Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 720906 13 dicembre 2022

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 2| < 3\}$ è

(a) superiormente ma non inferiormente limitato

(b) inferiormente ma non superiormente limitato

(c) né inferiormente né superiormente limitato

► (d) limitato

Soluzione:

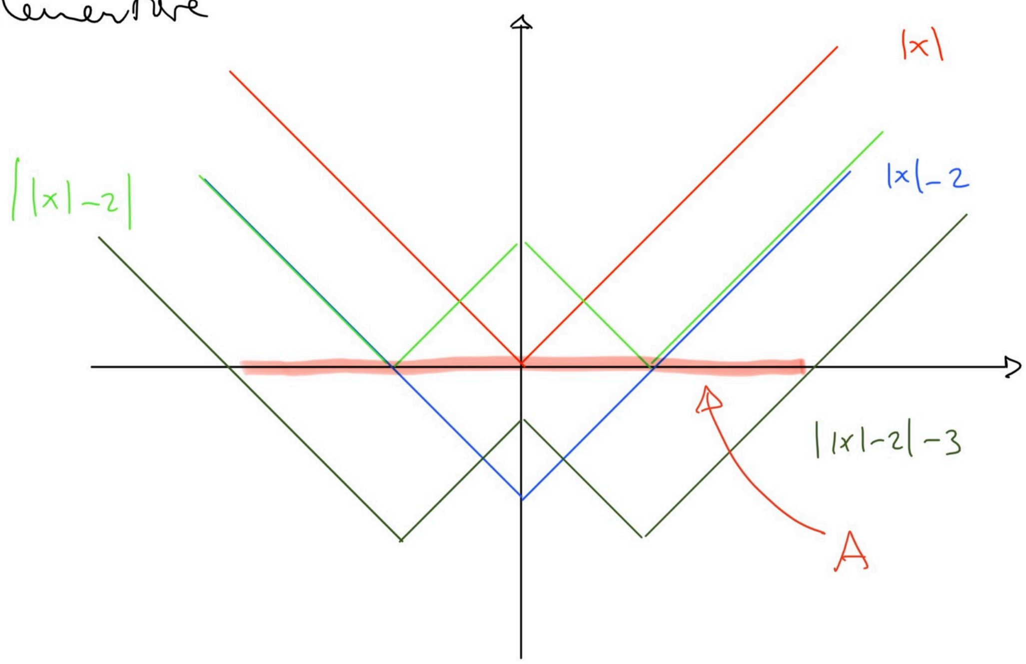
Sia $f(x) = ||x|-2|-3$, quindi $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ||+\infty|-2|-3 = +\infty - 3 = +\infty$

e che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (f è pari), ne segue che

$f(x) > 0$ sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $-\infty$. Come conseguenza otteniamo che A è limitato.

Senza uso dei limiti, il grafico di f si ottiene per via elementare



2. La funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, nel suo insieme di definizione

(a) è debolmente crescente

(b) ha massimo ma non ha minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

► (d) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Soluzione:

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

f è definita $\forall x \neq 0$, inoltre $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

quindi $\inf(f) = 0$ ma non esiste nessun $x \neq 0$ t.c. $f(x) = 0$ $\Rightarrow$ f non ha minimo.

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2)\, dx =$

(a) $\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{72}$

(b) $\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

► (c) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\sin\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} + \sqrt{3}\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} - \sqrt{3}\right)$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$$x^2 = t \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad \frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \int x^2 \cos(x^2)\, x\,dx = \int t \cos t \,\frac{dt}{2}$$

ora integriamo per parti derivando t e integrando $\cos t$

$$= \frac{1}{2}\left(t \sin t - \int 1 \cdot \sin t \,dt \right] = \frac{1}{2}\left(t \sin t + \cos t\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)\right) + c$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo che

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - 0 - \cos 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx =$

