Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 877398 24 ottobre 2022

1. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$ è

(a) $y = -\frac{2}{\pi}x$ (b) $y = -\frac{2}{\pi}x - \frac{1}{\pi^2}$ (c) $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi^2}$ ► (d) $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi^2}$

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\cos\pi = -\frac{1}{\pi^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\cos\pi + \cancel{\sin\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

Retta tangente

$$y = f\left(\frac{1}{\pi}\right) + f'\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(x - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{1}{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi^2}$$

2. La funzione $f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x + \cos^4 x$

(a) è limitata ma non ha né massimo né minimo (b) ha minimo ma non ha massimo

(c) ha massimo ma non ha minimo ► (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x + \cos^4 x$$

La funzione è continua e il dominio è limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo.

3. $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt =$

(a) non esiste (b) $\frac{1}{e}$ (c) $+\infty$ ► (d) 2

Soluzione:

Cerchiamo una primitiva di $e^{-\sqrt{t}}$ con la sostituzione $y=\sqrt{t}$. Avremo $y^2=t$ $(t\geq 0)$ e $\frac{dt}{dy}=2y$ quindi $dt=2y\,dy$.

$$\int e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int e^{-y}\,2y\,dy = 2\int e^{-y}y\,dy.$$

Eseguiamo l'integrazione per parti integrando e^{-y} e derivando y.

$$\int e^{-y}y\,dy = -e^{-y}y - \int -e^{-y}\cdot 1\,dy = -ye^{-y} + \int e^{-y}\,dy =$$

$$= -ye^{-y} - e^{-y} + c = -e^{-y}(y+1) + c$$

$$\Rightarrow \int e^{-\sqrt{t}}\,dt = -2e^{-y}(y+1) + c = -2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t}+1) + c$$

Quindi, dal teorema di Torricelli

$$\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \Big[-2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t}+1)\Big]_0^x = -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to\infty} -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + 2 =$$

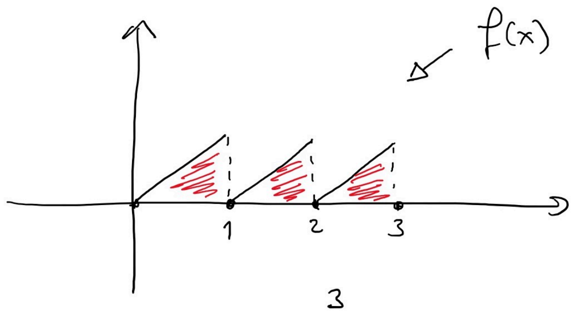
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(\sqrt{x}+1)}{e^{\sqrt{x}}} + 2 = 0 + 2 = 2.$$

4. Indicando con $[x]$ la parte intera di x, risulta che $\displaystyle\int_0^3 x - [x]\, dx =$

(a) 0 ► (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{9}{4}$ (d) 3

Soluzione:

$f(x) = x - [x]$



L'integrale cercato è l'area del sottografico che è somma dell'area dei tre triangoli, ognuno di area $\frac{1}{2}$. Quindi $\displaystyle\int_0^3 x - [x]\, dx = \frac{3}{2}$.

In alternativa

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ x-2 & \text{se } 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x-1\,dx + \int_2^3 x-2\,dx = \int_0^3 x\,dx - \int_1^2 1\,dx - \int_2^3 2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 - 1 - 2 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|-1}\, dx$

(a) converge ► (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|-1}\, dx$$

Osserviamo che $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|-1}$ è una funzione pari,

consideriamo quindi solo $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x-1}\, dx$

Osserviamo anche che

$f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in [0,1)$ quindi l'integrale converge o diverge negativamente.

Poniamo ora $g(x) = \frac{1}{x-1}$ e osserviamo che

$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$. Applicando il criterio del confronto asintotico otteniamo che $\int_0^1 f(x)dx$ diverge negativamente, dato che

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\, dx = -\infty .$$

6. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\arctan\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

► (a) f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty,0]$

(b) f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$

(d) f è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

f è dispari e $f(x) = \sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x} > 0 \quad \forall\, x > 0.$

Se $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x^{1/2}}\left(1 + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ otteniamo che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = +\infty$, dal confronto asintotico abbiamo che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Essendo $f(x) > 0$, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Per simmetria

$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\infty$ quindi f non è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$.

