda usando le regole di derivazione; per $x > 0$ otteniamo

$$f''(x) = \frac{2\log^2(x) - 7\log(x) + 7}{(\log(x) - 1)^3}.$$

Notiamo che il numeratore non si annulla mai ed in particolare è sempre positivo (basta usare la sostituzione $t = \log(x)$ e accorgersi che $2t^2 - 7t + 7 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$), quindi il segno della derivata seconda dipende solo dal suo denominatore.

Abbiamo allora $f''(x) > 0$ per $e < x < +\infty$ e la funzione risulta convessa su questo intervallo, mentre $f''(x) < 0$ per $0 < x < e$, intervallo dove la funzione è concava. Non ci sono punti di flesso. Per simmetria concludiamo per gli $x < 0$ e otteniamo il seguente grafico qualitativo.




**Esercizio 2** Calcolare

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx.$$

**Soluzione**

Scriviamo l'integranda come $1 \cdot \log(x^2+1)$ e usiamo integrazione per parti, integrando 1 e derivando $\log(x^2+1)$. Troviamo

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \log(x^2+1)\,dx &= x\log(x^2+1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
&= x\log(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\
&= x\log(x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx \\
&= x\log(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + C
\end{aligned}$$

Segue

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx = \Big[x\log(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)\Big]_0^1 = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

**Esercizio 3** Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

**Soluzione**

Usiamo il criterio del rapporto, con $a_n = \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}$. Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{e^n (n!)^2} = \frac{e(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

(dove abbiamo usato $((n+1)!)^2 = ((n+1)(n)!)^2 = (n+1)^2 (n!)^2$ e $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$).
Ora,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{en^2 + 2en + e}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{e}{4} < 1,$$

dunque la serie converge.