► (a) $e^3 + e - 2$ (b) $e^3 - \frac{1}{e}$ (c) 0 (d) $e^3 - e$

Soluzione:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx = \int_{-2}^{-1} e^{-x-1}\,dx + \int_{-1}^{2} e^{x+1}\,dx = \left[-e^{-x-1}\right]_{-2}^{-1} + \left[e^{x+1}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\left(e^{1-1} - e^{2-1}\right) + \left(e^{2+1} - e^{-1+1}\right) = -(1-e) + e^3 - 1 =$$

$$= e^3 + e - 2$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_2^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t} =$

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) $\frac{7}{2}$ ► (d) 2

Soluzione:

Poniamo $F(x)=\int_2^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$. Risulta che

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t} = +\infty. \quad \text{Infatti,}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}+\sin t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = 1,$$ quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico tenendo conto che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

Poniamo ora $g(x)= x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Dato che $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ abbiamo che $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Proviamo ad applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$F'(x)= 3x^2 \frac{1}{\sqrt{x^3}+\sin(x^3)} = \frac{3x^2}{x^{3/2}+\sin(x^3)}$$

$$g'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^{3/2}+\sin(x^3)}}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3}x^2\cdot 2}{\cancel{3}x^{1/2}(x^{3/2}+\sin(x^3))} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{3/2}}{x^{3/2}+\sin(x^3)} = 2.$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 2.$

6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

(a) converge (b) diverge negativamente ▶ (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$.

Osserviamo che $\cos x \geq 0$ se $x \in [0, \pi/2]$ quindi $f(x) \geq 0$ in un intorno destro di 0.

Poniamo ora $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Risulta che

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche

$$\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty.$$

Se invece $x \in [1, +\infty)$ consideriamo la convergenza assoluta. Dato che

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e che $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx$ converge, dal criterio del confronto otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente, quindi converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

7. La successione $a_n = \dfrac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n}, \quad n \geq 2$

▶ (a) ha minimo (b) non è limitata inferiormente

(c) ha massimo (d) è debolmente decrescente

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n}.$$

Dato che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 2$, possiamo applicare il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n} \right)^{1/n} = \frac{(\log n)^n}{\log(n^n)} = \frac{(\log n)^n}{n \log n}$$

Poniamo $b_n = \frac{(\log n)^n}{n \log n}$ e applichiamo il criterio della radice a b_n ottenendo

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\log n}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\log n}} \longrightarrow \frac{+\infty}{1 \cdot 1} = +\infty > 1$$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

quindi la successione (a_n) ha minimo.

8. La successione $a_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{2n^2 + n + 3}$

(a) tende a $\dfrac{1}{2}$

(b) è debolmente crescente

► (c) tende a 0

(d) non ha limite

Soluzione:

$$a_n = \frac{n + \sin(n^2)}{2n^2 + n + 3} = \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{\sin(n^2)}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2n + 1 + \frac{3}{n}\right)} \longrightarrow \frac{1 + \frac{\text{limitata}}{\infty}}{+\infty + 1 + 0} = \frac{1+0}{+\infty} = 0$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n(1 + \log^2 n)}$

(a) diverge positivamente

(b) è indeterminata

► (c) converge assolutamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n(1+\log^2 n)}$ e osserviamo che la serie è a termini di segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{|(\sin n)^n|}{|n(1+\log^2 n)|} \leq \frac{1}{n(1+\log^2 n)} \leq \frac{1}{n\log^2 n} \quad \forall\, n \geq 2$$

Sia ora $b_n = \frac{1}{n \log^2 n}$. Ricordiamo che $\sum b_n$ converge perché è una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ con $\alpha = 1$ e $\beta = 2 > 1$.

Quindi, per il criterio del confronto $\sum a_n$ converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt[n]{e^2} + \frac{2}{\sqrt[n]{e}} - 3\right)$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) diverge negativamente

(c) diverge positivamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \left(\sqrt[n]{e^2} + \frac{2}{\sqrt[n]{e}} - 3 \right)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$
$$t = \frac{2}{n} \quad , \quad t = -\frac{1}{n} .$$

$$a_n = e^{\frac{2}{n}} + 2e^{-\frac{1}{n}} - 3 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3 =$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{2}{n^2} + \cancel{2} - \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2} \cancel{-3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{3}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{3}{n^2}} = 1 \Rightarrow a_n \sim b_n$$

$\sum b_n = \sum \frac{3}{n^2}$ converge (armonica di potenza 2).