7. La successione $a_n = \dfrac{(-1)^{(3^n)}}{n} + 3^{((-1)^n)}$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha sia massimo che minimo

► (c) ha minimo ma non ha massimo

(d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \frac{(-1)^{(3^n)}}{n} + 3^{((-1)^n)}$$

osserviamo che 3^n è sempre dispari, quindi

$$a_n = \frac{-1}{n} + 3^{((-1)^n)}$$

Consideriamo ora la sottosuccessione estratta di indici pari

$$b_n = a_{2n} = \frac{-1}{2n} + 3$$

b_n è crescente e $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$, quindi $\sup_n (b_n) = 3$

e $b_n < 3 \quad \forall n$.

Consideriamo ora la sottosuccessione estratta di indici dispari

$$c_n = a_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} + 3^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}.$$

Anche c_n è crescente e $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$, quindi $\sup (c_n) = \frac{1}{3}$

e $c_n < \frac{1}{3} \quad \forall n$.

Ne segue che $a_n < 3 \quad \forall n$, $\sup(a_n) = 3$ quindi (a_n) non ha massimo.

Inoltre $c_0 = a_1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ è il minimo di (c_n) perché (c_n) è crescente, ma è anche il minimo di (a_n) perché

$$b_n \geq b_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > -\frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a_n) quindi ha minimo ma non ha massimo.

8. La successione $a_n = 5n - \sin(4n) + \cos(n^2)$

► (a) è strettamente crescente (b) non ha limite (c) converge (d) ha massimo

Soluzione:

$$a_n = 5n - \sin(4n) + \cos(n^2)$$

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - \sin(4(n+1)) + \cos((n+1)^2) - 5n + \sin(4n) - \cos(n^2)$$

$$= 5 - \sin(4n+4) + \cos((n+1)^2) + \sin(4n) - \cos(n^2) \geq 5 - 4 = 1 > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $a_{n+1} > a_n$

e la successione è strettamente crescente.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(4\cos\frac{1}{n}\right)}{n}$

(a) converge assolutamente

(b) converge ma non converge assolutamente

► (c) diverge negativamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(4\cos\frac{1}{n}\right)}{n}$$

poniamo $a_n = \dfrac{\sin\left(4\cos\frac{1}{n}\right)}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(4\cos\tfrac{1}{n}\right) = \sin(4\cdot\cos 0) = \sin(4\cdot 1) = \sin(4) < 0$$

poiché $\pi < 4 < 2\pi$.

Scegliendo $b_n = \dfrac{1}{n}$ e applicando il criterio del confronto asintotico abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sin(4), \quad \sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$$

quindi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = -\infty$.

10. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è

► (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $+\infty$

Soluzione:

La serie è una serie geometrica di ragione $\frac{2}{5}$, quindi convergente. Ricordiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} - 1 =$$

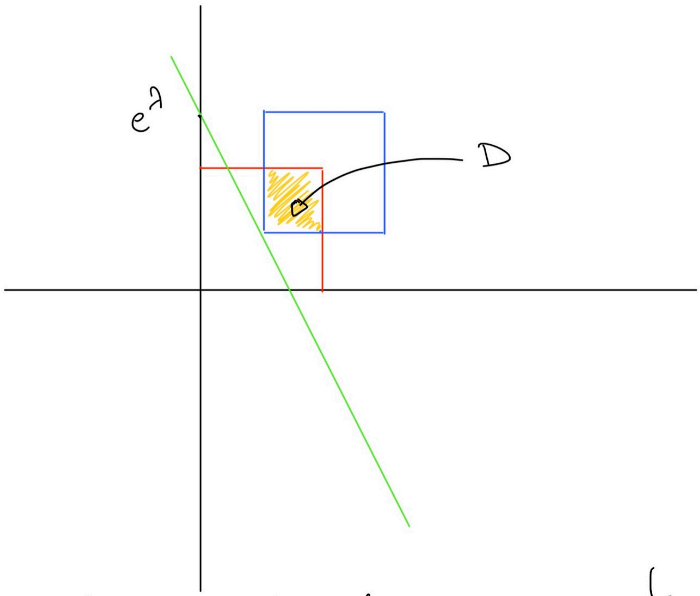
$$= \frac{1}{\frac{3}{5}} - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

11. Il minimo della funzione $f(x,y) = \log(y + 2x)$ sul dominio
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},\, \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$ vale

(a) $\log 2$ (b) $\log 5 - \log 2$ (c) $\log 3$ ► (d) $\log 3 - \log 2$

Soluzione:

Il dominio è l'intersezione di due quadrati



Le curve di livello della funzione sono le soluzioni dell'equazione

$\log(y+2x)=\lambda$ cioè $y+2x=e^\lambda \iff y=-2x+e^\lambda$

quindi sono rette di pendenza -2.

Il minimo della funzione corrisponde al λ più piccolo tra le curve di livello che intersecano il dominio, quindi alla retta che passa per il vertice $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ del quadrato D.

Quindi $\min(f) = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2$.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$ sono

(a) un solo punto ▶ (b) due (c) nessuno (d) infiniti

Soluzione:

$f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$

$f_x = 3x^2 + 2y$

$f_y = 2x - 4y$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

sostituiamo la 2ª nella 1ª ottenendo

$3 \cdot 4y^2 + 2y = 0 \iff 2y(6y+1) = 0 \iff y = 0 \vee y = -\frac{1}{6}$

se $y = 0$, $x = 2y \Rightarrow x = 0$, quindi $(0,0)$ è soluzione.

se $y = -\frac{1}{6}$, $x = 2y \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, quindi $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ è soluzione.

La funzione ha 2 punti stazionari.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 24 ottobre 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log|e^{-4x} - 5| - 6x$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo e del valore assoluto del suo argomento, l'unica condizione da imporre affinché la funzione sia definita è $e^{-4x} - 5 \neq 0$. Il dominio della funzione quindi è l'insieme $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-\log 5}{4}\}$. La funzione è continua nel suo dominio in quanto composizione e somma di funzioni continue. Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{-\log 5}{4}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Ne deduciamo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = \frac{-\log 5}{4}$. Non ha invece asintoti orizzontali. Deduciamo anche che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Controlliamo l'eventuale esistenza di asintoti obliqui a $\pm\infty$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^{-4x}) + \log(1 - 5e^{4x}) - 6x}{x} = -10$$

e controlliamo che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 10x = 0.$$

La funzione ammette quindi asintoto obliquo di equazione $y = -10x$ per x che tende a $-\infty$. Calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -6$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 6x = \log 5.$$

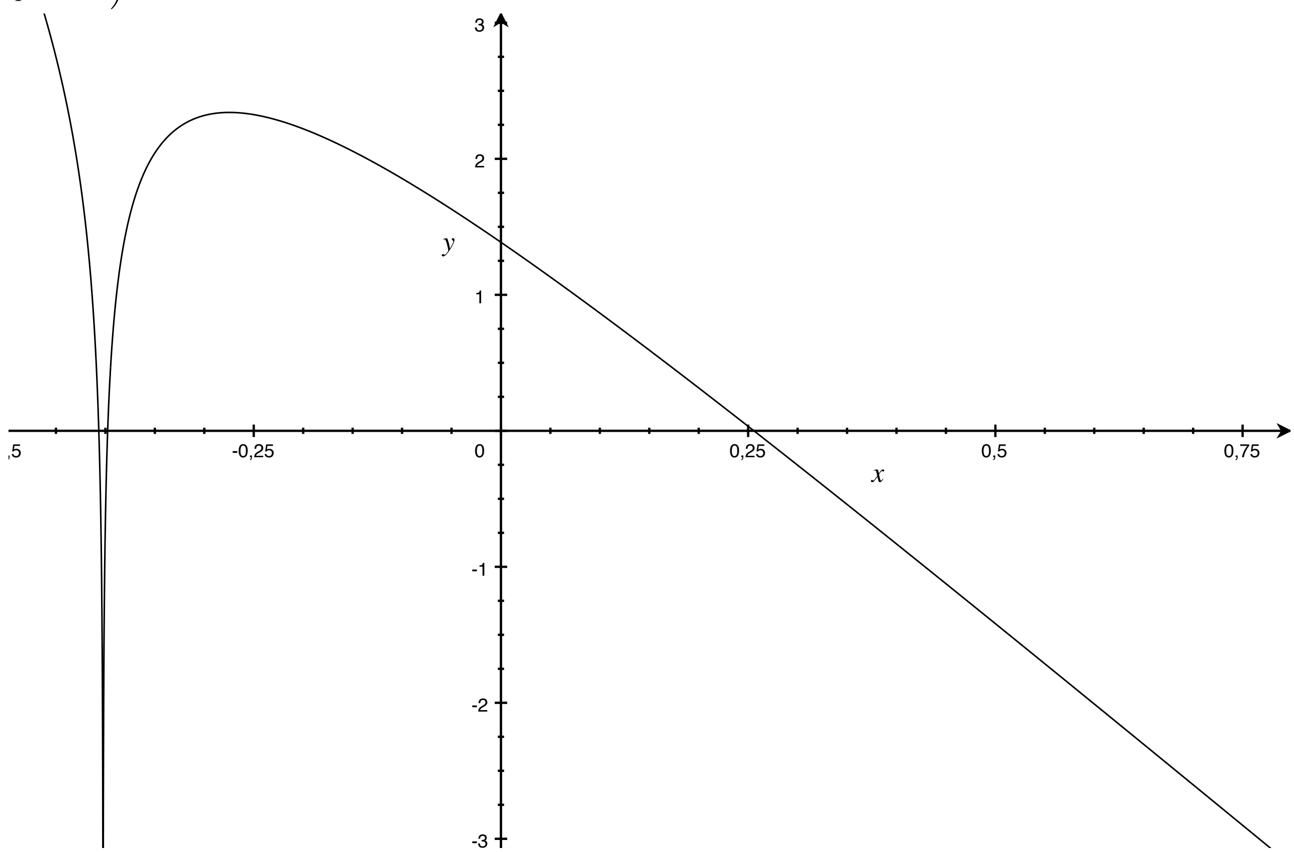
Esiste un asintoto obliquo anche per x che tende a $+\infty$ con equazione $y = -6x + \log 5$. La funzione risulta derivabile nel suo dominio perché composizione e somma di funzioni derivabili in questo dominio. Possiamo calcolare facilmente la sua derivata ed otteniamo