$\Rightarrow \sum a_n$ converge (anche assolutamente perché $a_n \geq 0$).

11. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$, nel suo insieme di definizione

(a) è limitata

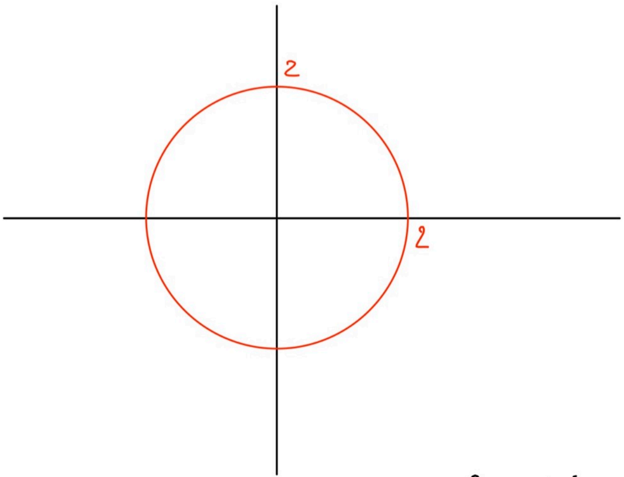
► (b) non è limitata né superiormente né inferiormente

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

La funzione è definita in tutti i punti (x,y) t.c. $x^2+y^2 \neq 4$, quindi in tutto $\mathbb{R}^2$ privato della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2



Consideriamo la restrizione di f all'asse x

$$g(x) = f(x,0) = \frac{1}{x^2-4}$$

e osserviamo che

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente limitata.

12. Dati $A,B \subset \mathbb{R}^3$ non limitati, risulta che

(a) $A \cap B$ non è mai limitato

► (b) $A \cup B$ non è mai limitato

(c) $A \cup B$ è sempre limitato

(d) $A \cap B$ è sempre limitato

Soluzione:

Se $A \cup B$ fosse limitato allora esisterebbe $R > 0$ t.c.

$(A \cup B) \subset B_R(0)$ (palla di centro l'origine e raggio R).

Allora $A \subset (A \cup B) \subset B_R(0)$ e anche A sarebbe limitato, contrariamente alle ipotesi.

Quindi $A \cup B$ non è mai limitato.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 13 dicembre 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x^3((\log x) - 1)$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, la funzione è definita sulla semiretta $(0, +\infty)$. La funzione è derivabile, e quindi continua, su tutto il suo dominio in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. La funzione si annulla per $x = e$, risulta negativa per $x \in (0, e)$ e positiva per $x > e$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} x^3((\log x) - 1) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2((\log x) - 1) = +\infty,$$

da cui deduciamo che non esistono nè asintoti verticali nè orizzontali. Inoltre la funzione risulta inferiormente limitata, ma $\sup(f) = +\infty$. Applicando il Teorema di Weierstrass generalizzato, dato che f assume anche valori negativi, possiamo concludere che f ammette minimo assoluto. Abbiamo inoltre che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3((\log x) - 1)}{x} = +\infty$$

e quindi non esistono nemmeno asintoti obliqui.