$$f'(x) = \frac{4}{5e^{4x} - 1} - 6$$

che esiste in tutti i punti del dominio. Ne studiamo il segno. La derivata risulta positiva per $\frac{-\log 5}{4} < x < \frac{-\log 3}{4}$, negativa per $x > \frac{-\log 3}{4}$ e si annulla per $x = \frac{-\log 3}{4}$. Ne segue che il punto $x = \frac{-\log 3}{4}$ è un punto di massimo locale. Invece per $x < \frac{-\log 5}{4}$ la derivata ha segno sempre negativo. Riassumendo, la funzione è strettamente decresecente per $x < \frac{-\log 5}{4}$, strettamente crescente per $\frac{-\log 5}{4} < x < \frac{-\log 3}{4}$ e ancora strettamente decrescente per $x > \frac{-\log 3}{4}$. Vogliamo studiare anche la convessità della funzione. A tal fine ne calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{80e^{4x}}{(5e^{4x} - 1)^2}$$

che è negativa su tutto il dominio e quindi la funzione è concava sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{-\log 5}{4}\right)$ e sulla semiretta $\left(\frac{-\log 5}{4}, +\infty\right)$.



Esercizio 2 Dire se la successione

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[(n^3)]{e} - \cos\left(\frac{3}{n^3}\right)}{\sin\left(\log\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\right)}$$

è superiormente o inferiormente limitata.

Soluzione

Il numeratore si riscrive come $e^{\frac{1}{n^3}} - \cos(\frac{3}{n^3})$, e il denominatore come $\sin(\log(1+\frac{2}{n^2}))$. Usando gli sviluppi di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$, $\cos(t) = 1 + o(t)$, $\log(1+t) = t + o(t)$ e $\sin(t) = t + o(t)$, si trova

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+o(1)}{2+o(1)}$$

che tende a 0 quando $n \to +\infty$. Segue che la successione a_n è limitata sia inferiormente che superiormente.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_0^1 x e^{(x^2)} \cos\left(x^2\right)\, dx.$$

Soluzione

Se $t = x^2$ abbiamo $dt = 2xdx$, e t varia pure tra 0 e 1. Usando questa sostituzione, l'integrale diventa

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^t \cos(t) dt$$

che si calcola usando due volte la regola di integrazione per parti. Abbiamo

$$\int e^t \cos(t) = e^t \cos(t) - \int e^t(-\sin(t)) = e^t \cos(t) + \left(e^t \sin(t) - \int e^t \cos(t) dt\right)$$

da cui segue

$$\int e^t \cos(t) = \frac{1}{2} e^t (\cos(t) + \sin(t)).$$

e dunque per il teorema di Torricelli

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^t \cos(t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^t (\cos(t) + \sin(t))\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e(\cos(1) + \sin(1)) - 1).$$