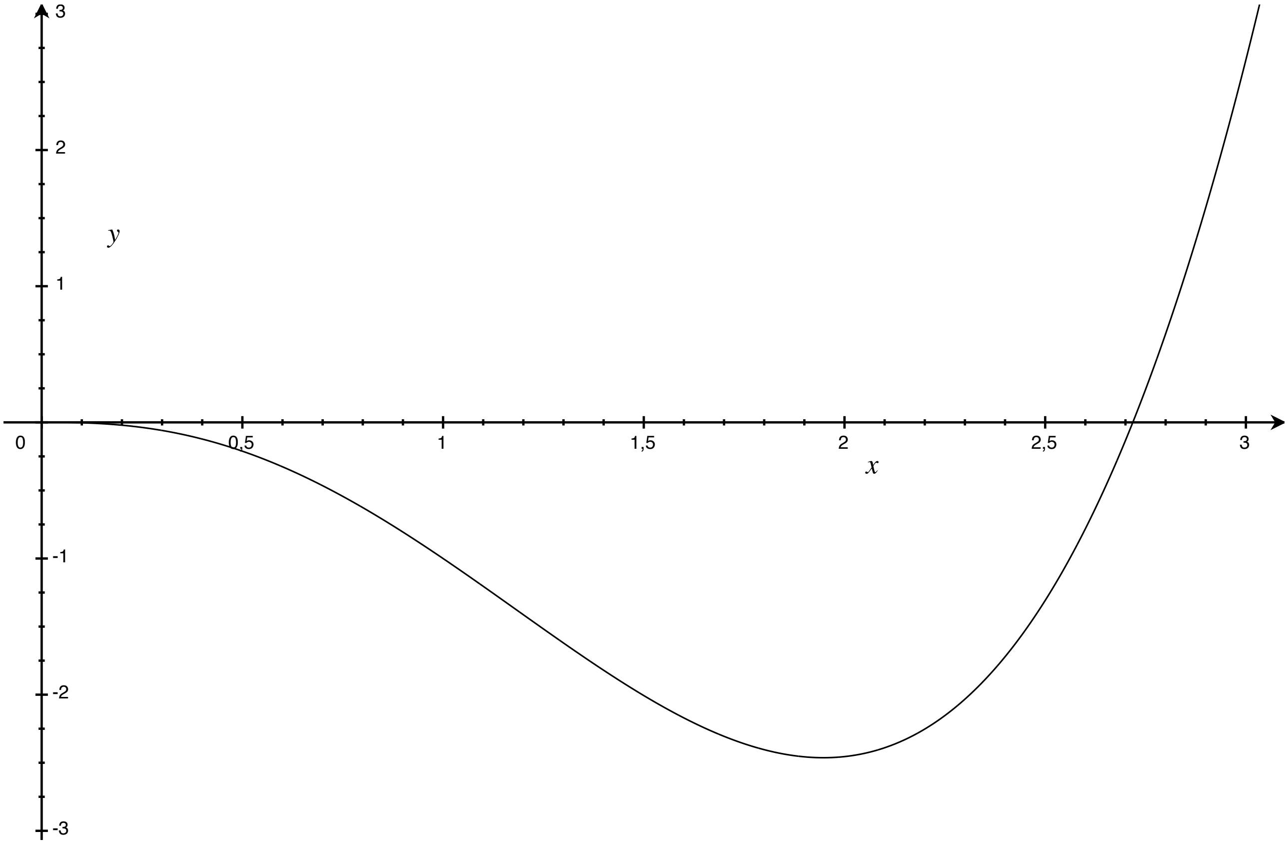
Calcoliamo la derivata prima con la regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$f'(x) = 3x^2((\log x) - 1) + x^3 \left(\frac{1}{x}\right) = x^2(3(\log x) - 2).$$

Per la ricerca di punti di minimo, studiamo il segno della derivata prima. Si ha $f'(x) > 0$ per $x > e^{\frac{2}{3}}$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < e^{\frac{2}{3}}$ con $f'(e^{\frac{2}{3}}) = 0$. La funzione risulta strettamente decrescente per $0 < x < e^{\frac{2}{3}}$ e strettamente crescente per $x > e^{\frac{2}{3}}$. Ne segue che il punto $x = e^{\frac{2}{3}}$ è l'unico punto di minimo locale ed è quindi il punto di minimo assoluto. Per studiare la convessità della funzione, ne calcoliamo la derivata seconda con calcoli analoghi a quelli utilizzati per il calcolo della derivata prima. Abbiamo

$$f''(x) = x(6(\log x) - 1).$$

Poichè $x > 0$ in tutto il dominio, il segno della derivata seconda dipende dal segno di $(6(\log x) - 1)$, ovvero $f''(x) = 0$ per $x = e^{\frac{1}{6}}$ con $f''(x) > 0$ per $x > e^{\frac{1}{6}}$ e $f''(x) < 0$ per $0 < x < e^{\frac{1}{6}}$. Il punto $x = e^{\frac{1}{6}}$ è un punto di flesso e la funzione è strettamente concava se $0 < x < e^{\frac{1}{6}}$, mentre è strettamente convessa se $x > e^{\frac{1}{6}}$.



Esercizio 2 Sia

$$F(x) = \frac{1}{x^2 - x} \int_x^{x^2} \arctan t \, dt.$$

Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Soluzione

Osserviamo che $F(x)$ non è definita per $x = 1$. La funzione integranda è continua, quindi possiamo applicare il teorema della media integrale e trovare un punto $z(z)$ compreso tra x e x^2 tale che

$$F(x) = \arctan(z(x)).$$

Se $x \to 0^+$ possiamo considerare $x < 1$ quindi $x^2 \le z(x) \le x$. Ne segue che $\lim\limits_{x\to 0^+} z(x) = 0$. Eseguendo la sostituzione $y = z(x)$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(z(x)) = \lim_{y\to 0} \arctan y = 0.$$

Allo stesso modo, per $x \to +\infty$, possiamo trovare $z(x)$, con $x \le z(x) \le x^2$ (qui stiamo supponendo $x > 1$) tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(z(x)) = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Vediamo anche una soluzione alternativa.

Calcoliamo esplicitamente l'integrale eseguendo prima l'integrale indefinito per parti

$$\int \arctan t \, dt = \int 1 \cdot \arctan t \, dt = t \arctan t - \int t \frac{1}{1+t^2} \, dt = t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c.$$

Quindi

$$\int_x^{x^2} \arctan t \, dt = \left[t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_x^{x^2} = x^2 \arctan(x^2) - \frac{1}{2} \log(1+x^4) - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \arctan(x^2) - \frac{1}{2}\log(1+x^4) - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^2+o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^4+o(x^4)\right) - x\left(x+o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+o(x^2)\right)}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x(x-1)} = 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \arctan(x^2) - \frac{1}{2}\log(1+x^4) - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(\arctan(x^2) - \frac{\log(1+x^4)}{2x^2} - \frac{\arctan x}{x} + \frac{\log(1+x^2)}{2x^2}\right)}{x^2(1-\frac{1}{x})} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 3 Data la successione

$$a_n = \frac{e^n}{n!}(\sin n)^n, \ \ n \geq 1$$

determinare se è superiormente o inferiormente limitata e se ha massimo o minimo. Studiare inoltre la convergenza, semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n.$$

Soluzione

Mostriamo che $|a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$, da cui segue che anche $a_n \to 0$. Visto che $|(\sin n)^n| \leq 1$ abbiamo $0 < |a_n| \leq \frac{e^n}{n!}$ e la successione $\frac{e^n}{n!}$ tende a 0, dunque per confronto tende a 0 anche $|a_n|$.

Da questo segue che a_n è sia superiormente che inferiormente limitata. Inoltre a_n ha massimo perché esiste un n per cui $a_n > 0$ (ad esempio $n = 1$, dato che $\sin 1 > 0$), e ha anche minimo perché esiste un n per cui $a_n < 0$ (ad esempio $n = 5$, dato che $(\sin 5)^5 < 0$).

Per quanto riguarda la serie, usando di nuovo la stima $|a_n| \leq \frac{e^n}{n!}$, e il fatto che la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n!}$ converge (per il criterio del rapporto, visto che $\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}$ tende a 0), per confronto concludiamo che la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ è assolutamente convergente. Dal criterio dell'assoluta convergenza segue che converge anche semplicemente.